

Interdisziplinäre Systemtheorie ¹

Gerhard Mack

II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

July 23, 2007

¹Vorlesung an der Universität Hamburg, SS 1998

Contents

1	Überblick über den Inhalt der Vorlesung	1
2	Ein gemeinsamer Rahmen für alle Wissenschaft	3
2.1	Der Fund einer universellen Sprache	3
2.2	Grundlagen der Theoriebildung	5
2.3	Die Welt als Netzwerk von Beziehungen	10
2.4	Objektive vs. subjektive Aussagen	16
2.5	Der tautologische Charakter der Anforderungen an ein System	16
2.6	Beschreibung von Systemen	18
2.7	Zwei spezielle Systeme als Beispiel	19
3	Darstellungstheorie der Bedeutung	21
3.1	Ein Blick auf Escher's unmögliche Bilder	21
3.2	Darstellungen	23
3.2.1	Darstellung, Kognition, Erzeugung neuer fundamen- taler Pfeile	25
3.2.2	Zur Bedeutung der Kognition	26
3.2.3	Definition einer Darstellung	33
3.3	Beispiele von Darstellungen	35
3.3.1	Sortierung von Zahlen in gerade und ungerade	35
3.3.2	Darstellungen von Gruppen	37
3.3.3	Logische Darstellungen	37
3.4	Konstruktion von Isomorphismen	41
3.5	Cartan's Theorie der Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren	43
4	Finanzmärkte	51
4.1	Einige Grundbegriffe der Finanzwissenschaft	52
4.2	Risiko und Kursentwicklung von Aktien	54

4.3	Ideale Finanzmärkte als unfrustrierte Systeme	56
4.4	Preis von Optionen nach Black und Scholes	59
4.5	Selbstorganisation in Finanzmärkten	66

Chapter 1

Überblick über den Inhalt der Vorlesung

Es ist überhaupt nichts so wichtig im Leben, als genau den Standpunkt auszumitteln, aus welchem die Dinge aufgefaßt und beurteilt werden müssen, und an diesem festzuhalten, denn nur von *einem* Standpunkt aus können wir die Masse der Erscheinungen mit Einheit auffassen, und nur die Einheit des Standpunkts kann uns vor Widersprüchen schützen. *Claus von Clausewitz*

Ziel dieser Vorlesung über interdisziplinäre Systemtheorie wird es sein, ein Bild der Welt zu entwerfen; eine Theorie der Welt auf der Basis der Analyse allgemeiner komplexer Systeme zu skizzieren. Es kommt mir dabei besonders darauf an, die Welt von *einem* Standpunkt aus zu betrachten, wie schon Clausewitz dies empfahl. In seinem Buch "*vom Kriege*" gibt es noch manches andere, was man heute in der Systemtheorie ähnlich sieht.

Wir werden dabei viele Fachgebiete berühren.

Naturwissenschaften: Physik, Chemie, Biologie, Biochemie, Informatik, experimentelle Psychologie,

Sozialwissenschaften: Soziologie, politische Wissenschaften, Konfliktforschung, Wirtschaft, Finanzwissenschaften,

2 CHAPTER 1. ÜBERBLICK ÜBER DEN INHALT DER VORLESUNG

Geisteswissenschaften: Philosophie, Linguistik, Theologie

Schon innerhalb der Naturwissenschaften gibt es viele Wechselbeziehungen. Besonders wird uns die Beziehung zwischen Biologie und Informatik interessieren. Ich werde unter anderem versuchen darzutun, wie man Prozesse in biologischen Systemen als eine Art von Berechnung auffassen kann, wenn auch nicht ganz im herkömmlichen Sinne der Berechnung mit Hilfe einer Turing-Maschine. Wir werden auch andere Beispiele sehen, wie ganz verschiedene Wissenschaften einander befruchten können, z.B. die Biologie die Soziologie, und die Soziologie die Physik.

Natürlich kann hier nicht die Summe der Details all dieser Fächer gegeben werden. Clausewitz hat aber auch hier einen Trost für uns.

Darum sind auch diejenigen immer als lächerliche Pedanten verschrien worden, die für die Erziehung eines künftigen Feldherrn nötig oder auch nur nützlich hielten, mit der Kenntnis aller Details anzufangen. *Claus von Clausewitz*

Es soll nicht verschwiegen werden, daß erfahrungsgemäß nur dadurch ein tiefes Verständnis grundlegender allgemeiner Einsichten zu gewinnen ist, daß man in mindestens einem betroffenen Fach in die Tiefe der Details geht. Hierfür bietet die Universität eine Fülle geeigneter Veranstaltungen an.

Wenn wir aber den Wald sehen wollen, und nicht nur Bäume, so haben wir gleich von Anfang an ein Problem, die Suche nach einer geeigneten Sprache. In welcher Sprache können wir in wissenschaftlich präziser Weise über alle die Gegenstände dieser Fächer reden?

Chapter 2

Ein gemeinsamer Rahmen für alle Wissenschaft

2.1 Der Fund einer universellen Sprache

Es gibt ein amüsanter Buch von Umberto Eco, *Die Suche nach der perfekten Sprache*. Er gibt darin einen geschichtlichen Abriß der Versuche der Menschen, die Sprachverwirrung nach dem Bau des Turms von Babel zu überwinden, darunter auch die Versuche von Locke und anderen, hauptsächlich in England, nach Newton's Physik eine für die Naturwissenschaften hinreichend präzise Sprache zu finden. Die ursprüngliche babylonische Sprachverwirrung ist inzwischen weitgehend überwunden worden, denn wir verstehen es, von einer natürlichen Sprache in die andere zu übersetzen; dadurch können wir uns verständigen. Aber beim Wiederaufbau des Turms ist eine neue Sprachverwirrung eingetreten, die Fragmentierung der Wissenschaften. Heute können oft innerhalb einer einzigen Wissenschaft die Vertreter verschiedener Richtungen einander nicht mehr verstehen. Das Problem, eine gemeinsame Sprache zu finden wird hier als erstes zu lösen sein.

Wir verstehen hier Sprache in einem allgemeinen Sinn als eine Weise der symbolischen Darstellung.

Traditionell gibt es drei Weisen der symbolischen Darstellung.

verbal : Geisteswissenschaften und Sozialwissenschaften

quantitativ : exakte Wissenschaften, insbes. Physik

strukturell: Chemie, Linguistik, Systemtheorie

4CHAPTER 2. EIN GEMEINSAMER RAHMEN FÜR ALLE WISSENSCHAFT

Die Systemtheorie, die hier besprochen werden soll, benutzt die strukturelle Sprache. Eines der technisch anspruchsvollsten Probleme bei der Schaffung einer allgemeinen Theorie ist es, die quantitativen Theorien, insbesondere der Physik, in eine strukturelle Sprache zu übersetzen ohne sie zu verändern. Daß physikalische Theorien von einer Sprache in eine andere übersetzt werden, ist nicht ungewöhnlich. Man denke an die Geschichte der Quantenmechanik. Sie wurde historisch in zwei völlig verschiedenen Formulierungen gefunden, die Schrödinger'sche Wellenmechanik und die Heisenberg'sche Matrizenmechanik, die auf den ersten Blick nichts gemeinsam zu haben scheinen. Und doch wurde später gezeigt, daß sie in einem präzisen Sinn äquivalent sind. Und dies eben macht die Exaktheit der exakten Wissenschaften aus, daß man genau sagen kann, wann eine Theorie eine exakte Übersetzung einer anderen Theorie in eine andere Sprache ist. Das Kriterium ist, daß alle Vorhersagen über beobachtbare Phänomene dieselben sind. Das Problem der Äquivalenz von Beschreibungen wird sich auch dann noch stellen, wenn wir die universelle Sprache gefunden haben, denn es kann, wie besonders Willard v. Ormann Quine betont hat, auch nichttriviale Übersetzungen von einer Sprache in sich selbst geben. Dadurch werden wir auch hier schon das Problem der Bedeutung berühren, das später eine große Rolle spielen wird.

Das Problem der Sprache hat noch einen anderen Aspekt. Wir suchen nicht nur eine Sprache, die es erlaubt, präzise über all die Gegenstände der Fachwissenschaften zu sprechen, sondern über alles was uns als Menschen interessiert. Das Thema, was man sinnvoll sagen kann, und wie man es sagen kann, steht mit im Mittelpunkt dieser Vorlesung, und auch schon im Mittelpunkt von Wittgenstein's berühmtem *tractatus logico philosophicus*. Er endet mit dem berühmten Satz

Worüber man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen.

Tatsächlich resigniert Wittgenstein weitgehend, wie man aus dem folgenden Zitat sieht, und auch aus seinen aus heutiger Sicht unverständlichen Ausführungen über den Mythos.

Wir fühlen, daß selbst, wenn alle *möglichen* wissenschaftlichen Fragen beantwortet sind, unsere Lebensfragen noch gar nicht berührt sind.

Dies geht sicher zu weit. Denn für nicht wenige alte Menschen ist die Gesundheit das Thema Nr. 1 ihres Lebens. Zu sagen, ihre Lebensfragen seien

nicht berührt, wenn man alle medizinischen Fragen beantworten und alle Krankheiten heilen könnte, ist absurd. Aber ein Korn Wahrheit ist dennoch in der Behauptung, daß die Präzisionsanforderungen der Wissenschaft uns von den Lebensfragen der Menschen fernhalten könnten. Ich werde im letzten Teil der Vorlesung versuchen, mich dem zu stellen so gut ich es vermag. Ausflucht in den Mythos ist keine Antwort.

2.2 Grundlagen der Theoriebildung

Das nächste Problem wird sein, wie macht man eine Theorie? Wir zerteilen das Problem in zwei Schritte

1. Man benennt Dinge (oder Sachverhalte).
2. Man macht Aussagen über benannte Dinge.

Es folgt ein kognitiver Schritt: Die gemachten Aussagen müssen mit beobachteten Strukturen in Beziehung gebracht werden; dies ist Gegenstand der experimentellen Wissenschaft.

Die Analyse des Akts der Namensgebung hat eine uralte Tradition¹ in der Theologie und Philosophie; darauf kann an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Es gibt aber auch einen Bezug zu den Naturwissenschaften. Wir werden eine Korrespondenz der zwei Schritte zu zwei Arten von Naturgesetzen finden,

1. Einschränkungen an den Zustand eines Teils der Welt zu einem (beliebigen) Zeitpunkt,
2. Aussagen über die Dynamik, d.h. über Veränderung des Zustands im Lauf der Zeit.

Ein Beispiel von Gesetzen der ersten Art sind die Gesetz für elektromagnetische Felder, die besagen, daß die Quellen des elektrischen Felds die elektrischen Ladungen sind, während magnetische Felder quellenfrei sind. Dies

¹vgl. Genesis 2:

Und Gott der HERR machte aus Erde alle die Tiere auf dem Felde und alle Vögel unter dem Himmel und brachte sie zu dem Menschen, daß er sähe, wie er sie nannte; denn wie der Mensch jedes Tier nennen würde, so sollte es heißen

6CHAPTER 2. EIN GEMEINSAMER RAHMEN FÜR ALLE WISSENSCHAFT

sind Aussagen über elektromagnetische Felder, die zu jeder Zeit erfüllt sein müssen. Zusammen mit einigen andern charakterisieren diese Aussagen, was ein elektromagnetisches Feld ist.

Hier ist eine List der Dinge, die wir benennen wollen. Wir fragen

1. was ist Raum und Raum-Zeit?
2. was ist Materie?
3. was ist ein Ding?
4. was ist Leben?
5. was ist der Mensch?

Eine letztgültige Antwort auf alle diese Fragen wird man zwar voraussichtlich nie finden, aber man muß diese Fragen immer wieder neu stellen und versuchen, sich einer Antwort zu nähern.

In der Philosophie unterscheidet man traditionell zwischen verschiedenen Arten des Seins. Diesen Teil der Wissenschaft nennt man die Ontologie. Sie gilt vielleicht manchem Hörer als der abgehobenste Teil der Philosophie überhaupt. Aber wann immer ein Teilgebiet der Philosophie erfolgreich und anwendungsrelevant wird, bekommt es einen neuen Namen und wird eine eigene Wissenschaft. Die reine Mathematik besteht aus Aufsammlungen von Folgen logischer Schlüsse, und ist damit reine Philosophie. Aber sie wird heute nicht mehr unter die Geisteswissenschaften gerechnet. Der Naturphilosophie ist es ähnlich ergangen, jetzt haben wir Physik, Chemie, Biologie usw. Und die Ontologie steht als nächste auf der Liste der Separatisten; es gibt inzwischen eine kommerzielle Ontologie.² Klassifizierungen von Wesenheiten nach ihrer jeweiligen Art des Seins und den Arten der Beziehungen, die zwischen ihnen herrschen können ist von großem Interesse für die Informationsverarbeitung per Computer.

Traditionell unterscheidet man in der Philosophie seit Aristoteles und über Kant hinaus bis heute verschiedene Arten des Seins in den Kategorien. Die traditionelle Meinung ist, daß Wesenheiten, die verschiedenen Kategorien zugehören, *a priori* unterschieden sind. Ich werde hier den Pfad der Tradition verlassen. Nach Kant ist Raum eine *a priori* Form der Anschauung. Von

²Hier ist die internet Adresse der Firma, die ontologische Produkte verkauft: [http : //www.cyc.com](http://www.cyc.com) insbes. <http://www.cyc.com/cyc-2-1/toc.html>.

Einstein wissen wir jedoch, daß Raum und Raum-Zeit durch spezielle strukturellen Eigenschaften ausgezeichnet sind, die man in der Aussage zusammenfaßt, sie besäßen eine Geometrie. Die Geometrie des Raums ist in der allgemeinen Relativitätstheorie zudem zeitlich veränderlich, sie bleibt aber stets Geometrie. Damit sind dem Zustand zu einer Zeit bestimmte Einschränkungen auferlegt, Gesetze der ersten oben erwähnten Art. Dies verallgemeinernd soll hier eine auf strukturellen Eigenschaften ruhende Namensgebung erfolgen, die keine *a priori* Unterscheidung nach Kategorien voraussetzt. Ich werde also versuchen, Wesenheiten, die verschiedenen Kategorien zugehören, strukturell zu unterscheiden. Sie sind daher auch nicht *a priori* unvergleichbar.³ Unter anderem soll Materie unter allem Seienden auf diese Weise ausgezeichnet werden

Besonders interessant ist die Frage, was ist ein Ding. Sie bringt uns mit dem Begriff der Selbstreferenz in Berührung, der bisher in der Physik keine Rolle gespielt hat. Meine Betrachtungen hierzu sind durch Luhmann's soziologische Systemtheorie inspiriert worden; ich werde versuchen, die Begriffsbildung zu übersetzen und so präzise zu machen, wie es den Anforderungen exakter Wissenschaften entspricht. Daß die Frage nach dem Ding eine sinnvolle Frage ist, sieht man, wenn man sie etwas anders stellt. Die Dinge, von denen wir sprechen, sind die Gegenstände unserer Wahrnehmung. Die Frage lautet dann, was wird als Ding wahrgenommen? Dies ist eine traditionelle wissenschaftliche Frage, und die Gestaltpsychologie versuchte, darauf eine Antwort zu geben. Sie formulierte das *Prinzip des gemeinsamen Schicksals*: Was sich gemeinsam bewegt, wird als eine Einheit wahrgenommen.⁴

Leben werden wir von einem abstrakten und allgemeinen Standpunkt aus betrachten. Die Biologie ist dabei unser wichtigster Lehrmeister. Die Natur hat 3.5 Millionen Jahre Erfahrung damit. Wir haben noch längst nicht ausgeschöpft, was man daraus lernen kann. Die Idee, daß biologische Erkenntnisse für ganz andere Gebiete wie etwa die Soziologie relevant sein können, findet sich ebenfalls bei Luhmann. Er übernahm von den Biologen

³In Hofstadters Buch *Gödel, Escher, Bach* wird eine faszinierende Interpretation des Begriffs der Erleuchtung im Zen-Buddhismus vorgetragen. Kurz gesagt erfordert sie ein Herabsteigen unter die Ebene der Aristotelischen Kategorien zu einer tieferen Schicht gedanklicher Aktivität.

⁴Wenn man Quantenmechanik betreibt, wird man sich der Frage nach dem Ding nicht bewußt, weil man Näherungsmethoden anwendet, die die Lösung schon implizit voraussetzen. Man startet von genäherten Zuständen, die kraft ihrer Stationarität und räumlichen Lokalisation nach unserer Definition Kollektionen von Dingen beschreiben.

8CHAPTER 2. EIN GEMEINSAMER RAHMEN FÜR ALLE WISSENSCHAFT

Maturana und Varela den Begriff der Autopoiesis und postuliert, daß die Gesellschaft ein autopoietisches System sei, das wie Lebewesen seine Elemente selbst macht.

Die letzte Frage schließlich ist die Frage nach dem Menschen. Die soziologische Systemtheorie geht hier andere Wege. Sie versucht, ein Verständnis der Gesellschaft zu erreichen, ohne die Frage nach dem Menschen zu beantworten. Menschliche Bedürfnisse kommen zwar vor, aber nur jeweils einzelne - die materiellen Lebensgrundlagen etwa bei der Analyse des Systems Wirtschaft. Selbstkonsistenzbetrachtungen spielen eine wichtige Rolle bei solchen Versuchen, eine Theorie zusammengesetzter Objekte zu machen, ohne zuvor die Eigenschaften der Konstituenten zu kennen. Theorien dieser Art sind grundsätzlich möglich. In der Elementarteilchenphysik waren sie populär bevor man die Quarks als Konsituenten von Elementarteilchen entdeckte. Das Quarkmodell hingegen geht von den Eigenschaften der Quarks aus und liefert viel detailliertere und tiefere Ergebnisse, als die vorherige Theorie sie liefern konnte. Analog dazu soll wenigstens in Ansätzen versucht werden, Gesellschaft als emergentes Phänomen im Sinne der Theorie komplexer Systeme zu verstehen, wobei menschliche Bedürfnisse die fundamentalen Kräfte bestimmen. Man wird dann sehen, um hier nur ein Beispiel zu nennen, daß ein rationaler Diskurs auf dem Gebiet der Politik deshalb so schwierig ist, weil versucht wird, inkommensurable Bedürfnisse gleichzeitig zu befriedigen.

Es ist eine kontroverse Frage, wie es überhaupt möglich ist, bei der Theoriebildung mit so wenigem auszukommen, und von Namensgebungen ausgehend zu Aussagen zu kommen, die im wesentlichen mit Hilfe der Logik hergeleitet werden sollen. Kant argumentiert einerseits, daß die traditionelle Vorstellung der Philosophie vor seiner *Kritik der reinen Vernunft*, man könne mit der Logik alleine Aussagen über die Welt gewinnen, irrig sei, weil man dadurch nicht mit der Erfahrung in Berührung käme. Er führt dann den Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Urteilen ein. Analytische Aussagen sind solche, die alleine aus der Definition eines Sachverhalts folgen; es sind also Konsequenzen logischer Schlußfolgerungen auf der Basis der Definitionen. Solche Schlußfolgerungen brauchen nicht notwendig trivial zu sein; sie sind Tautologien im Sinne der Logik, aber das sind auch alle mathematischen Sätze. Die synthetischen Aussagen sind nicht von dieser Art, und man könnte vermuten, daß nicht analytische Aussagen nicht *a priori* sein können sondern zusätzlicher Annahmen bedürften. Kant argumentiert dann aber andererseits, daß es doch synthetische Aussagen *a priori* gibt. Diese Möglichkeit beruht auf dem, was Kant den obersten Grundsatz aller

synthetischen Urteile nennt,

die Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung überhaupt sind zugleich die Bedingungen der Möglichkeit der Gegenstände der Erfahrung. *I. Kant*

Man kann also Aussagen über etwas in der Welt auf der Basis dessen machen, daß es ein Gegenstand unserer Erfahrung, und das heißt unseres Denkens sein kann. Ich werde versuchen, dieses Prinzip zu seiner logischen Konsequenz zu verfolgen, und eine Theorie auf der Basis einer Hypothese über die Struktur des menschlichen Denkens zu bauen,

Der menschliche Geist schafft und verknüpft Beziehungen zwischen Dingen oder Agenzien,

oder genauer gesagt: Beziehungen zwischen mentalen Bildern von Dingen oder Agenzien.⁵

In seinem Buch *die Frage nach dem Ding* analysiert Heidegger Kant's Kritik der reinen Vernunft. Er führt darin aus,

die neuzeitliche Naturwissenschaft und die neuzeitliche Mathematik und die neuzeitliche Metaphysik [seien] aus derselben Wurzel des Mathematischen im weiteren Sinn entsprungen.

Das Mathematische ist nicht mit Mathematik gleichzusetzen,⁶ sondern - und dies wird uns leiten -

⁵Es könnte eingewandt werden, Hypothesen über die Struktur des menschlichen Denkens seien als *a priori* Annahmen unangemessen; sie sollten aus neurophysiologischen Daten hergeleitet werden. Aber "hergeleitet" ist der falsche Ausdruck. Nach den Regeln der Logik ist es nicht erlaubt bei einer Herleitung das Herzuleitende vorauszusetzen. Wenn man eine Theorie des menschlichen Denkens auf neurophysiologischen Daten aufbaut, so wird dabei die Struktur des menschlichen Denkens schon benutzt. Man versucht, eine selbstkonsistente Theorie zu konstruieren, und dies kann wertvolle Einsichten liefern. Aber es ist keine Herleitung, und es ist dadurch auch nicht möglich, zu einer fundamentalen Ebene als der Struktur des menschlichen Denkens vorzustoßen.

⁶Bildlich gesprochen verhält sich das Mathematische zur Mathematik so wie der Apfelbaum zum Apfel.

[Das Mathematische:]Damit wird im Grundriß vorgezeichnet, wie jedes Ding und jede Beziehung jedes Dings zu jedem Ding gebaut ist. *M. Heidegger*

2.3 Die Welt als Netzwerk von Beziehungen

Damit kommen wir zur Analyse dessen, was eine Beziehung zur Beziehung macht und damit zur präzisen Definition dessen, was ich ein *System* nenne. Ein System ist das, was Wittgenstein einen *Sachverhalt* nennt.

Der Sachverhalt ist eine Verbindung von Gegenständen (Sachen, Dingen)

Die Art und Weise, wie die Gegenstände im Sachverhalt zusammenhängen, ist die Struktur des Sachverhalts.

Die Form ist die Möglichkeit der Struktur. *Ludwig Wittgenstein,*

⁷ Systeme sind Modelle eines Teils der Wirklichkeit in Form eines Netzwerks von Beziehungen zwischen Dingen oder Agenzien. Die Dinge oder Agenzien werden als Objekte des Systems bezeichnet, und die Beziehungen als Pfeile. Die Objekte können selbst wieder Systeme sein; man spricht dann auch von Objekten mit innerer Struktur.

Die Welt wird als eine Art von Beziehungskiste modelliert, mit Verbindungen zwischen Objekten darin, die selbst wieder Beziehungskisten sein können. Wissenschaftler reden allerdings nicht von Beziehungskisten sondern von Systemen. Ein anderes Bild wird durch den einst populären Song

puppets on a string

evoziert. Man sieht die Menschen in ihrer Gesellschaft als Puppen an Drähten; anders als Marionetten aber können sie an diesen Drähten nicht nur gezogen werden, sondern auch ziehen.

Charakteristisch für Beziehungen ist, daß sie von einem Objekt auf ein anderes gerichtet sind, und daß sie zusammengesetzt werden können. Vor ich

⁷tractatus logico-philosophicus, Sätze 2.01, 2.032 und 2.033

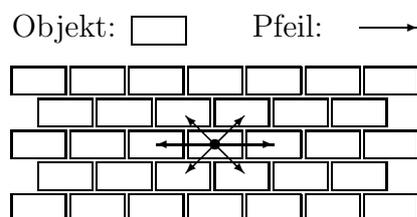


Figure 2.1: Ziegelsteinmauer

die formale Definition eines Systems angebe, sei sie am Beispiel einer Ziegelsteinmauer illustriert. Die Ziegelsteinmauer besteht aus Ziegelsteinen. Dies sind ihre Objekte. Aber die Ziegelsteinmauer ist nicht einfach die Summe dieser Objekte. Anders als ein Haufen von Ziegelsteinen oder eine Menge von Ziegelsteinen hat die Mauer eine innere Struktur. Diese innere Struktur ist durch Beziehungen zwischen verschiedenen Ziegelsteinen gegeben, diese Beziehungen sind hier mögliche Verschiebungen eines Steins an den Platz eines andern. Darunter gibt es privilegierte *direkte* Beziehungen. Dies sind die Beziehungen zwischen den Ziegelsteinen, die sich berühren. Die Struktur ist gegeben, wenn man diese direkten Beziehungen kennt. Sie sagen aus, um wieviel ein Ziegelstein verschoben werden muß, damit er auf den Platz des ihn berührenden Nachbarn kommt. Im Bild sind diese direkten Beziehungen als Pfeile eingezeichnet, insgesamt sechs.

Nun gibt es aber auch noch Beziehungen zwischen entfernteren Ziegelstein. Es gibt eine Verschiebung, die einen Ziegelstein an den Platz irgendeines andern bringen würde. Diese Verschiebungen kann man aus einer Folge von fundamentalen Verschiebungen zusammengesetzt denken, die den direkten Beziehungen zugeordnet sind. Man denkt sich den Ziegelstein in mehreren Schritten jeweils an die Stelle eines vorherigen Nachbarn verschoben. Man lernt daraus, daß man aus den direkten Beziehungen indirekte Beziehungen zusammensetzen kann.

Solche zusammengesetzten Beziehungen sind uns auch aus dem täglichen Leben vertraut. Es gibt den Freund eines Freundes, der vielleicht später mal selbst ein Freund werden kann, und die Schwiegermutter ist die Mutter des Ehemanns oder der Ehefrau usw.. Es ist uns von Natur aus mitgegeben, daß wir in Beziehungen denken.

Im Beispiel der Mauer und auch allgemeiner gibt es zu jeder Beziehung eine Beziehung in der umgekehrten Richtung bei der Quelle und Ziel vertauscht sind. Und wenn Anne die Ehefrau von Fritz ist, so ist Fritz der Ehemann von Anne. Wir nennen dies die adjungierte Beziehung. Im Fall der Ziegelsteinmauer ist dies die entgegengesetzte Verschiebung, sie bringt den Stein an seinen ursprünglichen Platz zurück. Damit die Zusammensetzbarkeit gewährleistet ist, fordern wir, daß unter allen Beziehungen eines Objekts auch die triviale Beziehung der Identität mit sich (triviale Verschiebung) zu finden ist.

Die Ziegelsteinmauer kann selbst als ein Objekt in einem andern System auftreten. Man sagt dann, dieses Objekt habe innere Struktur. Man denke an einen viereckigen Turm, der aus vier verschiedenen Mauern gebaut ist, zwischen denen Beziehungen bestehen, die wiederum ihre relative Lage angeben. Die Ziegelsteinmauer-Objekte haben eine innere Struktur der eben beschriebenen Art.

Die Ziegelsteinmauer ist nun allerdings ein System mit einer speziellen Eigenschaft, die nicht in jedem System vorhanden sein muss. Es gibt nur eine Verschiebung von einem Stein an den Platz eines andern. Gegeben die Quelle (der anfängliche Platz) und das Ziel, so können wir eine solche Verschiebung in verschiedener Weise aus einer Folge von fundamentalen Verschiebungen zusammengesetzt denken. Eine solche Folge nennen wir einen Weg. Unabhängig vom Weg ist die resultierende Verschiebung jedoch immer dieselbe. Diese Wegunabhängigkeit ist eine spezielle Eigenschaft.⁸

Frustration begegnet in verschiedenem Kontext unter verschiedenen Namen. Die Tabelle gibt eine Übersicht

Ein System mit dieser Eigenschaft nennen wir *unfrustriert*. In einem beliebigen System können bei gegebener Quelle und gegebenem Ziel verschiedene Wege möglicherweise verschiedene Beziehungen bestimmen. Dann sprechen wir von *Frustration*.

⁸Physiker sind mit Aussagen über Wegunabhängigkeit wohl vertraut. Eine Kraft hat ein Potential, wenn die von der Kraft auf ein Objekt bei Verschiebung des Objekts längs eines beliebigen Wegs zwischen zwei vorgegebenen Raumpunkten geleistete Arbeit vom Weg unabhängig ist. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik behauptet eine Wegunabhängigkeit, die es erlaubt, die Entropie zu definieren. Und die Black-Scholes Gleichung der Finanzwissenschaft leitet aus der Annahme der Wegunabhängigkeit des Resultats von kombinierten Finanztransaktionen eine Formel für den Wert einer Option her. Ein Weg ist hier eine Folge von Käufen und Verkäufen, Kreditaufnahmen eingeschlossen, deren Netto-Resultat den Käufer zu einem bestimmten Zeitpunkt in den Besitz eines bestimmten Guts setzt.

Elektrodynamik Eichtheorien der Elementarteilchen	Feldstärke, z.B. elektrische, magnetische
Flächen im Raum Allgemeine Relativitätstheorie	Krümmung
Finanzmärkte	Arbitrage
Systemtheorie Spin Gläser	Frustration

Table 2.1: Frustration unter verschiedenem Namen

Frustration ist der Feind der Bedeutung - ich werde dies in der nächsten Vorlesung am Beispiel von Escher's unmöglichen Bildern illustrieren. Frustration ist auch die Mutter der Kräfte. Ich werde dies später am Beispiel der Finanzwissenschaft und an Maxwell's Theorie des Elektromagnetismus erläutern.

Formale Definition eines Systems

Ich will die Definition noch etwas mehr formalisieren.

Ich werde hier nicht die in der Logik traditionelle Bezeichnungsweise aRb für eine Beziehung R von a zu b benutzen, die von den Klassikern und auch in Wittgenstein's *tractatus logico philosophicus* benutzt wurde, sondern die heute in der Mathematik gebräuchliche Bezeichnungsweise. Die Objekte werden mit großen Buchstaben X, Y, Z, \dots bezeichnet, und die Beziehungen mit kleinen Buchstaben f, g, \dots . Man schreibt

$$f : X \mapsto Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

für eine Beziehung von X zu Y . X heißt *Quelle* und Y heißt *Ziel* von f . Für zusammengesetzte Beziehungen schreiben wir hier $g \circ f$ statt der traditionellen Notation aR_1R_2b . Das Symbol \circ erinnert daran, daß eine Zusammensetzungsregel erforderlich ist.

Nach Definition besteht ein System aus Objekten X, Y, \dots und gerichteten Beziehungen f, g, \dots zwischen den Objekten. Die Beziehungen haben die folgenden Eigenschaften.

Verknüpfung Beziehungen f mit Ziel Y können mit Beziehungen g mit Quelle Y zu Beziehungen $g \circ f$ zusammengesetzt werden. $f : X \mapsto Y$

und $g : Y \mapsto Z$ definieren

$$g \circ f : X \mapsto Z.$$

Die Verknüpfung ist assoziativ,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Adjunktion Zu jeder Beziehung $f : X \mapsto Y$ gibt es eine eindeutig bestimmte Beziehung $f^* : Y \mapsto X$ in die entgegengesetzte Richtung. Es ist

$$f^{**} = f$$

und

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

Identität Jedes Objekt X besitzt eine ausgezeichnete Beziehung $\iota_X : X \mapsto X$ zu sich selbst, die als Identität mit sich selbst interpretiert wird. Sie ist ihr eigenes Adjungiertes,

$$\iota_X^* = \iota_X$$

Zusammensetzung mit der Identität macht keinen Unterschied,

$$f \circ \iota_X = f = \iota_Y \circ f$$

für beliebiges $f : X \mapsto Y$.

Lokalität Einige Beziehungen werden als *direkte* oder *fundamentale* Beziehungen ausgezeichnet. Alle andern Beziehungen können durch Zusammensetzung und Adjunktion aus direkten Beziehungen gebaut werden.

$$f = b_n \circ \dots \circ b_1,$$

wobei jedes b_i direkt oder Adjungiertes einer direkten Beziehung ist. Der leere Weg ($n = 0$) ist zugelassen und liefert die Identität.

Die Objekte eines Systems können selbst Systeme sein; solche Objekte haben innere Struktur und werden auch als zusammengesetzte Objekte bezeichnet. Andernfalls werden die Objekte als atomar bezeichnet. Es ist jedoch zu betonen, daß dies eine Eigenschaft des Modells ist, nicht der modellierten

Wirklichkeit. Ähnliches gilt für die Charakterisierung einer Beziehung als fundamental.

Um die Betrachtung zusammengesetzter Objekte zu motivieren, greife ich hier der späteren Diskussion dessen, was Komplexität ausmacht, etwas vor.

Man kann verschiedene Modelle desselben Teils der Welt machen, insbesondere können sie verschieden detailliert sein. Man kann mikroskopische Modelle machen und makroskopische Modelle. Und dann kann es sein, daß das, was in einem makroskopischen Modelle als fundamentale Beziehung aufgefaßt wird, in einem detaillierteren mikroskopischen Modell als solche nicht vorhanden ist, sondern aus vielen Beziehungen zusammengebaut werden muß. Und ein im makroskopischen Modell atomares Objekt kann im mikroskopischen Modell innere Struktur besitzen.

Die Beziehung zwischen mikroskopischen und makroskopischen Modellen ist in der Physik von zentraler Bedeutung, aber nicht nur da. Sie bildet die Grundlage der Theorie komplexer Systeme. Genuin komplexe Systeme sind solche, die man nicht durch Betrachtung von Teilsystemen mit nur wenigen Objekten verstehen kann. Man wird dann fragen, wie man sie überhaupt verstehen kann, ohne viele Objekte gleichzeitig betrachten zu müssen. Die Antwort ist, daß man Theorien auf verschiedenen Ebenen betrachtet, vom mikroskopische zum makroskopischen. Man betrachtet also verschiedene Modelle gleichzeitig, und bringt diese in Verbindung. Dazu werden in der feineren Theorie zusammengesetzte Objekte definiert, und zu atomaren Objekten der gröberen Theorie erklärt. Dies ist ein Akt der *Komplexitätsreduktion*. Dabei braucht man i.a. in einem Schritt nur wenige Objekte als Konstituenten eines zusammengesetzten Objekts zuzulassen, denn man kann die Schritte zu wiederholen.

In der praktischen Anwendung der Resultate benutzt man immer das größte Modell, das anwendbar ist, um eine vorgelegte Fragestellung zu beantworten.

Wir haben beispielsweise in der Physik die kinetische Gastheorie als eine mikroskopische Theorie, und die Wärmelehre als eine makroskopische; beide können benutzt werden um Gase im Gleichgewicht zu beschreiben, die kinetische Gastheorie beschreibt jedoch außerdem Transportphänomene. Ein anderes Beispiel einer makroskopischen Theorie ist die Elektrodynamik polarisierbarer Materie. Statt einer detaillierten Beschreibung der Atome wird deren Effekt auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen durch zwei Parameter ϵ und μ , diese bestimmen den Brechungsindex.

2.4 Objektive vs. subjektive Aussagen

Wir unterscheiden Aussagen in der Sprache der Gedanken als *objektiv* oder *subjektiv*, je nachdem ob sie für ganz beliebige Systeme sinnvoll sind, ohne daß es dazu eines ausgezeichneten Objekts bedarf, oder ob sie auf ein ausgezeichnetes Objekt, das wir Subjekt nennen, Bezug nehmen.

2.5 Der tautologische Charakter der Anforderungen an ein System

Zusammenfassung: Wir modellieren Teile der Welt als Systeme, das sind Netzwerke von gerichteten Verbindungen zwischen Objekten. Die Objekte sind Modelle von Dingen oder Agenzien. Auch Systeme sind als Objekte zugelassen, man sagt dann, diese Objekte hätten innere Struktur. Die Verbindungen, auch Pfeile genannt, modellieren gerichtete Beziehungen zwischen Dingen oder Agenzien. Wir werden sehen, daß sie ohne weitere Annahme auch als Kanäle der Kommunikation interpretiert werden können. Gewisse Pfeile sind als fundamentale Pfeile ausgezeichnet. Sie modellieren direkte Beziehungen. Jeder Pfeil bestimmt eindeutig zwei Objekte, seine Quelle und sein Ziel.

Es wurden noch weitere Eigenschaften postuliert. Es soll jetzt gezeigt werden, daß darin tatsächlich keine weiteren Annahmen stecken, die über das Postulat hinausgehen, daß Systeme gerichtete Verbindungen zwischen Objekten enthalten, die wir als direkte Beziehungen interpretieren. Es genügt anzugeben, zwischen welchen Objekten direkte Beziehungen bestehen, und ggf. wie viele.

Genauer gilt folgender **Satz**:

1. Es sei eine Menge von Symbolen $\{b\}$ gegeben, und eine Zuordnung eines Quellobjekts Q_b und eines Zielobjekts Z_b zu jedem b . Dann kann daraus in kanonischer Weise ein System S_G mit fundamentalen Beziehungen $b : Q_b \mapsto Z_b$ konstruiert werden.
2. Jedes andere System mit denselben fundamentalen Beziehungen erhält man dadurch, daß man gewisse Pfeile in S_G als ununterscheidbar betrachtet. Mathematisch gesprochen sind die Pfeile des neuen Systems Äquivalenzklassen von Pfeilen in S_G . Die Pfeile in einer Äquivalenzklasse haben dieselbe Quelle und dasselbe Ziel.

3. Jedes System ist von dieser Art.

Die Grundidee hinter dieser Behauptung ist sehr einfach. Man fügt Symbole für die adjungierten Pfeile hinzu, und definiert die Pfeile als Folgen von Symbolen. Genauer wird für interessierte Leser nach der folgenden Bemerkung angefügt.

Bemerkung Später werden wir noch ein weiteres Resultat kennenlernen, dessen Verständnis allerdings hohe Anforderungen an Abstraktionsvermögen stellt. Auf die Objekte kommt es nicht an. Es genügt, eine Liste aller Pfeile mit als solchen markierten fundamentalen Pfeilen zu haben, und zu wissen, welche Pfeile f und g zusammengesetzt werden können, und welches das Symbol für den daraus zusammengesetzten Pfeil ist. Dann ist damit das System vollständig beschrieben - genauer später. Dies hebt die Notwendigkeit einer materialistische Weltsicht aus und führt zu einer Beschreibung der Welt als reiner Form.

Genauer zur Begründung des Satzes

Um das System zu definieren, fügen wir zunächst für jedes Symbol b unserer Menge an Symbolen ein zusätzliches Symbole b^* hinzu. Die Quelle von b^* sei das Ziel von b , und das Ziel von b sei die Quelle von b^* .

Die Pfeile in S_G mit Quelle Q und Ziel Z sind Folgen (b_1, \dots, b_n) von Symbolen mit der Eigenschaft, daß das Ziel der Quelle von b_i gleich der Quelle von b_{i+1} ist; weiter soll Q die Quelle von b_1 und Z das Ziel von b_n sein. Die Symbole können vom Typ b der b^* sein.

Falls $Q = Z$ so ist auch die leere Folge ($n = 0$) zugelassen; dieser Pfeil wird als die Identität ι_X interpretiert. Eine Folge aus nur einem Pfeil b_1 ist derselbe Pfeil wie b_1 . Er ist fundamental, falls b_1 in der ursprünglichen Menge $\{b\}$ ist.

Die Zusammensetzung der Pfeile wird als Zusammensetzung von Folgen definiert.

$$(b_1, \dots, b_n) \circ (b'_1, \dots, b'_m) = (b'_1, \dots, b'_m, b_1, \dots, b_n) \quad (2.1)$$

$$= b_n \circ \dots \circ b_1 \circ b_m \circ \dots \circ b_1. \quad (2.2)$$

Die Gültigkeit der Gleichung der zweiten Zeile folgt aus der Definition in der ersten Zeile. Die Umkehrung der Reihenfolge der Faktoren ist eine Folge unserer Notations-Konventionen. Die Assoziativität ist erfüllt.

Der zu (b_1, \dots, b_n) adjungierte Pfeil ist (b_n^*, \dots, b_1^*) . Falls $b_i = b^*$, so ist $b_i^* = b^{**}$ als b zu lesen.

Man überzeugt sich, daß alle definierenden Eigenschaften eines Systems erfüllt sind.

In einem beliebigen System bestimmt nach Definition jeder Weg (b_1, \dots, b_n) einen Pfeil, und alle Pfeile können so gewonnen werden. Es können allerdings verschiedene Wege denselben Pfeil liefern. Die zweite und die dritte Aussage folgen daraus.

2.6 Beschreibung von Systemen

Wir werden hier ausschließlich Systeme mit nur endlich vielen oder ausnahmsweise mit abzählbar vielen Objekten und mit endlich vielen oder ausnahmsweise mit abzählbar vielen fundamentalen Pfeilen betrachten. Es gibt dann auch höchstens abzählbar viele Pfeile insgesamt.

Die Problematik eines Kontinuums soll nicht Gegenstand dieser Vorlesung sein. Wenn wir kontinuierliche Räume modellieren, so werden wir sie durch Gitter mit höchstens abzählbar vielen Punkten approximieren.

Es gibt nun zwei Weisen, wie man spezielle Systeme beschreiben kann.

1. *Durch explizite Beschreibung*

Man gibt eine Liste von Symbolen, die die Objekte vorstellen, und eine Liste von Symbolen, die die Pfeile vorstellen. Zu jedem Pfeil werden die Symbole seiner Quelle und seines Ziels, sowie seines Adjungierten angegeben. Darüber hinaus werden die fundamentalen Pfeile als solche markiert. Ausserdem muß man für jedes Paar von Pfeilen das Symbol des aus ihnen zusammengesetzten Pfeils angeben, wann immer das Ziel des ersten Pfeils gleich der Quelle des zweiten Pfeils ist.

2. *Durch Angabe der fundamentalen Pfeile und Äquivalenzrelationen zwischen Pfeilen*

Hier gibt man eine Liste der Objekte und eine Liste der fundamentalen Pfeile sowie deren Quelle und Ziel an. Ausserdem muß man dann noch festlegen, welche Wege den selben Pfeil definieren. Dies kann häufig durch Angabe eines erzeugenden Satzes von Äquivalenzen zwischen Wegen geschehen, aus denen dann alle andern folgen. Solche

Folgerungen gibt es deshalb, weil mit $g = f$ auch $g \circ h = f \circ h$ und $h' \circ g = h' \circ f$ gelten muß.

Im folgenden sollen diese beiden Möglichkeiten durch zwei Beispiele illustriert werden.

2.7 Zwei spezielle Systeme als Beispiel

Es gibt einige Systeme, die ganz besonders wichtig sind. Ich bezeichne sie als Archetypen. Sie treten in der Theorie der Bedeutung auf, und unterscheiden verschiedene Arten der Bedeutung. Das folgende Beispiel wird bei der Betrachtung der Logik aus systemtheoretischer Sicht eine wichtige Rolle spielen.

Logischer Archetyp Ein System mit zwei Objekten T (**true**) and F (**false**), und fundamentalen Pfeilen $e : T \mapsto F$, $e^* : F \mapsto T$, $o : F \mapsto F$.

Die Zusammensetzungsregel ist

$$e \circ e^* = \iota_F, \quad (2.3)$$

$$e^* \circ e = \iota_T, \quad (2.4)$$

$$o \circ o = o = o^*, \quad (2.5)$$

$$o \circ e = e, \quad (2.6)$$

$$e^* \circ o = e^*. \quad (2.7)$$

Adjungierte sind durch den Stern $*$ gekennzeichnet.

System der natürlichen Zahlen Wir betrachten die natürlichen Zahlen als Objekte eines Systems mit einem ausgezeichneten Objekt 0.

Die traditionellen Axiome für natürliche Zahlen sagen aus, daß jedes Objekt einen eindeutig bestimmten Nachfolger hat, und jedes Objekt außer 0 ist Nachfolger eines Objekts. Der Nachfolger von X wird als $X + 1$ interpretiert.

Dementsprechend führen wir für jedes Objekt X eine fundamentale Beziehungen mit Ziel X ein, deren Quelle der Nachfolger von X ist. Jedes Objekt außer dem ausgezeichneten Objekt 0 kommt als Quelle einer solchen Beziehung vor. Die Objekte und fundamentalen Beziehungen sehen also wie folgt aus

$$0 \leftarrow * \leftarrow * \leftarrow * \leftarrow \dots$$

Die adjungierten b^* der fundamentalen Pfeile b sind nicht fundamental. Als einzige erzeugende Äquivalenzrelation zwischen Wegen postulieren wir, daß die fundamentalen Pfeile unitär sind. Dies bedeutet *hin und zurück gibt die Identität*. In Formeln: Ist $b : X \mapsto Y$ so gilt

$$b \circ b^* = \iota_Y \tag{2.8}$$

$$b^* \circ b = \iota_X \tag{2.9}$$

$$\tag{2.10}$$

Entsprechende Gleichungen gelten dann auch für zusammengesetzte Beziehungen. Alle Pfeile in dem System sind eindeutig durch Quelle und Ziel bestimmt.

Die Addition von X und Y zu $X + Y$ kann als strukturelle Transformation aufgefaßt werden, die aus zwei Systemen mit ausgezeichneten Objekten X bzw Y ein neues System mit einem ausgezeichneten Objekt $X + Y$ macht. Die Systeme

$$0 \leftarrow * \leftarrow * \dots * \leftarrow X \leftarrow * \dots$$

$$0 \leftarrow * \leftarrow * \dots * \leftarrow Y \leftarrow * \dots$$

werden an den angegebenen Stellen durch Wegnehmen von Pfeilen zerschnitten,

$$0 \leftarrow * \leftarrow * \dots * \leftarrow X (\leftarrow * \dots$$

$$0) \leftarrow * \leftarrow * \dots * \leftarrow Y \leftarrow * \dots$$

und neu zusammengefügt,

$$0 \leftarrow * \leftarrow * \dots * \leftarrow X \leftarrow * \leftarrow * \dots * \leftarrow X + Y \leftarrow * \dots$$

Chapter 3

Darstellungstheorie der Bedeutung

Wir machen uns Bilder der Tatsachen.

Das Bild ist ein Modell der Wirklichkeit.

Das Bild besteht darin, daß sich seine Elemente in bestimmter Art und Weise zueinander verhalten.

Daß sich die Elemente des Bildes in bestimmter Art und Weise zu einander verhalten, stellt vor, daß sich die sachen so zueinander verhalten.

Dieser Zusammenhang der Elemente des Bildes heiße seine Struktur und ihre Möglichkeit seine Form der Abbildung.

Nach dieser Auffassung gehört also zum Bilde auch noch die abbildende Beziehung, die es zum Bild macht.

Ludwig

Wittgenstein

1

3.1 Ein Blick auf Escher's unmögliche Bilder

In diesem Abschnitt soll anhand eines Blicks auf Eschers unmögliche Bilder ein erster Eindruck von den Wechselbeziehung zwischen drei Grundbegriffen gegeben werden:

Frustration, Darstellung, Bedeutung.

¹tractatus logico-philosophicus, Sätze 2.1, 2.12, 2.14, 2.15, 2.1513

Wir wissen schon, daß Frustration auftritt, wenn es mehrere verschiedene Beziehungen zwischen zwei gegebenen Objekten gibt. Insbesondere tritt sie auf, wenn ein geschlossener Weg von einem Objekt X zu sich selbst nicht die Identität liefert.

Eine präzise Beschreibung, was eine Darstellung als solche charakterisiert wird in Kürze egegeben werden, und mit ihrer Hilfe kann auch eine präzise Begriffsbestimmung von Bedeutung gegeben werden. Dem soll aber zunächst eine informelle Diskussion des Begriffs Bedeutung vorausgeschickt werden.

Es gibt verschiedene Arten der Bedeutung. Für fast jeden Organismus ist es lebenswichtig, daß er gewissen Aspekten seiner Umgebung die Bedeutung *gut* oder *schlecht* zuordnet. Nahrung ist gut, Freßfeinde sind schlecht... . Im Laufe der Evolution werden sich Zuordnungen herausbilden, die gewissen Konsistenzbedingungen genügen. Beispielsweise könnte einem großer Schatten die Bedeutung schlecht zugewiesen werden, weil eine starke positive Korrelation mit dem Auftreten eines Fressfeinde besteht. Positive Korrelationen werden gleichartige Bedeutung begünstigen, negative Korrelationen hingegen entgegengesetzte Bedeutung. Wir können die Werte gut und schlecht als Objekte eines Systems auffassen

Betrachten wir statt beliebiger Organismen reine Mathematiker, so werden die Werte gut oder schlecht durch *wahr* und *falsch* ersetzt, denn ein reiner Mathematiker verdient seinen Lebensunterhalt, indem er gewissen Aussagen den Wert wahr zuordnet. Er darf dies aber nicht in willkürlicher Weise tun, sondern er muss die Regeln der Logik beachten. Die Werte wahr und falsch können als Objekte eines Systems, nämlich des oben eingefürten logischen Archetypen, betrachtet werden. Wir werden in Kürze sehen, daß die Regeln der Logik erfüllt sein werden, wenn wir eine Darstellung eines Systems von Aussagen finden können, deren Bild der logische Archetyp ist.

Die Existenz von Frustration kann zur Unmöglichkeit von Darstellungen führen, und damit zur Unmöglichkeit der Zuweisung von Bedeutung einer bestimmten Art. Dies kann am Beispiel der unmöglichen Bilder von Escher illustriert werden.

Die Bilder selbst sind zweidimensional, aber der Maler erweckt mit künstlerischen Mitteln den Eindruck, es handele sich um eine Darstellung von Objekten im dreidimensionalen Raum. Tatsächlich ist eine konsistente Interpretation dieser Art aber unmöglich. In den Bildern *Treppauf*, *treppab* und *Wasserfall* ist es unmöglich, Punkten des Bilds in konsistenter Weise eine Höhe über Grund zuzuordnen, obwohl dies möglich sein müßte, wenn die Punkte Bilder von Punkten im Raum wären, wie der Maler es suggeriert.

Man sieht dies daran, daß Frustration auftritt, die bei Wegen im Raum nicht vorhanden sein kann.

Im Bild *Treppauf, treppab* steigen Figuren Treppenstufen hinauf, und kommen schließlich, nachdem sie einen viereckigen Innenhof umrundet haben, an ihren Ausgangspunkt zurück. Die Treppe erweckt den Anschein einer Treppe im Raum. Wir könnten dann den Weg von Stufe zu Stufe als einen Weg aus einer Folge von Verschiebungen im Raum auffassen. Jeder geschlossene Weg müsste dann aber die Identität sein, wie wir schon am Beispiel der Ziegelsteinmauer sahen - es gibt nur eine Verschiebung, die einen Raumpunkt an den Platz eines anderen bringt. Das Bild enthält aber Information, die damit im Widerspruch ist. Jede Treppenstufe bringt eine positive Verschiebung in die Höhe. Diese addieren sich, sodaß der Rundweg insgesamt eine Verschiebung in die Höhe bewirken muß, die resultierende Verschiebung ist also von der Identität verschieden. Wir haben Frustration, die im Raum unmöglich ist.

Das Konstruktionsprinzip des Bilds *Wasserfall* ist dasselbe. Auch hier scheitert die Zuweisung von Höhe. Beim Bild *Würfel mit Bändern* ist es die Zuweisung der Bedeutung als konvex oder konkav an die Knöpfe, die scheitert. Im Bild *Belvedere* schließlich ist es die Zuweisung einer Richtung.

Die Höhe können wir als eine Art von Bedeutung auffassen; sie wäre für einen Organismus wichtig, für den potentielle Energie von Bedeutung ist - man denke an fliegende Hunde. Die Zuweisung dieser Art von Bedeutung ist in den beiden erstgenannten Bildern unmöglich.

3.2 Darstellungen

Nur dem Denken ist es eigen, ähnlich zu sein. Es ähnelt, indem es das ist, was es hört, sieht oder erkennt; es ird zu dem, was ihm die Welt darbietet *Ren/'e Margritte*

Anhand von Eschers Bildern hatte ich eine Beziehung zwischen 3 Begriffen hergestellt, die von fundamentaler Bedeutung sind.

$$\text{Frustration} \iff \text{Darstellung} \iff \text{Bedeutung} \quad (3.1)$$

Ich will das noch einmal am Beispiel des Bilds *Treppauf, treppab* ganz kurz in Erinnerung rufen.

Dieses Bild stellt vor, eine Darstellung eines dreidimensionalen Objektes zu sein. Das kann aber nicht sein, das Bild ist ein unmögliches Bild. Man sieht das daran, daß Frustration auftritt, die nicht möglich wäre, wenn man wirklich die Darstellung eines dreidimensionalen Objekts vor sich hätte.

Die Frustration besteht darin, daß es einen geschlossenen Weg aus Treppenstufen gibt der, als die Beziehung eines Punktes zu sich selbst aufgefaßt, nicht die Identität ist. Er kann nicht die Identität sein, weil die Stufen immer hinaufsteigen. Es müßte deshalb bei Durchlaufen des geschlossenen Wegs eine Höhenverschiebung stattfinden. In drei Dimensionen ist aber eine Höhenverschiebung längs eines geschlossenen Wegs nicht möglich. Frustration und Darstellung schließen sich hier gegenseitig aus.

Bisher war vom Bild als Darstellung eines dreidimensionalen Objekts die Rede. Wir können nun aber andersherum auch nach Darstellungen des Bilds suchen, die möglich sein müßten, wenn das Bild ein dreidimensionales Objekt repräsentierte. Dies sind Darstellungen, die Punkte eine Bedeutung zuweisen.

Der ganze dreidimensionale Treppengang könnte in das System der natürlichen Zahlen abgebildet werden, indem jedem Punkt seine Höhe (in Einheiten der Treppenstufenhöhe) zugeordnet wird, jeder Stufe abwärts ein fundamentaler Pfeil (in Richtung 0), und einer Stufe abwärts das adjungierte eines solchen Pfeils. Jedem Punkt des Escher-Bilds, der eindeutig einem Punkt des Raums zugeordnet ist, müßte auf diese Weise ein Punkt in \mathbf{N} zugeordnet werden.

Dies ist aber unmöglich, denn wenn man in \mathbf{N} immer längs fundamentaler Pfeile absteigt, kann man nie zum selben Punkt zurückkommen. Die Darstellung soll die Bedeutung Höhe aufzeigen; dies scheitert.

Bedeutung ist immer Bedeutung für einen Organismus oder in einer speziellen Hinsicht. Man denke hier an einen Flughund. Für diesen ist Höhe von existentieller Bedeutung.

Das Tripel (3.1) wird uns auch weiterhin interessieren. Zunächst einmal konzentrieren wir uns auf den Begriff einer Darstellung.

Bisher ist noch keine präzise Definition einer Darstellung gegeben worden. Das obige Zitat Wittgensteins versucht, eine Definition zu geben; was wir Darstellung nennen, nennt Wittgenstein Bild. Die Definition ist allerdings in einem Punkt unpräzise. Was bedeutet *so*?

Es ist hier vom Verhalten von Paaren von Dingen zueinander die Rede. Aber im einen Fall sind es Paare im Bild, im anderen sind es Paare von Dingen in der Wirklichkeit. Was es heißt, daß das eine Paar sich so verhält

wie das andere, ist hier nicht klar gesagt, hätte aber gesagt werden müssen. Die folgende präzise Definition einer Darstellung wird diesen Punkt dahingehend klären, daß die Existenz einer Beziehung mit bestimmten Eigenschaften verlangt wird.

3.2.1 Darstellung, Kognition, Erzeugung neuer fundamentaler Pfeile

Die Wichtigkeit des Begriffs einer Darstellung für die allgemeine Theorie besteht darin, daß er eine logische Möglichkeit der Erzeugung eines neuen fundamentalen Pfeils liefert. Im Laufe der zeitlichen Entwicklung eines Systems werden im allgemeinen neue fundamentale Pfeile entstehen. Tatsächlich besteht alle mögliche Dynamik darin, wenn wir nicht Wachstumsprozesse betrachten, bei denen Objekte kopiert werden. Das Verständnis des Entstehens neuer Beziehungen ist daher der Grundstein, auf dem das Verständnis von Dynamik ruhen wird.

Es ist also die Frage, wie kann man überhaupt neue fundamentale Beziehungen machen. Wie schon früher erwähnt, gibt drei Möglichkeiten:

1. Ein zusammengesetzter Pfeil wird fundamental (Katalyse, Bewegung)
2. Das Adjungierte eines fundamentalen Pfeils wird als fundamental erklärt
3. Kognition: Objekte mit passender innerer Struktur werden verbunden.

Man kann diese Möglichkeiten auch an der Lebenswirklichkeit illustrieren. Wie kann ich einen neuen Bekannten kennenlernen? Es gibt im Prinzip drei Möglichkeiten

1. Durch einen Bekannten, der ihn kennt - eine indirekte Beziehung wird direkt.
2. Ich kannte ihn nicht, aber er kennt mich, aus einem Vortrag zum Beispiel, und spricht mich an - das Adjungierte einer direkten Beziehung wird eine direkte Beziehung.
3. Gemeinsame Interessen führen uns zusammen - hier passt innere Struktur.

Im allgemeinen sind Kognitionsprozesse mehrstufig, jede Stufe besteht aus der Herstellung von Beziehungen in Form von strukturerhaltenden Abbildungen. Im allgemeinen ist das Bildsystem ganz oder teilweise vorgegebene.

3.2.2 Zur Bedeutung der Kognition

Es ist extrem wichtig, daß solche Beziehungen hergestellt werden können. Daß sie logisch definiert sind, ist wichtig für die Theorie; daß sie in der Praxis hergestellt werden können, ist wichtig für das Funktionieren der Systeme in der Natur. Dies soll näher erläutert werden.

Biologie

Das erste Beispiel ist die Mikrobiologie.

Betrachten wir Zellen, Körperzellen oder Bakterien, Organismen aus einer oder mehrerer Zellen. Zellen sind zusammengesetzte Objekte mit innerer Struktur. Sie haben einen Rand. Dieser Rand ist eine Membran. Eine solche Zelle hat in nullter Näherung keine Wechselwirkung mit der Außenwelt. Die Membran ist dazu da, das Innere der Zelle vor Einwirkungen von außen abzuschirmen, die sonst vorhanden wären. In dieser Näherung hätten wir keine Wechselwirkung mehr. Dies bewirkt eine enorme Komplexitätsreduktion. Das Innere der Zellen ist sehr komplex, es enthält sehr viele Moleküle, die unter vielerlei Einflüssen stehen. Durch die Membran kann man das, wenn man die Zelle als Ganzes betrachtet, in nullter Näherung ignorieren.

Tatsächlich ist die nullte Näherung nicht exakt richtig. Es gibt spezielle Möglichkeiten der Kommunikation zwischen Zellen durch die Membran hindurch.

Die Membran ist im Prinzip sehr einfach. Sie besteht aus einer Doppelschicht von Molekülen, die je ein wasserliebendes und ein wasserfeindliches Ende haben. Das wasserfeindliche zeigt nach innen, das wasserliebende zeigt nach außen. Aus solchen Molekülen bilden sich ganz spontan Membranen. Zellmembranen enthalten nun aber auch eingebettete Proteine; diese Proteine wirken als Rezeptoren. Sie können ganz spezielle Signale empfangen, indem Botenstoffe sich an den Rezeptoren anlagern. Dadurch wird ein gewisses Maß an Wechselwirkung wiederhergestellt.

Proteine in Zellenmembranen können auch Poren haben, dies ermöglicht Transport in die Zelle hinein und aus der Zelle heraus.

Die Zellwandproteine sind sehr selektiv. Das bedeutet, daß nur Botenstoffe angelagert werden, die genau passen. Die Botenstoffe müssen diese Rezeptoren erkennen.

Das ist eine sehr scharfe Forderung, die man Spezifität nennt. Spezifität spielt eine große Rolle in der Kommunikation zwischen Zellen.

Wenn der Botenstoff sich anlagert, kann durch das Protein im Zellinnern etwas bewirkt werden. Zellen können auch mit Hilfe spezieller Membranproteine ihren Zustand nach außen kommunizieren, indem sie Moleküle aus dem Zellinneren auf der Membranoberfläche auf Membranproteinen präsentieren.

Beispielsweise kann eine kranke Zelle, die durch ein Virus infiziert ist, dies nach außen kundgeben, indem sie Teile der Proteine des Virus nach außen bringt und dort präsentiert.

Biochemie

Das zweite Beispiel ist die Katalyse biochemische Reaktionen durch Enzyme.

Ein Beispiel einer Katalyse wurde in Figur(?) gezeigt. Es kann aber nicht nur die Bindung zweier Moleküle katalysiert werden, sondern auch der Zerfall oder die Verbringung einer funktionalen Gruppe des Moleküls von einem Ort an einen anderen. Es gibt also verschiedene Typen von solchen Enzymen. Viele sind hochspezifisch. Der Katalysator kann nicht an ein beliebiges Paar von Molekülen andocken, sondern nur an ganz spezielle. Es werden nur Reaktionen zwischen spezifischen Molekülen stattfinden. Die Steuerung der Lebensvorgänge geschieht durch Enzyme, das sind Proteine, die durch das genetische Material codiert werden. Hier spielt wieder die Spezifität eine große Rolle.

Sie spielt auch eine Rolle in der Medizin. Wenn sie Antibiotika nehmen, sollen diese nicht kurz und bündig alle Lebensvorgänge unterdrücken, einschließlich derer des kranken Organismus. Sie sollen ganz spezifisch nur auf die Krankheitserreger wirken. Wie ist das möglich? Sie unterbinden ganz spezifische biochemische Reaktionen, beispielsweise indem sie das Enzym, das dazu notwendig ist, blockieren.

Manche Medikamente blockieren Enzyme, die die Membranen zusammenbauen.

Sie können spezifisch gegen Bakterien wirken, weil Bakterien Zellen anderer Art als unsere Körperzellen sind, die einen anderen Zell-Stoffwechsel haben. Es gibt zwei sehr verschiedene Arten von Zellen. Bakterien sind Prokaryonten, unsere Körperzellen sind Eukaryonten. Es gibt in Bakterien

Enzyme, die im Menschen nicht vorkommen. Wenn man diese blockieren kann, dann kann man so diese Bakterien eliminieren, ohne dem kranken Menschen zu schaden.

Dies war schon die Idee der Sulfonamide, und im Prinzip ist es bei Antibiotika ähnlich. Man kennt den Stoffwechsel von Bakterien in vielen Details. Man kann Kandidaten von Enzymen finden, die man attackieren könnte, entweder indem man ihre Wirkung verhindert oder indem man sie zerstört. Wenn es nun möglich ist, Medikamente zu schaffen, die spezifisch gegen diese Enzyme wirken, so kann man damit Krankheiten heilen. Auf das Problem der Resistivität kommen wir noch zu sprechen.

Es gibt ein sehr schönes Beispiel für dieses Prinzip, das sind die antiviralen Drogen, die vor allem gegen HIV eingesetzt werden. Das HIV-Virus ist ein Retrovirus. Das genetische Material ist RNA, nicht DNA wie in unserem Körper. Es wird in DNA übersetzt. Dazu ist ein spezielles Enzym nötig, das es in unserem Körper nicht gibt. Dieses nennt man die reverse Transkriptase. Alle Eukaryonten haben das genetische Material als DNA und brauchen keine reverse Transkriptase.

Die Medikamente wirken gezielt gegen reverse Transkriptase, mache auch gegen Protease, ein anderes Enzym. Beide Enzyme sind dem Virus eigen, sie werden durch sein genetisches Material codiert.

Die Medikamente sind sehr erfolgreich; so erfolgreich, daß oft im Blut von HIV-Patienten keine Viren mehr festgestellt werden können. Das bedeutet nicht, daß die Patienten völlig geheilt wären, denn die Viren können sich in Gedächtnis-T-Zellen verstecken. Das ist ein bekanntes Problem, das auch bei Herpesviren auftritt. Diese verstecken sich in Ganglien.

Diese Ausführungen zeigen wie Spezifität hilft, um gezielt Medikamente zu entwickeln.

Es soll noch kurz auf das Problem der Resistenz von Bakterien gegen Antibiotika eingegangen werden. Antibiotika werden unter Umständen unwirksam, weil das Bakterium nicht mehr darauf reagiert. Bakterien erreichen das mit dem gleichen Trick, den die Mediziner anwenden, um sie zu bekämpfen. Sie erzeugen Enzyme, die das Medikament zerstören, oder den Rezeptor modifizieren, durch den das Medikament in die Zelle kommt, oder sie erzeugen Membranproteine, die das Medikament aus dem Bakterium hinauspumpen. Das ist zur Zeit ein großes Problem, das ich hier nicht vertieft diskutieren will. Ein Lösungsversuch ist natürlich, neue Antibiotika zu schaffen. Ein anderer ist es, genau gegen diese Proteine vorzugehen, die die Resistenz verursachen. Das ist wiederum eine Strategie, die auf die Spezifität baut.

Die Resistenz ist deshalb so schlimm, weil sie von gewissen Proteinen kommt, die im genetischen Material der Bakterien codiert werden. Es ist aber so, daß Gene zwischen Bakterien verschiedener Art relativ leicht ausgetauscht werden können, entweder durch Plasmide oder durch Viren. Das wußte man früher nicht.

Deshalb können Resistenzen etwa von Darmbakterien auf andere Bakterien übergehen. Die Tatsache, daß ein Bakterium gegen ein Antibiotikum resistent ist, kann schnell zur Folge haben, daß andere Bakterien es auch werden.

Dies zeigt hinreichend, wie wichtig es ist, daß man Kognitionsvorgänge modellieren kann und dann möglichst gezielt Moleküle bauen kann, die ein anderes Molekül erkennen und eventuell zerstören können.

Gesellschaft

Moderne Gesellschaften sind dadurch gekennzeichnet, daß Aufgaben von Institutionen wahrgenommen werden. Institutionen der Gesellschaft sind zusammengesetzte Objekte mit innerer Struktur im Sinne unserer Rahmentheorie. Sie können mit Zellen von Organismen verglichen werden. Insbesondere entwickeln sie sich weitgehend autonom. Die Wechselwirkung mit anderen Institutionen verläuft gewöhnlich über Rezeptoren. Beispielsweise ist der Präsident der Universität Hamburg der Rezeptor für Weisungen des Hochschulamts. Er kann aber auch Verantwortung und damit Rezeptorfunktionen delegieren. So wurde beispielsweise die Unternehmerverantwortung für die Einhaltung von Sicherheitsvorschriften an die Geschäftsführenden Direktoren der Institute delegiert.

Die Kognitionsvorgänge sind einfach. Der Präsident hat eine Adresse, und dorthin können Weisungen geschickt werden.

Linguistik

Kognition ist auch in der Linguistik wichtig.

Die Entschlüsselung der Bedeutung eines Satzes ist ein kognitiver Vorgang, der typischerweise aus mehreren Schritten besteht. Der elementare Kognitionsvorgang ist die Erkennung zueinander passender Strukturen, wobei passend in diesem Fall bedeutet, daß es eine strukturerhaltende Abbildung vom einen zum anderen oder vom anderen zum einen gibt. Dies elementaren Kognitionsvorgänge kann man in mehreren Schritten zusammenbauen. Man

kann sich vorstellen, daß mit Hilfe eines solchen elementaren Kognitionsvorgangs neue Verbindungen geschaffen werden. Dann hat man ein anderes System. Für dieses neue System mag es nun eine strukturerhaltende Abbildung zwischen Teilsystemen geben, die dann wieder benutzt werden kann, um neue Verbindungen zu schaffen usw.

Wichtig ist, daß man bei diesen elementaren Kognitionsvorgängen immer einen Teilnehmer hat, der von vorneherein ganz oder teilweise festliegt. D.h., das Problem wird immer sein, eine strukturerhaltende Abbildung in ein System, über das man schon etwas weiß, zu finden. Der präzise Begriff der Darstellung wird das berücksichtigen.

Ein Beispiel:

“Der Hund Fifi sitzt vor mir. Fifi hat einen Knochen.”

Daraus kann man schließen, daß der vor mir sitzende Hund einen Knochen hat. Durch die Benutzung desselben Symbols *Fifi* wird ausgedrückt, daß beide Sätze vom selben Objekt handeln. Man kann dann die beiden *Fifi*'s identifizieren und erhält schließlich ein einziges System, in dem einem Hund ein Name und gewisse Prädikate zugeordnet werden.

Der zweite Satz könnte auch heißen :

“Dieser Hund hat einen Knochen”

Das Wort *“dieser”* hat eine ganz spezielle Funktion. Es zeigt auf etwas, und zwar auf ein Substantiv im vorherigen Satz.

Man hat ein Objekt mit kognitiven Fähigkeiten; es kann Substantive in einem vorhergehenden Satz als solche erkennen. Auf diese Weise werden in einem Schritt der Analyse eines Texts zusätzliche Verbindungen hergestellt, Der Text wird so in ein System verwandelt, das verschieden von demjenigen ist , das durch Nachbarschaftsbeziehungen definiert ist. In vielen Sprachen ist die Wortanordnung frei. Es sind dann nicht die Nachbarschaftsbeziehungen die relevanten Beziehungen bestimmen, sondern es sind grammatische Konstrukte, Fälle, Anaphern usw., die es ermöglichen, Beziehungen durch einen kognitiven Prozess herzustellen. Instrumente, die dies bewerkstelligen, nennt man *Parser*

3.2. DARSTELLUNGEN 31

Bedeutung der Darstellungstheorie für die Quantenmechanik

1. Alle exakt lösbaren Modelle können mit Hilfe der Darstellungstheorie alleine gelöst werden.
(z.B. Harmonischer Oszillator, Wasserstoffatom, elektromagnetische Felder bei Abwesenheit von Ladungen = ∞ viele harmon Oszillatoren)
2. Die Störungstheorie benutzt Konstrukte der Darstellungstheorie
(z.B. Clebsch-Gordan Koeffizienten, Vertices und Propagatoren in Feynman-Störungstheorie)

allgemein bekannt: Lösungen Schrödingergleichung für H-Atom

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Die Y_{lm} werden von der Darstellungstheorie der Drehgruppe des Raums geliefert. **Die Struktur des Raums drückt sich der Beschreibung der Materie auf**

Dargestellt werden

1. Gruppen von Symmetrietransformationen
2. Lie Algebren von infinitesimalen Symmetrietransformationen
3. assoziative Algebren von Operatoren (Observablen)

Physik

Das letzte Gebiet ist schließlich die Physik, speziell die Quantenmechanik. Ich sagte schon, daß allgemeine kognitive Prozesse im wesentlichen aus Erkennung von Darstellungen zusammengesetzt sind. Die Quantenmechanik ist zu 80 Prozent Darstellungstheorie. Im Bild (??) ist aufgelistet, worin die Bedeutung der Darstellungstheorie für die Quantenmechanik besteht.

Zunächst einmal gibt es in der Quantenmechanik eine Anzahl von lösbarer Modellen. Der harmonische Oszillator gehört dazu, das Wasserstoffatom, Atome, in denen man die Wechselwirkung zwischen den Elektronen vernachlässigt, sowie die freien Feldtheorien. Freie Feldtheorien sind im Grunde genommen nichts als unendlich viele harmonische Oszillatoren.

Alle diese Modelle können unter ausschließlicher Verwendung darstellungstheoretischer Methoden gelöst werden.

Sie kennen alle das Wasserstoffatom, und Sie wissen, daß man die Wellenfunktion der Energieeigenzustände des Wasserstoffatoms (ohne Spin) in Polarkoordinaten in faktorisierter Form schreiben kann,

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Die Y_{lm} kommen allein aus der Darstellungstheorie der Drehgruppe. Alle materiellen Objekte, einschließlich eines Wasserstoffatoms, befinden sich im Raum. Der Raum läßt Drehungen zu. Deshalb muß es möglich sein, einen Zustand eines materiellen Objekts in einen anderen gedrehten Zustand überzuführen. Die Struktur der Drehgruppe muß erhalten sein. Ob man eine Drehung nach der anderen ausführt, also auf den Zustand wirken läßt, oder ob man die Gesamtdrehung auf den Zustand wirken läßt, muß zum selben Resultat führen. Das ist die Bedingung für eine Darstellung. Es gibt verschiedene (irreduzible) Darstellungen, diese werden durch den Drehimpuls l unterschieden. Die Funktionen Y_{lm} , $m = -l, \dots, l$ sind modulo Basiswahl durch die Darstellung bestimmt. Der Betrag von Y_{lm} bestimmt die geometrische Gestalt der Ladungswolken eines Elektrons in einem Zustand mit einem gewissen Drehimpuls. Dadurch werden die Richtungen möglicher chemischer Bindungen bestimmt, und somit die geometrische Gestalt von Molekülen.

All dies kommt im Grunde aus der Struktur des Raums. Die Struktur des Raumes wirkt sich also auf die Beschreibung der Materie aus.

Tatsächlich kann das Wasserstoffatom vollständig mit darstellungstheoretischen Methoden gelöst werden. Der Hilbertraum der physikalischen

Zustände trägt eine Darstellung einer größeren Lie-Algebra, der Lie Algebra der konformen Gruppe in vier Dimensionen. Damit bekommt man auch die R_{nl} mit darstellungstheoretischen Methoden, nicht nur die Y_{lm} .

Den harmonischen Oszillator kann man allein mit Hilfe einer darstellungstheoretischen Analyse lösen. Die Lie-Algebra besteht aus dem Hamiltonoperator und den Auf- und Absteigeoperatoren.

Es werden hier also verschiedene Dinge dargestellt, und ich werde nachher sagen, wie man diese Dinge auch als Systeme auffassen kann, und wie man die Darstellungen als Darstellungen von Systemen auffassen kann.

Drehungen bilden eine Gruppe von Symmetrietransformationen. Man kann statt dessen nur die infinitesimalen Transformationen nehmen, diese werden im Fall der Drehungen von den Drehimpulsoperatoren erzeugt. Dann hat man eine Lie-Algebra. Manchmal betrachtet man auch assoziative Algebren von Observablen und stellt diese dar.

Es gibt gewisse Standardmethoden um Gruppen oder Liealgebren darzustellen. Ich erwähne das deshalb, weil man eine ähnliche Methoden für allgemeine Systeme anwenden kann.

Die erste Standardmethode ist die Methode der induzierten Darstellungen. Viele Physiker werden Sie allerdings im Laufe Ihres Studiums nie sehen. Die Methode liefert z.B. alle Funktionen der mathematischen Physik.

Die zweite Standardmethode ist die Methode der Auf- und Absteigeoperatoren, die in der Quantenmechanik-Vorlesung hinreichend trainiert wird. Physikstudenten kennen zwei Beispiele davon, das eine ist die Bestimmung der Y_{lm} durch Zerlegung der Drehimpulsalgebra in Aufsteiger, Absteiger und der z -Komponente L_z des Drehimpulses. Die zweite Anwendung ist der harmonische Oszillator, das Entsprechende zu L_z ist der Hamiltonoperator.

3.2.3 Definition einer Darstellung

Ich definiere eine Darstellung im allgemeinen systemtheoretischen Rahmen als eine strukturerhaltende Abbildung eines Systems in ein anderes System mit gewisser *a priori* gegebener Struktur. Je nach der *a priori* vorgeschriebenen Struktur des Bilds unterscheidet man verschiedene Arten der Darstellung, z.B. Ölbilder von Photos. Es kann das Bildsystem bis auf Isomorphie festgelegt sein, oder es kann sich um ein System aus einer gewissen Klasse von Systemen mit bestimmten strukturellen Eigenschaften handeln, z.B. Öl auf Leinwand.

Einige besonders wichtige Systeme, die als Bilder in speziellen Darstellungen auftreten, bezeichne ich als *Archtypen*. Der früher erwähnte logische Archetyp ist ein Beispiel. Er tritt als Bild *logischer Darstellungen* auf.

Man kann an ein Ölbild denken, das eine Landschaft darstellt. Die künstlerische Freiheit soll uns dabei jetzt nicht interessieren. Man kann auch ein farbiges Photo derselben Landschaft betrachten. Dies sind Darstellungen verschiedener Art. Beide sind strukturerhaltende Abbildungen. Die Farben sind die gleichen, wie im Urbild, und auch die Nachbarschaftsbeziehungen sind die gleichen.

Das Ölbild hat eine jedoch gewisse *a priori* Struktur, "Öl auf Leinwand", die unabhängig von dem ist, was dargestellt werden soll, und von der Struktur eines Photos verschieden.

Die Leinwand hat schon von vornherein Nachbarschaftsbeziehungen. Die Nachbarschaftsbeziehungen der im Bild dargestellten Objekte werden von den Nachbarschaftsbeziehungen auf der Leinwand ererbt. Es sind die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Punkten, die mit gewissen Punkten der Leinwand verbunden sind. Die Objekte, die zur Leinwand hinzukommen, sind Objekte mit einer gewissen inneren Struktur, nämlich Farben von bestimmter chemischer Konstituenz (Ölfarben).

Weiter unten werden wir Darstellungen von Gruppen als weiteres Beispiel kennen lernen, das ganz analog ist.

Strukturerhaltende Abbildungen von Systemen

Von einer Strukturerhaltenden Abbildung F eines Systems S in ein Bildsystem S' wird folgendes verlangt:

1. Objekte X in S werden in Objekte $F(X)$ in S' abgebildet.
2. Pfeile $f : X \mapsto Y$ in S werden in Pfeile $F(f) : F(X) \mapsto F(Y)$ abgebildet. Dabei ist das Bild der Quelle die Quelle des Bilds, und entsprechend für das Ziel von f . Es gilt
 - (a) Identität geht in Identität, $\iota_{F(X)} = F(\iota_X)$.
 - (b) Fundamentale Pfeile werden in fundamentale Pfeile abgebildet.
 - (c) Die Zusammensetzungsregel und die Regel für die Adjunktion werden respektiert,

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (3.2)$$

$$F(f^*) = F(f)^* \quad (3.3)$$

Es ist hier der Einfachheit halber dasselbe Symbol \circ sowohl für die Zusammensetzung von Pfeilen im ursprünglichen System als auch im Bildsystem benutzt worden, entsprechend für das Symbol $*$.

Es können in speziellen Darstellungen noch weitere Forderungen gestellt werden. Zwei solche Forderungen sind besonders wichtig:

- (a) Bei Systemen mit einem *ausgezeichneten Objekt* soll das Bild des ausgezeichneten Objekts das ausgezeichnete Objekt des Bilds sein.
- (b) Werden gewisse Objekte X als *zusammengesetzte Objekte* mit ausgewiesenen Konstituenten interpretiert, so sollen die Konstituenten des Bilds von X die Bilder der Konstituenten von X sein.

Das grundlegende Werkzeug in der Theorie der komplexen Systeme ist die Erkennung zusammengesetzter Objekte. Wenn man Darstellungen macht, ist es natürlich, daß man die Eigenschaft der Zusammengesetztheit in angemessener Weise im Bild wiedergeben will.

Hier noch ein Kommentar zu Wittgensteins Satz

Daß sich die Elemente des Bildes in bestimmter Art und Weise zu einander verhalten, stellt vor, daß sich die Sachen *so* zueinander verhalten.

Das Wörtchen *so* ist zunächst mysteriös, denn es handelt sich im Urbild und im Bild um verschiedene Beziehungen. Sie sind Beziehungen zwischen verschiedenen Paaren von Objekten. Die Interpretation des Worts *so* ist, daß eine Beziehung existieren muß, und daß sie bestimmte Eigenschaften haben muß, die als Eigenschaften eines Pfeils im Bildsystem Sinn machen. Diese Eigenschaften betreffen insbesondere das Resultat der Zusammensetzung mit anderen Bildpfeilen.

3.3 Beispiele von Darstellungen

3.3.1 Sortierung von Zahlen in gerade und ungerade

Mathematisch sprechen wir hier von einem

Gruppenhomomorphismus $F : \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{Z}_2$.

Die Menge \mathbf{Z} der ganzen Zahlen ist eine kommutative Gruppe (s.u.) mit Einselement 0 und Gruppenmultiplikation $+$. Ebenso ist \mathbf{Z}_2 eine solche Gruppe; sie hat zwei Elemente g und u . Dabei ist g das Einselement der Gruppe, und die Gruppenmultiplikation ist

$$g + g = g \quad (3.4)$$

$$u + g = u \quad (3.5)$$

$$u + u = g \quad (3.6)$$

Die Bedingungen an einen Gruppenhomomorphismus lauten nach Definition

$$F(0) = g \quad (3.7)$$

$$F(x + y) = F(x) + F(y). \quad (3.8)$$

Die Bedingung ist erfüllt, wenn F die geraden Zahlen in g abbildet, und die die ungeraden Zahlen in u , denn *ungerade*+*ungerade*=*gerade*, usw.

Es soll nun gezeigt werden, daß dieser Homomorphismus sich auch als Darstellung im allgemeinen systemtheoretischen Sinn ergibt.

Beide Systeme haben ein ausgezeichnetes Objekt 0 bzw g Die fundamentalen Pfeile sind wie folgt

\mathbf{Z} :

... * <-- * <-- 0 <-- * <-- * <-- ...

\mathbf{Z}_2 :

$g \iff u$

Die Pfeile sind unitär, ansonsten gibt es keine Äquivalenzrelationen zwischen Wegen. Das ausgezeichnete Objekt 0 soll in das ausgezeichnete Objekt g abgebildet werden. Die Forderung, daß fundamentale Pfeile in fundamentale Pfeile übergehen mit jeweils entsprechenden Quellen und Zielen legt die Abbildung dann schon eindeutig fest. Der fundamentale Pfeil mit Ziel 0 muß in den fundamentalen Pfeil von u nach g abgebildet werden, daher seine Quelle (der Nachfolger von 0) in u , usw. Es ist klar, daß dabei aufeinanderfolgende Zahlen abwechselnd in g und u abgebildet werden müssen, denn es gibt keine fundamentalen Pfeile von g nach g oder von u nach u . Die Identitäten gelten nicht als fundamentale Pfeile.

3.3.2 Darstellungen von Gruppen

Gruppen können als spezielle Systeme definiert werden. Sie besitzen nur ein Objekt X , die Gruppenelemente sind unitäre Pfeile $g : X \mapsto X$; das Einselement ist $e = \iota_X$. Sind nicht alle Pfeile fundamental, so nennt man die fundamentalen Pfeile *Generatoren* der Gruppe. Die Zusammensetzung \circ definiert die Gruppenmultiplikation, das Inverse von g ist g^* . Es gilt wegen der Unitarität

$$g^* \circ g = \iota_X = g \circ g^*.$$

Eine Darstellung einer Gruppe ist nach herkömmlicher Lehre ein Paar (V, τ) , wobei V ein Vektorraum ist, und τ ordnet jedem Gruppenelement g einen linearen Operator $\tau(g)$ auf V zu (d.h. eine lineare Abbildung von V nach V , derart daß

$$\tau(g \circ f) = \tau(g)\tau(f) \quad (3.9)$$

$$\tau(e) = 1 \quad (3.10)$$

1 ist die identische Abbildung von V auf V .

Wir haben hier eine Situation ganz analog wie bei einem Ölbild. Nicht jede strukturerhaltende Abbildung, d.h. nicht jeder Homomorphismus einer Gruppe in eine andere Gruppe, ist eine Darstellung. Vielmehr wird von den Bildern der Gruppenelemente (d.h. der Pfeile) gefordert, daß sie lineare Abbildungen eines Vektorraums sind. Lineare Abbildungen können nacheinander ausgeführt werden, dadurch ist eine Komposition der Bildpfeile gegeben; diese *a priori* gegebene Komposition soll als Zusammensetzungsregel im Bildsystem genommen werden.

Kurz, das Bildobjekt von X ist ein Vektorraum V , und die Pfeile sind lineare Abbildungen von V in sich mit der üblichen Komposition von Abbildungen. Im übrigen ist die Abbildung strukturerhaltend.

3.3.3 Logische Darstellungen

Auch die Logik befasst sich mit Beziehungen zwischen Objekten. Die Objekte werden als Aussagen bezeichnet. Eine logische Darstellung weist Aussagen in konsistenter Weise Wahrheitswerte T (wahr) und F (falsch) zu.

Es liegt zunächst nahe, die Beziehung "*folgt aus*" als fundamentale Beziehung zu wählen. Es ist aber viel geschickter, stattdessen die Beziehung "*schließt*

aus” als die fundamentale Beziehung zu betrachten, denn diese Beziehung hat eine Beziehung derselben Art als Adjungiertes. Aus “*A schließt B aus*” folgt “*B schließt A aus*”, denn beide Behauptungen sagen, daß *A* und *B* nicht beide wahr sein können. Wir benutzen das Symbol \nrightarrow für diese fundamentale Beziehung.

In der Logik gibt es außerdem zusammengesetzte Objekte (Aussagen). Sie werden aus gegebenen Aussagen mit Hilfe von sogenannten *Junktoren* \wedge (und), \vee (oder), \neg (nicht) gebaut. Man kann weiter den Junktor \supset durch $A \supset B = (\neg A) \vee B$ definieren.

Alle diese Junktoren können jedoch aus einem einzigen Junktor $|$ (*weder noch*) konstruiert werden,

$$\neg A = A|A, \quad (3.11)$$

$$A \wedge B = (\neg A)|(\neg B) \quad (3.12)$$

$$A \vee B = \neg(A|B) \quad (3.13)$$

$$A \supset B = \neg(\neg A|B). \quad (3.14)$$

Dementsprechend werden im folgenden die Junktoren als Abkürzungen für die eben angegebenen Konstrukte benutzt.

Die Axiome der Aussagenlogik betreffen die Zuordnung von Wahrheitswerten. Die Axiome können in verschiedener Weise formuliert werden. Insbesondere gilt

Modus ponens Wenn $X = T$ und $(X \supset Y) = T$, dann ist auch $Y = T$.

Modus tollens (Gesetz vom ausgeschloßenen Dritten)

$$A|\neg A = F$$

Frege hat einen Satz von 3 Axiomen vorgestellt. $A \implies B$ soll im folgenden bedeuten, *wenn $A = T$, dann auch $B = T$* .

Frege Axiome

$$A \implies (B \supset A) \quad (3.15)$$

$$(A \supset (B \supset C)) \implies ((A \supset B) \supset (B \supset C)) \quad (3.16)$$

$$(\neg A \supset \neg B) \implies (B \supset A) \quad (3.17)$$

Wir definieren ein *logisches System* als ein System mit Objekten X , die als Aussagen interpretiert werden, mit fundamentalen Pfeilen $\not\rightarrow$, die als *schließt aus* interpretiert werden, und einer Komposition $|$ von Objekten. Folgende Eigenschaften werden gefordert:

1. Zu jedem Paar von nicht notwendig verschiedenen Objekten A, B ist ein Objekt $A|B$ erklärt. Es hat fundamentale Beziehungen wie folgt: $A|B$ schließt sowohl A aus als auch B .
2. Jede fundamentale Beziehung hat ein fundamentales Adjungiertes; die Beziehung $A|A \mapsto A$ (und ihr Adjungiertes) sind unitär.

Eine *logische Darstellung* ist eine Darstellung L in den (früher eingeführten) logischen Archetypen, der die Zusammensetzungsregel $|$ respektiert, d.h.

$$L(A|B) = L(A)|L(B)$$

Im logischen Archetypen gilt

$$F|F = T, \quad T|F = F|T = F, \quad T|T = F. \quad (3.18)$$

Statt $L(A) = T$ schreiben wir kurz $A = T$, usw. Die Bilder T, F der Aussagen in einer logischen Darstellung nennen wir die ihnen zugeordneten Wahrheitswerte.

Es gilt das

Logische Darstellungstheorem: *In einer logischen Darstellung eines logischen Systems werden Wahrheitswerte im Einklang mit den Axiomen der Aussagenlogik zugewiesen.*

Um den Zusammenhang mit der traditionellen Aussagenlogik richtig zu verstehen, ist es nötig darauf hinzuweisen, daß wir hier zwischen der Existenz eines fundamentalen Pfeils $A \not\rightarrow B$ im logischen System und der Aussage $(A \supset \neg B)$, einem zusammengesetzten Objekt im logischen System, unterscheiden. Die Aussage des logischen Darstellungstheorems beinhaltet die folgenden Aussagen

Es sei S das darzustellende logische System.

1. Enthält S den fundamentalen Pfeil $A \not\rightarrow B$, so ist in jeder logischen Darstellung $(A \supset \neg B) = T$.
2. Werden in einer logischen Darstellung den Aussagen A und B die Wahrheitswerte w_A und w_B zugeordnet, so wird der Aussage $A|B$ der Wahrheitswert $w_A|w_B$ gemäß Gl.(3.18) zugeordnet.

3. Wird in einer logischen Darstellung der Aussage A der Wahrheitswert w_A zugewiesen, so wird der Aussage $\neg A$ der Wahrheitswert $\neg w_A = w_A|w_A$ zugewiesen.
4. Die den zusammengesetzten Aussagen zugewiesenen Wahrheitswerte genügen den Axiomen *modus ponens* und *modus tollens*.
5. Die den zusammengesetzten Aussagen zugewiesenen Wahrheitswerte gehorchen den Frege-Axiomen.

Um zu verstehen, wie die Forderung der strukturerhaltenden Abbildung die Zuordnung von Wahrheitswerten einschränkt, betrachten wir den elementaren Akt des logischen Schließens. Nehme an, es gebe in S einen fundamentalen Pfeil $A \not\rightarrow B$, den wir als *A schließt B aus* interpretieren wollen. Weiter sei $A = T$. Dann muss der Pfeil in einen fundamentalen Pfeil des logischen Archetypen abgebildet werden, dessen Quelle T ist. Es gibt aber nur einen solchen Pfeil, nämlich $e : T \mapsto F$. Sein Ziel ist F , also ist $B = F$. Daß auch die Komposition $|$ erhalten bleibt, wird benutzt um zu zeigen, daß aus $A = F, B = F$ folgt, daß $A|B = T$.

Die Existenz einer logischen Darstellung weist den Objekten des dargestellten Systems eine *logische Bedeutung* zu. Diese Objekte können dann als Aussagen interpretiert werden, denen ein Wahrheitswert zugeordnet ist. Logische Darstellungen könnten im Prinzip für ganz beliebige Systeme konstruiert werden; jedoch benötigt man die Komposition $|$, um die Axiome der Logik überhaupt formulieren zu können. Und nur die Unitarität der Beziehungen $A \not\rightarrow A|A$ stellt sicher, daß A und $A|A$ entgegengesetzte Wahrheitswerte zugewiesen werden. Es könnte sonst Darstellungen geben, in denen allen Objekten der Wahrheitswert falsch zugewiesen wird.

Es kann vorkommen, daß ein logisches System gar keine logische Darstellung hat. Dann können die durch die fundamentalen Pfeile ausgesagten Beziehungen zwischen Objekten nicht als logische Beziehungen zwischen Aussagen interpretiert werden; man sagt, sie seien widersprüchlich. Es kann auch mehrere verschiedene Darstellungen geben. Dann ist die Wahrheit gewisser Aussagen nicht entscheidbar. Physiker sind an die Existenz inäquivalenter Darstellungen der Drehgruppe gewohnt; für sie sollte die Möglichkeit der Existenz mehrerer Darstellungen keine Überraschung sein.

Gibt es in einem logischen System einen fundamentalen Pfeil $\neg(A|\neg A) \not\rightarrow \neg B$ so wird wegen des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten B in jeder logis-

chen Darstellung den Wahrheitswert T haben. Eine solche Aussage nennen wir ein *Axiom* des logischen Systems.

3.4 Konstruktion von Isomorphismen

Ein Isomorphismus F eines Systems S mit einem andern System S' ist eine strukturerhaltende Abbildung von S in S' mit der Eigenschaft, daß eine strukturerhaltende Umkehrabbildung von S' in S existiert. Ein Isomorphismus weist verschiedenen Objekten verschiedene Bildobjekte zu. Außerdem ist jedes Objekt des Bildsystems Bild eines Objekts im ursprünglichen System. Entsprechendes gilt für Pfeile

Isomorphe Systeme können nicht unterschieden werden. Es gibt keine Aussage in der Sprache der Gedanken, die sie unterscheiden könnte. Es ist daher wichtig, entscheiden zu können, wann zwei gegebene Systeme isomorph sind.

Wir schränken die Problemstellung etwas ein. Es sei angenommen, daß die Systeme zusammenhängen und ein ausgezeichnetes Objekt haben. Es werde als Wurzel bezeichnet. Außerdem soll die Zusammensetzungsregel in dem Sinne lokal überprüfbar sein, daß es genügt, die Gleichheit

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (3.19)$$

für fundamentale Pfeile f, g zu verifizieren. Schließlich sollen daß alle fundamentalen Pfeile fundamentale Adjungierte haben.

Dieses Problem kann mit der Standardmethode der Auf- und Absteiger gelöst werden, das in ähnlicher Form in der Quantenmechanik zur Konstruktion von Darstellungen von Symmetriegruppen (genauer: ihrer Lie Algebren) benutzt wird. Dies wird weiter unten besprochen. Ist keine Wurzel gegeben, so wählt man willkürlich eine Wurzel in S und muß dann alle Objekte von S' als Kandidaten für das Bild dieser Wurzel durchprobieren.

Die Systeme können in Schalen zerlegt werden. Die 0-te Schale besteht nur aus der Wurzel. Die Objekte der n -ten Schale können von der Wurzel ausgehend über einen Weg aus n fundamentalen Pfeilen erreicht werden, aber nicht mit weniger.

Aus dieser Einteilung der Objekte in Schalen ergibt sich eine Einteilung der fundamentalen Pfeile.

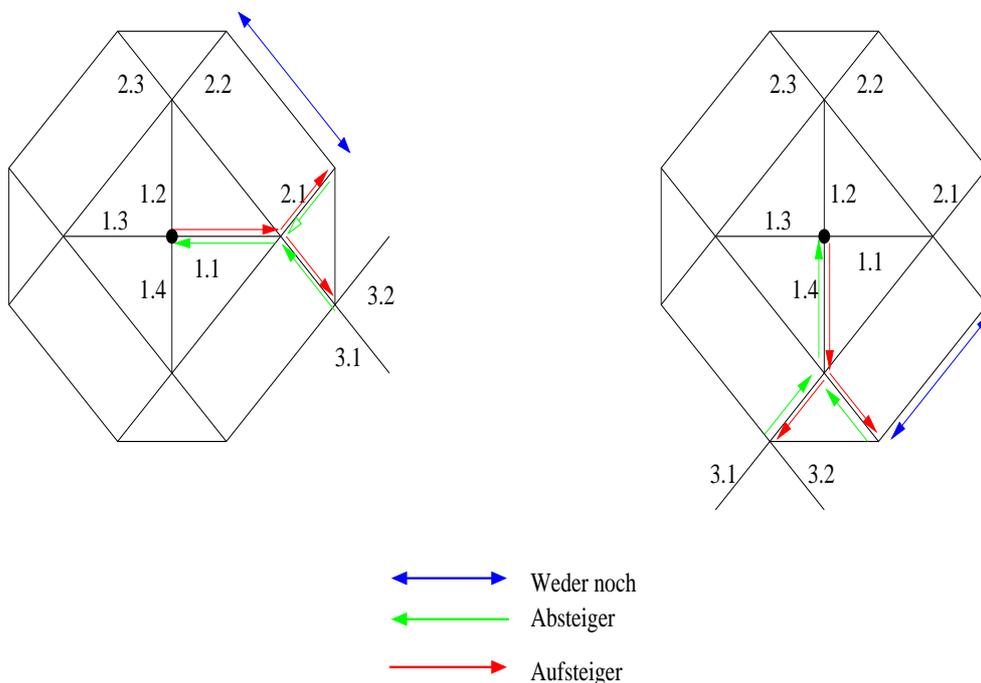
Aufsteiger: Schale $n \mapsto$ Schale $n + 1$,

Absteiger: Schale $n + 1 \mapsto$ Schale n ,

In der Schale: Schale $n \mapsto$ Schale n ,

In der Zeichnung sind einige Aufsteiger **rot**, Absteiger **grün**, und Pfeile in der Schale **blau** eingezeichnet. Die Absteiger sind den Aufsteigern als Adjungierte bijektiv zugeordnet.

Die beiden in der Zeichnung gezeigten Systeme sind isomorph. Es gibt zwei verschiedenen Isomorphismen, die sich durch Vertauschung der Zuordnung der beiden fundamentalen Pfeile zwischen zweiter und dritter Schale unterscheiden. Lassen wir diese beiden Pfeile weg, so gibt es wegen der Symmetrie des verbleibenden Systems unter Drehungen um 90° und unter Spiegelungen insgesamt 8 Isomorphismen. Daraus folgt, daß man sich bei der Konstruktion von Isomorphismen in der Regel mit Listen von Isomorphismen befassen muß



Die Konstruktion verläuft rekursiv. Sei $S^{\leq n}$ das Teilsystem, das aus allen Objekten bis zur n -ten Schale und allen fundamentalen Pfeilen zwischen allen Schalen bis zur n -ten gebaut ist. Man beginnt mit der Konstruktion einer Liste von Isomorphismen von $S^{\leq 0}$ mit $S'^{\leq 0}$. Gegeben eine Liste von

Isomorphismen von $S^{\leq n}$ mit $S'^{\leq n}$, so ist dies die gesuchte Liste, falls es keine weitere Schale gibt. Andernfalls versucht man die Isomorphismen in dieser Liste zu Isomorphismen von $S^{\leq n+1}$ mit $S'^{\leq n+1}$ zu erweitern. Dies liefert eine möglicherweise leere Liste von Isomorphismen. Ist die Liste leer, so gibt es keinen Isomorphismus und das Verfahren terminiert.

$S^{\leq 0}$ hat nur ein Objekt, die Wurzel, und jeder Isomorphismus von $S^{\leq 0}$ mit $S'^{\leq 0}$ muß Wurzel in Wurzel abbilden. Gibt es keine fundamentalen Schleifen $Wurzel \mapsto Wurzel$, so ist damit schon ein eindeutiger Isomorphismus gefunden. Gibt es k fundamentale Schleifen, so muß man die $k!$ Möglichkeiten der Zuordnung daraufhin überprüfen, ob die Zusammensetzungsregel (3.19) von den fundamentalen Schleifen erfüllt wird.

Betrachten wir nun die Erweiterungen von Isomorphismen von $S^{\leq n}$ mit $S'^{\leq n}$ auf die nächste Schale. Eine solche Erweiterung muß insbesondere einen Isomorphismus der Schale S^{n+1} mit S'^{n+1} liefern. Die Schalen haben weniger Objekte als S , daher ist dies ein kleineres Problem. Außerdem liefern die Aufsteiger Einschränkungen, welches Objekt Bild welchen Objekts sein kann. Ist der Isomorphismus der Schalen S^{n+1} mit S'^{n+1} bekannt, so ist damit schon die Zuordnung der Objekte gegeben. Gibt es nur je höchstens einen fundamentalen Pfeil mit gegebenem Ziel und gegebenere Quelle, so ist damit auch die tentative Zuordnung der Aufsteiger und ihrer Adjungierter, der Absteiger bestimmt. Andernfalls muß man mehrere Permutationen durchprobieren. Existieren die geforderten Bildpfeile nicht, so ist der Isomorphismus der Schalen nicht brauchbar. Schließlich muß man noch die Kompositionsregel (3.19) der neuen fundamentalen Pfeile, und der fundamentalen Pfeile in $S^{\leq n}$ mit den neuen Aufsteigern überprüfen. Die Zuordnung von Adjungierten zu Adjungierten wird während der Konstruktion wegen der bijektiven Korrespondenz von Auf- und Absteigern automatisch berücksichtigt.

3.5 Cartan's Theorie der Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren

Man betrachtet Gruppen von Transformationen, die aus infinitesimalen Transformationen erzeugt werden können. Sie werden als Lie Algebren bezeichnet. Den infinitesimalen Transformationen werden Elemente X einer Lie-Algebra zugeordnet. Sind die Gruppenelemente Matrizen, so sind es auch die Elemente der Lie Algebra. Umgekehrt ist jedem Element X der Lie Algebra eine

infinitesimale Transformation $g_{\epsilon X}$ zugeordnet; ϵ ist dabei ein (infinitesimal) kleiner Parameter. Man definiert den Kommutator $[X, Y]$ zweier Elemente der Lie -Algebra durch den sogenannten gruppentheoretischen Kommutator,

$$g_{\epsilon^2[X, Y]} = g_{\epsilon X} g_{\epsilon Y} g_{\epsilon X}^{-1} g_{\epsilon Y}^{-1} \quad (3.20)$$

Darstellungen der Gruppen sind Darstellungen der Lie-Algebren zugeordnet und umgekehrt. Die Darstellungsoperatoren $D(X)$ sind lineare Abbildungen eines Vektorraums. Das Darstellungsgesetz für die Gruppe übersetzt sich in die Forderung

$$D([X, Y]) = D(X)D(Y) - D(Y)D(X). \quad (3.21)$$

Cartan's Theorie liefert alle endlich dimensionalen Darstellungen sogenannter halbeinfacher Lie-Algebren. Allgemeiner gilt dies für reduktive Lie-Algebren. Statt Definitionen zu geben wird es genügen, zu bemerken, daß hierzu alle kompakten Gruppen von Symmetrien der Physik gehören, soweit sie aus infinitesimale Transformationen erzeugt werden.²

Die Kommutatoren solcher Lie Algebren können durch Bildung von komplexen Linearkombinationen in eine Standardform mit zueinander konjugierten Aufsteige- und Absteigeoperatoren plus einem Satz miteinander kommutierender Generatoren H_i , $i = 1, \dots, n$ geschrieben werden. Die letzteren entsprechen den Pfeilen in den Schalen im vorigen Anwendungsbeispiel der Methode der Auf- und Absteigeoperatoren. Sie können hier als selbstadjungiert angenommen werden ("Schleifen"). n heißt der Rang der Lie Algebra.

Die Cartan-Darstellungs Theorie ist allgemeiner anwendbar. Sie liefert alle Darstellungen von Lie-Algebren, deren Kommutatoren in die Standardform gebracht werden können, und für die die Eigenwerte der H_i nicht beliebig negativ werden können. Dies gilt auch für ∞ -dimensionale Lie Algebren. Ein sehr wichtiges Anwendungsbeispiel ist die konforme Quantenfeldtheorie in 2 Raum Zeit Dimensionen. Dort erfüllt der Energie-Impuls-Tensor die Vertauschungsrelationen einer bis auf einen freien Parameter explizit bekannten Lie-Algebra vom Rang $n = 1$. Die Eigenwerte von H_1 sind wegen der Positivität der Energie in einer speziell relativistischen Theorie

²Kompakt bedeutet, daß es keine "beliebig großen" Transformationen gibt - wendet man eine kleine Transformation immer wieder an, so kommt man schließlich in die Nähe der trivialen Transformation zurück. (Beispiel: Drehungen um 2π .) Die Lorentzgruppe ist nicht kompakt, denn es gibt beliebig grosse *boosts*.

3.5. CARTAN'S THEORIE DER DARSTELLUNGEN HALBEINFACHER LIE-ALGEBREN 45

nichtnegativ. Die Voraussetzungen für die Anwendung der Cartan-Theorie ist daher erfüllt.

In den folgenden Schaubildern ist die Standardform der Kommutatoren, der Spezialfall der aus den Drehimpulsoperatoren bestehenden Lie Algebra der Drehgruppe $SO(n)$, und die Cartan-Konstruktion einer Darstellung mit niedrigstem Gewicht Λ gezeigt. Die Auf- und Absteigeoperatoren sind durch sogenannte positiven *Wurzeln* numeriert. Das sind n -tupel von reellen Zahlen, die für die Lie Algebra charakteristisch sind. Ihr Negatives wird als *negative Wurzel* bezeichnet. Die niedrigsten Gewichte Λ sind ebenfalls n -tupel von reellen Zahlen, nämlich Eigenwerten der H_i .

Cartan's Darstellungstheorie halbeinfacher (und reductiver) Lie-Algebren

Vertauschungsrelationen

Bilde (komplexe) Linearkombinationen H_i , ($i = 1, \dots, n$),
 $E_{\pm\alpha}$ der Generatoren.

Die α heißen *positive Wurzeln*; sie sind für die Lie-Algebra
charakteristisch und sind von der Form $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,
 α_i reell.

Cartan Unteralgebra H_i , $i = 1, \dots, n$

Aufsteige-Operatoren $E_{+\alpha}$

Absteige-Operatoren $E_{-\alpha} = E_{+\alpha}^*$

Vertauschungsrelationen

$$[H_i, H_j] = 0, \quad (1)$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (2)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}, (\alpha \neq -\beta) \quad (3)$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha \equiv \sum \alpha^i H_i \quad (4)$$

$$\alpha, \beta : \pm(\text{positive Wurzeln}).$$

α^i sind aus α_i bestimmbar.

Beispiel Lie Algebra $\mathfrak{so}(3)$ der Drehgruppe

Einheiten $\hbar = 1$

Cartan Unteralgebra $\mathfrak{h} = 1$, $H_1 = L_z$

Drehung um z -Achse

Aufsteige-Operatoren $E_{+1} = L_+ = L_x + iL_y$

Absteige-Operatoren $E_{-1} = L_- = L_x - iL_y$

Vertauschungsrelationen

$$[L_z, L_+] = L_+, \quad [L_z, L_-] = -L_- \quad (1)$$

$$[L_+, L_+] = 0, \quad [L_-, L_-] = 0 \text{ (trivial)} \quad (2)$$

$$[L_+, L_-] = 2L_z \quad (3)$$

Einzigste Wurzel $\alpha = (\alpha_1 = 1)$

Darstellungstheorie

Niedrigster Gewichtsvektor v_Λ , $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$

Λ charakterisiert Darstellung eindeutig.

v_Λ ist simultaner Eigenvektor aller H_i , von Absteigern vernichtet.

$$H_i v_\Lambda = \Lambda_i v_\Lambda \quad (1)$$

$$E_{-\alpha} v_\Lambda = 0. \quad (2)$$

Verma-Modul Aufgespannt von übervollständigem Satz

von Vektoren v_ω , numeriert durch Folgen (Wege)

$\omega = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)})$; $\alpha^{(i)}$ sind positive Wurzeln.

$$E_{+\alpha} v_\omega = v_{\omega \circ \alpha}, \quad (3)$$

$$= E_{+\alpha} E_{+\alpha^{(m)}} \dots E_{+\alpha^{(1)}} v_\Lambda \quad (4)$$

$$H_i v_\omega = \lambda_i v_\omega \quad (5)$$

$$\lambda_i = \sum_a \alpha_i^{(a)} \quad (6)$$

Lineare Abhängigkeiten der v_ω wegen

Vertauschungsrelationen (4): Ordne positive Wurzeln, nur korrekt geordnete Folgen $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)})$ geben linear unabhängige Vektoren, die anderen sind berechenbare Linearkombinationen davon.

Wirkung der Absteiger $E_{-\beta}$

$$E_{-\beta}E_{+\alpha^{(1)}}\dots E_{+\alpha^{(m)}}v_{\Lambda}=?$$

Kommutiere Operatoren $E_{-\gamma}$ mittels (3) und (4) nach rechts, bis sie v_{Λ} vernichten.

Berechnung des Skalarprodukts

Wegen

$$\langle w, E_{\pm\beta}v \rangle = \langle E_{\pm\beta}^*w, v \rangle = \langle E_{\mp\beta}w, v \rangle$$

gilt

$$\langle v_{\omega'}, v_{\omega} \rangle = \langle v_{\Lambda}, E_{-\alpha^{(m)}}\dots E_{-\alpha^{(1)}}E_{\alpha^{(1)}}\dots E_{\alpha^{(m)}}v_{\Lambda} \rangle$$

und dies kann durch $\langle v_{\Lambda}, v_{\Lambda} \rangle$ ausgedrückt werden, indem man die Absteigeoperatoren nach rechts schiebt, bis sie auf v_{Λ} wirken. Terme mit evtl. übrigbleibenden Aufsteigern geben 0 weil die Aufsteiger E als Absteiger E^* auf das linke v_{Λ} wirken können, und dieses vernichten.

Chapter 4

Finanzmärkte

Dieses Kapitel ist ein Beitrag zum Thema *Frustration*. Der Begriff der Frustration wurde in Abschnitt 2.3 von Kapitel 2 definiert. In idealen Finanzmärkten ohne Gebühren äußert sich Frustration als Möglichkeit von Arbitrage Gewinnen. Das zu betrachtende System beschreibt dabei nicht nur den Finanzmarkt zu einer Zeit, sondern zu verschiedenen Zeiten (*“unter dem Gesichtspunkt der Ewigkeit”*.) Man geht davon aus, daß die Dynamik des Markts so ist, daß keine Arbitrage-Gewinne möglich sind. Das System ist also unfrustriert. Abwesenheit von Frustration ist eine Aussage über Wegunabhängigkeit, aus der man Schlußfolgerungen ziehen kann.

Solche Schlußfolgerungen sind aus der Mechanik vertraut. Aus der Wegunabhängigkeit der geleisteten Arbeit,

$$\int_{C:\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_f} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

bei Verschiebung eines Massenpunkts unter dem Einfluß der Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ längs Kurven C von \mathbf{r}_a nach \mathbf{r}_f kann man auf die Existenz eines Potentials schließen. Daraus ergibt sich die Energie und diese ist zeitunabhängig, falls die Kräfte nicht explizit zeitabhängig sind.

In der Theorie idealer Finanzmärkte folgt aus der Unmöglichkeit von Arbitragegewinnen und einigen Zusatzannahmen eine Formel für den Wert einer Option zu einer bestimmten Zeit t . Diese Formel wurde von Black und Scholes hergeleitet. Sie gilt als ein Meilenstein in der Finanzwissenschaft. Black und Scholes erhielten dafür den letztjährigen Wirtschafts-Nobelpreis.

Bevor wir hierzu kommen können, müssen einige Grundbegriffe der Finanzwissenschaft eingeführt werden.

4.1 Einige Grundbegriffe der Finanzwissenschaft

Abgezinster Wert (Barwert)

engl. *Net Present value* (NPV).

Angenommen, man erwartet zur Zeit T mit Sicherheit eine Zahlung X_T . Ist der jährliche Zinssatz für risikofreie Kredite r_F , so errechnet sich der Wert X_0 zur gegenwärtigen Zeit $t = 0$ aus

$$X_0(1 + r_F)^T = X$$

(Zeit T in Jahren). Beweis: Nehme Kredit X_0 auf, der samt Zinsen durch X getilgt wird. Dann ist X_0 jetzt verfügbar.

Durch das Abzinsungsverfahren wird eine Beziehung zwischen dem gegenwärtigen und dem zukünftigen Wert einer Zahlung hergestellt. Diese Beziehung für individuelle Zeitintervalle ist eine der fundamentalen Beziehungen in Finanzmärkten unter dem Gesichtspunkt der Ewigkeit.

Finanztitel

Man unterscheidet folgende Typen von Wertpapieren.

1. Aktien (stocks)
2. festverzinsliche Wertpapiere, insbes. Anleihen (bonds)
3. Derivate
 - (a) forwards
 - (b) futures
 - (c) swaps
 - (d) Optionen

Aktienkurse sollten den fundamentalen Wert einer Firma darstellen, d.h. den abgezinsten Wert aller erwarteten zukünftigen Dividendenzahlungen.

Forwards, Futures, Swaps

sind Vereinbarungen, daß der Käufer des Derivats eine bestimmte Menge eines bestimmten Guts zu einem im voraus festgelegten Preis zu einem bestimmten Zeitpunkt erwirbt bzw veräußert.

Futures : an Börsen gehandelt

Forwards : privat gehandelt

Swaps : abgepackte Kombination von forwards.

Optionen: berechtigen den Käufer der Option, eine bestimmte Menge eines bestimmten Guts zu einem im voraus festgelegten Preis innerhalb einer bestimmten Frist (amerikanische Option) oder zu einem bestimmten Zeitpunkt (europäische Option) zu erwerben (Kaufoption CALL) bzw zu veräußern (Verkaufsoption PUT). Er ist dazu jedoch nicht verpflichtet

Grundidee der Derivate: Kaufe bzw. verkaufe Risiko eines Guts, ohne das Gut zu kaufen oder zu verkaufen.

Optionen: Bedingter Kauf bzw. Verkauf von Risiko. Man hat das Recht, die Option auszuüben oder nicht.

Diese Instrumente machen es möglich, sich gegen Risiken abzusichern. Wichtig für Firmen!

Risiko

Risiko liegt in unvorhersehbarer Wertentwicklung, z.B.

- Zinssätze für Kredite
- Aktienkurse
- Wertpapierpreise
- Umtauschkurs von Währungen
- Preise von Handelsgütern
- und vieles mehr

Beispiel: Ein **Verbraucher von Kupfer** verliert, wenn der Kupferpreis steigt. Ein **Produzent von Kupfer** gewinnt. Sinkt der Preis, so ist es umgekehrt.

Ein *forward* Kauf von Kupfer durch den Verbraucher und ein *forward* Verkauf durch den Produzenten kann beide vor dem Risiko der Preisentwicklung schützen, der Produzent sichert dadurch Einnahmen in voraussehbarer Höhe, der Verbraucher die Verfügbarkeit des Guts zu einem voraussehbaren Preis. “*They hedge their price risk*”

Aber: Es gibt nicht immer ein ausgeglichenes Angebot in beiden Richtungen. Paradoxerweise sind es dann die Spekulanten, die einspringen, und ein größeres Maß an Risikoverteilung ermöglichen

Verschiedene Investoren sind verschieden empfindlich gegen Risiken (z.B. Alterssicherung: Risiko "entweder gar nichts oder das Doppelte" ist untragbar. Auch Kredite werden teuer bei hohem Risiko, daß man zahlungsunfähig wird)

Forwards, futures und Optionen erlauben den Transfer von nicht diversifizierbarem Risiko von risikoscheueren Marktteilnehmern und von denen, für die Risiko untragbar ist, auf die, die es tragen können.

4.2 Risiko und Kursentwicklung von Aktien

Über hinreichend lange Zeitspannen gemittelt, ist die reale Rendite von Aktien deutlich höher (um ca 3- 4%) als die von festverzinslichen Wertpapieren. Nach herrschender Meinung wird dies durch das höhere Risiko von Aktien erklärt. Wenn ein Anleger bei gleicher erwarteter Rendite die Wahl zwischen einer risikofreien und einer risikobehafteten Anlage hat, wird er sich für die erstere entscheiden. Daher müssen risikobehaftete Wertpapiere wie Aktien eine höhere Rendite bringen, um konkurrenzfähig zu sein. Es ist allerdings nicht wirklich wahr, daß festverzinsliche Wertpapiere risikofrei sind. Ihre reale Rendite hängt nämlich von der Inflationsrate ab.

In der ersten der beiden folgenden Tabellen ist das langfristige Mittel der jährlichen realen Rendite von Aktien (stocks) und festverzinslichen Wertpapieren (bonds) in USA und Großbritannien seit 1802 angegeben. "Real" bedeutet nach Korrektur für Geldentwertung.

Das Resultat für Aktien ist verblüffend. Die langfristigen Mittelwerte der realen Rendite sind seit 1802 fast konstant geblieben.

Kurzfristig gibt es aber erhebliche Schwankungen. In der zweiten Tabelle ist die jährliche reale Rendite von Aktien in einigen Industrieländern (USA, Japan, Deutschland, Frankreich, Großbritannien) zwischen 1960-96 aufgetragen. Man sieht, daß die reale Rendite in einigen Fällen sogar zeitweise negativ geworden ist. Nach 1995 sind die Börsenwerte der 30 wichtigsten Aktien hingegen dramatisch gestiegen - seit 1991 insgesamt nominal auf mehr als das 2.5-fache - vgl. kürzliche Daten im SPIEGEL. Bei der detaillierteren Betrachtung der Kursentwicklung fällt auf, daß Aktienkurse eine Tendenz zu haben scheinen, bei Abweichungen von der Extrapolation des langjährigen

	1802-1996	1802-1871	1871-1925	1926-1996
stocks	6.9	7.0	6.6	6.9
bonds	3.4	4.8	3.7	1.9

Table 4.1: Langfristige Mittelwerte der realen Rendite für stocks und bonds seit 1802

	USA	Japan	D	F	GB
1960-96	4.53	4.76	3.51	2.18	4.25
1960-69	2.11	1.56	2.55	-3.49	0.38
1970-79	-2.58	3.39	-2.63	-2.20	-3.49
1980-89	11.45	19.46	12.99	14.08	15.21
1990-96	9.87	-9.37	0.60	0.63	6.92

Table 4.2: Reale Rendite von Aktien in einigen Industrienationen 1960-96

Mittels zu diesem zurückzukehren. (*mean reversion*). Wie man auch aus dem folgenden Zitat eines führenden Bankers zur Asien-Finanzkrise sieht, haben Anleger eine Neigung, Aktien als *unterbewertet* oder *überbewertet* einzustufen. Dabei spielt möglicherweise die Extrapolation der langjährigen mittleren Entwicklung eine Rolle. Diese Thema wird kontrovers diskutiert. Wir kommen darauf zurück, wenn wir diskutieren, was gegeben sein muß, um einen Zustand zu einer Zeit festzulegen. *Mean reversion* steht im Widerspruch zur sogenannten *efficient market hypothesis*, die besagt, daß alle zugängliche Information in den gegenwärtigen Aktienkursen ausgedrückt ist; insbesondere soll es also keine Gedächtniseffekte geben.

Asien-Finanzkrise seit 1997

In weiten Teilen Asiens sehen wir seit Sommer 1997, wie sich der *massive Abzug ausländischen Kapitals* auf Investitionen, Produktion und Wachstum auswirkt. Verschiedene politische und strukturelle Faktoren haben die Anleger veranlaßt *auf eine bevorstehende Währungsabwertung* - zuerst in Thailand, dann auch in anderen südostasiatischen Tigerstaaten - zu schliessen. Als dann die massive Überbewertung von Immobilien- und Wertpapieranlagen voll zutage trat, kam es dementsprechend zu hohen Kursverlusten und Währungsverfall. *M. Kohlhaussen* (Präsident Verband dt. Banken)

4.3 Ideale Finanzmärkte als unfrustrierte Systeme

Die Agenzien eines Finanzmarkts halten ihre Kapitalanlagen in “*Portefeuilles*”. Diese Portefeuilles bestehen aus Bargeld einer bestimmten Währung und Finanztiteln - Aktien, Derivate, Kredite, Fremdwährungen... . Jeder Bestandteil kann in positiven oder negativen Mengen vorhanden sein, Kredite können aufgenommen oder vergeben werden, Aktien im Besitz oder geschuldet sein, usw.

Jedes Portefeuille kann aus *reinen Portefeuilles* zusammengesetzt gedacht werden, die nur Papiere von einem Typ (entweder Bargeld oder nur Finanztitel einer Sorte) enthalten. Der Typ des Papiers des reinen Portefeuilles A werde mit $[A]$ bezeichnet.

Finanzmarkt zu einer Zeit

Wir betrachten nun zunächst einen Finanzmarkt zu einer Zeit als ein System.

Die Objekte dieses Systems sind Portefeuilles. Zwischen den Objekten bestehen Beziehungen, die die Umtauschmöglichkeiten, darunter insbesondere Kauf und Verkauf gegen Bargeld, regieren. Die Beziehungen zwischen allgemeinen Portefeuilles ergeben sich aus den Beziehungen zwischen den reinen Portefeuilles, aus denen sie zusammengesetzt sind. Die Beziehungen zwischen den reinen Portefeuilles sind Umrechnungskurse, im Fall des Umtauschs aus Bargeld werden sie Preise genannt. Ich benutze denselben Buchstaben für den Umrechnungskurs als Zahl und die dadurch gegebene Beziehung. Ein Umrechnungskurs $r_{BA} : A \mapsto B$ ermöglicht Transaktionen, bei denen $n_B = r_{BA}n_A$ Einheiten des Papiers $[B]$ gegen Hergabe von n_A Einheiten des Papiers $[A]$ erworben werden. Solche Transaktionen können nacheinander ausgeführt werden. Mit dem Umrechnungskurs $r_{CB} : B \mapsto C$ ergibt sich eine mittelbare Beziehung $r : A \mapsto C$, die es erlaubt, durch sukzessiven Umtausch von $[A]$ in $[B]$ und von $[B]$ in $[C]$ $n_C = rn_A = r_{CB}r_{BA}n_A$ Einheiten von C gegen Hergabe von n_A Einheiten von $[A]$.

In einem *idealen* Finanzmarkt ist mit jeder Transaktion $r_{BA} =: A \mapsto B$ auch die umgekehrte Transaktion $r_{AB} = r_{BA}^* : B \mapsto A$ zum Umrechnungskurs $r_{AB} = 1/r_{BA}$ möglich. Führt man beide Transaktionen hintereinander aus, so ist das Resultat die triviale Transaktion - man bekommt wieder n_A Einheiten von $[A]$ zurück. Die Beziehungen sind also *unitär*,

$$\text{hin} \circ \text{zurück} = \text{Identität}.$$

In realen Finanzmärkten ist dies nicht exakt richtig, denn für Käufe und Verkäufe werden Gebühren erhoben. In idealen Finanzmärkten gibt es keine Gebühren.

In einem idealen Finanzmarkt sind *Leerverkäufe* in unbeschränkter Höhe erlaubt, d.h. man kann Papiere verkaufen, die man nicht besitzt. Ein solcher Verkauf bedeutet, daß man eine Verpflichtung zur Lieferung eingeht. Entsprechendes gibt es bei Wirtschaftsgütern, und es macht auch guten Sinn. Man kann 100 000 Eier verkaufen, zu liefern innert eines Jahres zu einem vom Kunden zu bestimmenden Zeitpunkt, mit der Maßgabe, daß die Eier zum Zeitpunkt der Lieferung frisch sind. Es würde nichts nützen, die Eier bei Vertragsabschluß zu besitzen, denn sie bleiben nicht frisch. Solche Verkäufe sind Transaktionen mit Derivaten analog: Man handelt mit dem Risiko des Preises frischer Eier zum Zeitpunkt der Lieferung.

Es soll nun gezeigt werden, daß ein idealer Finanzmarkt zu einer Zeit unfrustriert sein muß. Dies bedeutet, daß zusammengesetzte Transaktionen

$$A \mapsto B_1 \mapsto B_2 \mapsto \dots \mapsto B_n \mapsto C$$

zum selben Umrechnungskurs von $[A]$ nach $[C]$ führen, unabhängig vom Weg, d.h. von den Zwischenstationen B_1, \dots, B_n . Dies ist äquivalent zu der Aussage, daß jede zusammengesetzte Beziehung $A \mapsto A$ die Identität ist, denn wegen der Unitarität kann zu zwei gegebenen Beziehungen $r_1 : A \mapsto B$ und $r_2 : A \mapsto B$ die Beziehung $r = r_2^* \circ r_1 : A \mapsto A$ konstruiert werden, und diese ist genau dann die Identität, wenn die Umrechnungsrate $r_1 = r_2$.

Die Unfrustriertheit gilt, weil es sonst zusammengesetzte Transaktion der Form

$$A = n_A[A] \mapsto B_1 \mapsto B_2 \mapsto \dots \mapsto B_n \mapsto A' = n'_A[A]$$

gibt, die zu einem Gewinn $n'_A/n_A > 1$ führen. (Wir nehmen an, daß Papier $[A]$ einen positiven Preis hat). Denn ist $n_A/n'_A \neq 1$, so führt entweder die Transaktion selbst zu einem Gewinn, oder die umgekehrte Transaktion. Solche Gewinne nennt man *Arbitrage Gewinne*. Man geht davon aus, daß die Umtauschraten sich stets so einstellen, daß Arbitrage Gewinne unmöglich sind. Arbitrage-Möglichkeiten würden Frustration bedeuten, vgl. die Tabelle 2.1.

Wegen der Unfrustriertheit lassen sich beliebige Umrechnungsrate aus Preisen berechnen, d.h. aus den Umrechnungsrate in Geld, denn wegen der

Wegunabhängigkeit kann man den direkten Umtausch durch Zusammensetzung von Kauf und Verkauf gegen Geld ersetzen. Wir können die Preise als die fundamentalen Pfeile im System auffassen, alle andern Pfeile lassen sich daraus zusammensetzen.

Damit wird jedem Papier ein *Barwert* zugeordnet - sein Preis. Dies ist ein Beispiel der Zuordnung von Bedeutung.

Finanzmärkte unter dem Gesichtspunkt der Ewigkeit

Ein Grundidee der Finanzwissenschaft ist, daß auch eine mit Sicherheit zu erwartende Zahlung X zur Zeit $T > 0$ in der Zukunft einen wohldefinierten Wert zur Zeit $t = 0$ (jetzt) hat. Dies ist der oben eingeführte *abgezinste Wert*. Entsprechend werden dann auch zukünftige Wertpapiere einen Barwert haben. Mit Barwert meint man den jetzigen Wert in Geld. Die unten zu besprechende Black Scholes Gleichung löst das Problem, den jetzigen Preis von Optionen mit Verfallsdatum T zu berechnen.

Es gibt also Beziehungen zwischen Portefeuilles jetzt und in der Zukunft. Wir betrachten diese als Pfeile in einem System - dem Finanzmarkt unter dem Gesichtspunkt der Ewigkeit.

Dieses System hat als Objekte Portefeuilles zu beliebigen Zeiten t . Wir nehmen an, daß die Transaktionen zu diskreten Zeiten stattfinden, $t = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Das System enthält Untersysteme S_t , die Finanzmärkte zu einer Zeit darstellen, und zusätzlich Beziehungen zwischen Portefeuille zu verschiedenen Zeiten. Die zusätzlichen fundamentalen Beziehungen verbinden ein Portefeuille zur Zeit t mit einem Portefeuille zur Zeit $t + \tau$, und umgekehrt.

Eine der zusätzliche Beziehungen zwischen Zeit T und jetzt kennen wir bereits. Es ist die Zuordnung des abgezinsten Werts

$$C_0 = (1 + r_\tau)^{-T} C_T$$

einer Zahlung von C_T Einheiten der Währung zur Zeit T . Dabei ist r_τ der Zinssatz für risikolose Kredite pro Zeitintervall (Verzinsungsperiode) τ .

4.4 Preis von Optionen nach Black und Scholes

Wir betrachten jetzt den Barwert C_0 einer europäischen Kaufoption. Sie berechtigt zum Kauf einer Aktie zum Verfallszeitpunkt T zum Preis X . Man bezeichnet X als den *Basispreis* der Option. Der jetzige Preis einer Aktie (derzeitiger Kurs) sei S_0 . Der zukünftige Kurs S_T ist zur Zeit 0 nicht bekannt. Der Preis der Option wird vom Maß der Unsicherheit abhängen, d.h. von den zu erwarteten Schwankungen. Man bezeichnet dies als *Volatilität*.

Zwei Zustand Ein Perioden Fall

Wir betrachten zunächst ein vereinfachtes Modell. Wir denken ununs, daß Transaktionen periodisch zu bestimmten Zeiten $t = n\tau$ stattfinden. Wir betrachten die Entwicklung während einer Periode $T = \tau$. Der Basispreis sei $X = 105$ und der jetzige Aktienkurs sei $S_0 = 100$. Der risikolose Zinssatz für Periode τ sei 2%.

Es werde erwartet, daß mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p die Aktie auf Kurs $S_\tau^+ = 110$ zur Zeit τ klettere, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf den Kurs $S_\tau^- = 90$ sinke. Man bezeichnet die beiden Möglichkeiten als zwei Zustände z^+ und z^- die der Aktienkurs zur Zeit τ annehmen kann.

Der Preis der Option wird aus der Forderung berechnet, daß kein sicherer Arbitragegewinn möglich ist. Die Wahrscheinlichkeiten p werden in das Resultat nicht eingehen, jedoch ist $p \neq 0, 1$ implizit vorausgesetzt.

Ein sicherer Arbitragegewinn wäre dann realisierbar, wenn man aus Aktien, Optionen und Krediten eine Portfeuille mit Barwert 0 zusammenstellen könnte, dessen Umtausch in Währung zur Zeit τ mit Sicherheit einen gewissen positiven Gesamterlös bringt. Auch wenn der sichere Gesamterlös negativ wäre, könnte durch die umgekehrten Transaktionen ein Gewinn erzielt werden. Dabei wird Kreditvergabe durch Kreditaufnahme ersetzt, Kauf einer Aktie wird durch Verkauf ersetzt, usw.. Es sei daran erinnert, daß in einem idealen Finanzmarkt Leerverkäufe möglich sind - alles kann verkauft werden, gleichgültig ob man es besitzt oder nicht.

Die Grundidee der Betrachtung ist

1. Zur Zeit T läßt sich der Wert C_T der Option aus dem Aktienkurs S_T berechnen. Ist $S_T > X$, so wird die Option ausgeübt, um zum Preis X eine Aktie vom aktuellen Wert S_T zu kaufen. Die Option ist daher

$S_T - X$ wert. Ist dagegen $S_T \leq X$ so wird die Option nicht ausgeübt, und ihr Wert ist 0. Also

$$C_T = \max\{S_T - X, 0\} \quad (4.1)$$

Im Beispiel ergibt sich der Wert C_τ^+ bei Aktienkurs S_τ^+ zu $C_\tau^+ = 5$. Die Gültigkeit von Gl.(4.1) ist nicht auf den Einperiodenfall $T = \tau$ beschränkt.

2. Man kann mit Hilfe von Optionen ein Portefeuille mit Barwert 0 zur Zeit $t = 0$ so zusammenstellen, daß die Entwicklung seines Werts von der tatsächlichen Entwicklung des Aktienkurses unabhängig ist. In unserem vereinfachten Modelle heißt das, daß der Wert unabhängig davon ist, ob zur Zeit τ der Aktienkurs S_τ^+ oder S_τ^- sein wird. Die Zusammenstellung eines solchen Portefeuille nennt man *hedge*.¹

Der Wert eines solchen Portefeuilles zur Zeit τ ist berechenbar, da er nicht davon abhängt, welcher der möglichen Kurse eintritt. Er hängt allerdings von den *möglichen* Kursen ab, dies ist die erwartete Abhängigkeit vom Maß der Unsicherheit.

Ist der berechenbare Wert eines solchen *hedge*-Portefeuille, positive, so ist ein Arbitragegewinn möglich. Da mit jeder Transaktion auch die umgekehrte Transaktion möglich ist, und weil die Umkehrung Gewinn und Verlust vertauscht, so ist auch dann ein Arbitrage-Gewinn möglich, wenn der Erlös negativ ist.

Der korrekte Preis der Option muß daher die Forderung erfüllen, daß der Wert des *hedge*-Portefeuille zur Zeit τ (und deshalb zu allen Zeiten $0, \tau$) Null ist. Ein solches Portfeuille bezeichnet man als *self financing strategy* Dies genügt tatsächlich, um den Optionspreis eindeutig zu bestimmen. Dies ist die Grundidee der Entdeckung von Black und Scholes, für die sie im letzten Jahr mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurden.

Ein *hedge*-Portefeuille eliminiert das Risiko unvorhersehbarer Kursentwicklung. Dies zeigt exemplarisch, wie Derivate benutzt werden können, um Risiken zu eliminieren.

Es soll jetzt zunächst an zwei Fällen illustriert werden, wie ein Arbitragegewinn realisiert wird, wenn der Preis der Option von einem "korrekten Preis", hier $C_0 = 2.94$, verschieden ist.

¹Ein deutscher Ausdruck scheint nicht eingeführt zu sein

Angenommen der Preis sei $C_0 = 4$. Es wird durch Kauf einer Aktie, Verkauf von $H = 4$ Optionen und Aufnahme eines Kredits ein Portefeuille vom Wert 0 zur Zeit 0 zusammengestellt. Im Finanz-Jargon sagt man, der Anleger sei durch den Verkauf der Aktie *short* Aktie, und durch den Kauf der Optionen sei er *long* Option. Die Bezeichnung zeigt an, daß er durch ein Sinken des Aktienpreises und durch ein Steigen des Optionspreises gewinnen würde. Zur Zeit T wird die Aktie wieder verkauft, die Optionen werden wieder aufgekauft, und der Kredit wird samt 2% Zins wieder zurückgezahlt.

Ist der Preis der Option zur Zeit $t = 0$ hingegen zu niedrig, sagen wir $C_0 = 2$, so wird ein sicherer Arbitragegewinn durch Transaktionen der umgekehrten Richtung realisiert. Einzig der korrekte Wert $C_0 = 2.94$ ermöglicht keinen Arbitrage-Gewinn.

Der Barwert des Portefeuille errechnet sich aus dem Kassenfluß. Er sieht in den drei Beispielfällen zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit τ je nach Zustand z^\pm wie in der untenstehenden Tabelle aus.

Wir stellen nun die Bedingungen für eine *self financing strategy* auf. Es werde zur Zeit $t = 0$ eine Aktie zum Preis S_0 gekauft, sowie H Optionen zum Preis C_0 verkauft und ein Kredit V_0 aufgenommen. Der gesamte Wert soll 0 sein. Also

$$-S_0 + HC_0 + V_0 = 0. \quad (4.2)$$

Zur Zeit τ wird die Aktie wieder verkauft, je nach Zustand zum Preis S_τ^+ bzw. S_τ^- , und die H Optionen werden zum Preis von je C_τ^+ bzw. C_τ^- wieder verkauft. Der Kredit samt Verzinsung $V_\tau = V_0(1 + r_\tau)$ wird zurückgezahlt. Der Kassenflußmuß sich in jedem der beiden Zustände zu 0 addieren. Also

$$S_\tau^+ - HC_\tau^+ - V_0(1 + r_\tau) = 0 \quad (4.3)$$

$$S_\tau^- - HC_\tau^- - V_0(1 + r_\tau) = 0. \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

Die möglichen Preise S_τ^\pm sind als bekannt vorausgesetzt, ebenso sind die Optionspreise C_τ^\pm zur Zeit τ bekannt. Wir haben also drei Gleichungen mit drei Unbekannten C_0 , V_0 und H . Die Gleichungen sind wegen der S -Terme inhomogen. Man bezeichnet

$$h = H^{-1}$$

als das *hedge*-Verhältnis. Durch Gleichsetzen der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen ergibt es sich als

$$h \equiv \frac{1}{H} = \frac{C_\tau^+ - C_\tau^-}{S_\tau^+ - S_\tau^-}. \quad (4.6)$$

<i>Transaktion Zustand</i>	<i>Zeit 0</i>	<i>Zeit τ</i>	
		z^+	z^-
Aktie (long)	-100	-110.00	-90.00
4 Optionen (short)	+16	+20.00	0
Kreditaufnahme	+84	-85.68	-85.68
<i>Barwert</i>	0	4.32	4.32

Table 4.3: Realisierung eines sicheren Arbitragegewinns von 4.32 beim Optionspreis 4.00

<i>Transaktion Zustand</i>	<i>Zeit 0</i>	<i>Zeit τ</i>	
		z^+	z^-
Aktie (short)	+100	-110.00	-90.00
4 Optionen (long)	-8	+20.00	0
Kreditvergabe	-92	93.84	93.84
<i>Barwert</i>	0	3.84	3.84

Table 4.4: Realisierung eines sicheren Arbitragegewinns von 3.84 beim Optionspreis 2.00

<i>Transaktion Zustand</i>	<i>Zeit 0</i>	<i>Zeit τ</i>	
		z^+	z^-
Aktie (long)	+100.00	-110.00	-90.00
4 Optionen (short)	11.76	+20.00	0
Kreditaufnahme	88.24	-90.00	-90.00
<i>Barwert</i>	0.00	0.00	0.00

Table 4.5: Realisierung einer *Self financing strategy* beim Optionspreis 2.94

Aus der ersten Gleichung bekommt man $V_0 = S_0 - HC_0$, und damit aus der letzten Gleichung schließlich das Ergebnis

$$C_0 = h \left(S_0 - \frac{S_\tau^- - HC_\tau^-}{(1 + r_\tau)} \right). \quad (4.7)$$

Beim Ausmultiplizieren kürzt sich $hH = 1$ im letzten Term.

Im Beispiel ergibt sich $H = 4$ und $C_0 = 2.94$.

Das Resultat ist unabhängig von der Wahrscheinlichkeit $p, 1 - p$ mit der die Zustände z^\pm angenommen werden. Dies wird beim Leser Verdacht erwecken. Was ist, wenn $p = 0$, oder $p = 1$? Im ersteren Fall ist der Aktienkurs S_T mit Sicherheit gleich $S_T^- < X$; die Option ist somit wertlos - im scheinbaren Widerspruch zu unserem Resultat. Entsprechend ist im andern Fall der Wert der Option $C_0 = 5$.

Das Scheinparadoxon wird durch die Beobachtung aufgelöst, daß im Falle $p = 0$ die Gleichung (4.3) nicht aus dem Postulat der *self financing strategy* folgt, weil sie einen Fall annimmt, der gar nicht eintreten kann. Entsprechend ist bei $p = 1$ die Gleichung (4.4) nicht gültig.

Im Hinblick auf die Verallgemeinerung führen wir anstelle der absoluten Preise S_τ^\pm die Renditen

$$k^\pm = \frac{S_\tau^\pm - S_0}{S_0}$$

bei Auf bzw. Abwärtsbewegung ein.

Mehrperiodenfall

Der Fall mehrerer Perioden wird durch Rekursion auf den Fall einer Periode zurückgeführt. Black und Scholes folgend macht man eine Annahme über die zu erwartenden Schwankungen. Man nimmt an, daß die Renditen k^+ und k^- sowohl von der Zeit als auch vom Ausgangszustand unabhängig sind. Diese Annahme ist nicht völlig unkontrovers. Genauer besagt die Annahme folgendes. Die Aktienkurs zur Zeit $t = n_t\tau$ können mehrere Zustände annehmen, die durch j numeriert werden,

$$j = -n_t, -n_t + 2, \dots, n_j.$$

Der Zustand $j = j^+ - j^-$ kann durch j^+ Aufwärts- und j^- Abwärtssprünge erreicht werden. Es ist

$$j^\pm = \frac{1}{2}(t \pm j),$$

d.h. $t = j^+ + j^-$ und $j = j^+ - j^-$. Der Aktienkurs zur Zeit t im Zustand j soll durch

$$S_t = S_0(1 + k^+)^{j^+}(1 + k^-)^{j^-}$$

gegeben sein. In andern Worten, die beiden möglichen Renditen in einem Intervall,

$$k^\pm = \frac{S_{t+\tau}^{j^\pm 1} - S_t^j}{S_t^j}$$

sind sowohl von der Zeit t als auch vom Zustand j unabhängig. Dies bedeutet im Grenzfall kleiner Zeitintervalle und vieler Perioden, daß die Volatilität zeitlich konstant und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aktienkurse Gauß'sch sein soll, wie es bei einem Zufallsweg (random walk) der Fall ist.

Es sei C_t^j der Wert einer Option zur Zeit t im Zustand j . Es können zu jedem Zeitpunkt t Optionen verkauft oder gekauft werden, die für ein perfektes *hedging* nötigen Käufe und Verkäufe werden vom Zustand j abhängen.

Gegeben der Zustand j , so sei H_t^j die Zahl der Optionen im Portefeuille nach den Transaktionen zur Zeit t , und V_t^j der Kredit einschließlich der aufgelaufenen Zinsen. Der totale Wert zur Zeit t muß in jedem Zustand j gleich 0 sein,

$$-S_t^j + H_t^j C_t^j + V_t^j = 0. \quad (4.8)$$

Ausgehend vom Zustand j kann nach verfllossenem Zeitintervall τ der Aktienkurs die beiden Zustände $j+1$ und $j-1$ annehmen. In jedem der beiden Fälle soll der Wert des Portfeuille vor der nächsten Runde von Käufen oder Verkäufen von Optionen Null sein.

$$S_{t+\tau}^{j+1} - H_t^j C_{t+\tau}^{j+1} - V_{t+\tau}^j = 0 \quad (4.9)$$

$$S_{t+\tau}^{j-1} - H_t^j C_{t+\tau}^{j-1} - V_{t+\tau}^j = 0. \quad (4.10)$$

Weiter ist durch die zwischenzeitlich aufgelaufenen Zinsen

$$V_{t+\tau}^j = (1 + r_\tau)V_t^j \quad (4.11)$$

Aus diesen Gleichungen können wie im Einperiodenfall die folgenden Konsequenzen abgeleitet werden. Es wird wieder das *hedge*-Verhältnis

$$h_t^j = \frac{1}{H_t^j}$$

eingeführt. Man erhält

$$h_t^j = \frac{C_{t+\tau}^{j+1} - C_{t+\tau}^{j-1}}{S_{t+\tau}^{j+1} - S_{t+\tau}^{j-1}}, \quad (4.12)$$

$$C_t^j = h_t^j \left(S_t^j - \frac{S_{t+\tau}^{j-1} - H_t^j C_{t+\tau}^{j-1}}{(1+r_\tau)} \right). \quad (4.13)$$

Dies ist eine Rekursionsrelation, die es erlaubt, hedge-Verhältnisse h_t^j und Optionspreise C_t^j zur Zeit t aus den Optionspreisen zur späteren Zeit $t + \tau$ zu bestimmen. Die Aktienkurse S_t^j im Zustand j sind als bekannt angenommen worden. Zu dieser Rekursionsrelation kommt als Anfangsbedingung der durch Gl.(4.1) gegebenen Optionspreis am Verfallsdatum T ,

$$C_T = \max\{S_T - X, 0\}. \quad (4.14)$$

Der Rest ist Mathematik, die nur kurz skizziert werden soll.

Die Rekursionsrelation kann auf dem Computer gelöst werden. Stattdessen kann die Lösung auch in Form einer Summe dargestellt werden,

$$C_{T-m\tau}^j = \sum_{u=0}^m \binom{m}{u} q^u (1-q)^{m-u} C_T^{j+u-m} \quad (4.15)$$

$$q = \frac{r_\tau - k^-}{k^+ - k^-}. \quad (4.16)$$

Vom praktischen Standpunkt ist diese Lösung zunächst kein Fortschritt gegenüber die Rekursionsrelation, denn per Computer ist es ebenso leicht, die Rekursionsrelation zu lösen wie die Summe in der Lösung auszuwerten. Jedoch macht es die Lösung in Form einer Summe einfacher, den Grenzfall kleiner Zeitintervalle zu betrachten.

Black Scholes Formel für kontinuierliche Zeit

Wir wollen den Grenzfall kleiner Zeitintervalle τ betrachten. Man setzt zunächst den Ausdruck (4.1) für die Optionspreise am Verfallsdatum ein. Die Terme, wo das Maximum 0 ist, tragen zur Summe nichts bei. Damit dieser Fall nicht eintritt, muss die Zahl u der Aufwärtssprünge einen minimalen Wert a haben,

$$a = \text{kleinste ganze Zahl soda\ss} \quad (4.17)$$

$$S_{T-m\tau}(1+k^+)^a(1+k^-)^{m-a} > X. \quad (4.18)$$

Die untere Grenze kann dann durch $u = a$ ersetzt werden, und damit C_T^k durch $S_{T-m\tau}(1+k^+)^u(1+k^-)^{m-u}$. Man spezialisiert nun auf Anfangszeit $T - m\tau = 0$ und betrachtet den Grenzfall $\tau \mapsto 0$.

Wir beschränken uns auf den Fall symmetrischer Schwankungen. Eine systematische Verschiebung der Aktienkurse mit der Zeit könnte jedoch leicht berücksichtigt werden. Bei einem Zufallsweg ist das Schwankungsquadrat proportional zur Zeit. Wir setzen die τ -Abhängigkeit von k^\pm für kleine τ daher wie folgt an,

$$1 + k^\pm = 1 \pm \sigma\sqrt{\tau} \approx e^{\pm\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Der Zinssatz für ein Intervall der Länge τ wird proportional τ sein, somit

$$1 + r_\tau = 1 + \tau r_c \approx e^{\tau r_c}.$$

Die mit Potenzen multiplizierten Binomialkoeffizienten können im Grenzfall mit Hilfe der Stirling Formel für Fakultäten durch Gaußfunktionen approximiert werden, und die Summe wird durch ein Riemann Integral approximiert. Wegen der variablen unteren Grenze a tritt die Integraldarstellung der Fehlerfunktion auf,

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

Nach Grenzübergang ergibt sich der Wert C_0 der Option zur Zeit $t = 0$ als

$$C_0 = S_0 N \left(\frac{\ln(S_0/X) + (r_c + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - X e^{-r_c T} N \left(\frac{\ln(S_0/X) + (r_c - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \quad (4.19)$$

Dies ist die Formel von Black und Scholes.

4.5 Selbstorganisation in Finanzmärkten

Abstrakt gesprochen ist *Selbstorganisation* das Entstehen von zusammengesetzten Objekten, deren Konstituenten sich in kohärenter Weise verhalten. Dies ermöglicht, daß eine bestimmte Funktion ausgeübt wird.

Es gibt viele Beispiele der Selbstorganisation in der Biologie. Die Zelle ist ein Meister der Selbstorganisation. Es finden sich spontan Strukturen zusammen, z.B. die Mikrotubuli. Diese bilden eine Art Zellskelett. Sie setzen sich selbständig aus bestimmten makromolekularen Bausteinen zusammen. Das Zellskelett hat die Funktion, der Zelle eine stabile Form zu geben.

Im Laufe der Evolution wird die Selbstorganisation begünstigt, wenn es zu einer Funktion führt, die dem Organismus das Überleben erleichtert.

Auch Institutionen der Gesellschaft sind zusammengesetzten Objekte, deren Konstituenten sich in kohärenter Weise verhalten um eine Funktion zu erfüllen. Institutionen brauchen nicht staatlich zu sein.

Das spontane Entstehen nichtstaatlicher Institutionen soll hier kurz am Beispiel der internationalen Finanzmärkte diskutiert werden.

Internationale Finanztransaktionen finden in einem Reich statt, das der Anarchie und Gesetzlosigkeit nahe ist. Viele solche Transaktionen finden nicht an einem wohldefinierten Ort statt, dadurch können sie sich staatlicher Regelung entziehen. Es gibt außerdem Finanzparadiese wie die Bermudas und die Cayman-Inseln, die Schutz vor staatlicher Regelung bieten. Wenn ein Staat zuzugreifen versucht, so weichen die Betroffenen einfach aus. Man mag sich fragen, warum dann nicht Betrug der Normalfall des Geschäftsgebarens ist.

Die Antwort lautet, der Markt hat sich selbst organisiert, weil das für viele seiner Teilnehmer vorteilhaft ist. Es sind Institutionen entstanden.

Es finden sich dabei Agenten am Finanzmarkt - Händler - zusammen, die bereit sind, hohe Standards zu setzen. Eine traditionelle Methode ist, daß sich Clubs bilden, die in der Aufnahme neuer Mitglieder sehr restriktiv sind, und die auch bereit wären, Mitglieder wieder zu entlassen oder hinauszuerwerfen, wenn sie den Standards des Clubs nicht genügen.

Dadurch entsteht ein Kollektiv sich wohlverhaltender Händler. Es ergibt sich daraus für die Mitglieder ein Vorteil, denn wenn jemand, der mit ihnen handelt, die Gewähr hat, daß Verpflichtungen erfüllt werden, dann ist sein Risiko geringer. Nach dem, was früher gesagt wurde, bestimmt das Risiko den Zins. Bei höherem Risiko erwartet ein Anleger eine höhere Rendite, einen höheren Zins. Dieser Preis wird von den Mitgliedern eines Clubs gut beleumundeter Händler vermieden. Organisierte Börsen sind Beispiele von solchen Vereinigungen, die es schon lange gab.

Eine zweite Art von Institutionen sind *credit-rating agencies*. Dies sind Firmen, oder Zusammenschlüsse von Firmen. Diese Organisationen beobachten und bewerten die Kreditwürdigkeit von Partnern - also nicht von ihren eigenen

Mitgliedern, sondern von anderen Händlern am Finanzmarkt. Das Urteil ist öffentlich, sodaß jedermann erfährt, wer als mehr oder weniger vertrauenswürdig eingeschätzt wird.

Die zwei führenden credit-rating agencies in USA sind *Moody's* und *Standard & Poors*.

Es gibt verschiedene öffentlich bekannt gemachte Kriterien dieser credit-rating-agencies, nach denen die Kreditwürdigkeit eines Kreditnehmers beurteilt wird. Ein Kriterium ist beispielsweise, daß nicht die Muttergesellschaft auf das Kapital des Kreditnehmers zugreifen kann (sogenannte “*Chinesische Mauern*”)

Eine Zusammenfassung dieser Betrachtungen findet sich in den folgenden Folien.

Selbstorganisation in Finanzmärkten

Zustand

Internationale Finanztransaktionen finden in einem der **Anarchie und Gesetzlosigkeit** nahen Reich statt.

Es gibt Versuche, internationale Standards zwischen Staaten zu vereinbaren, aber es gibt keine internationale Autorität, die diese durchsetzen könnte. Cayman Island und Bermudas bieten Schutz vor Finanzregulationen und internationalen Vereinbarungen.

Over-the-counter-Märkte (OTC) für Derivate haben keinen physikalischen Ort. Daher haben staatliche Regulatoren keinen Zugriff.

Eurodollar-Markt: Multibillionen -Markt, unreguliert, funktionierte ohne größere Zwischenfälle.

Anderswo gab es Zwischenfälle (Bankzusammenbrüche wie z.B. die Baring-Bank) , aber insgesamt herrscht weitgehend Stabilität und Integrität.

Das Wachstum internationaler Finanzmärkte rührt großenteils gerade von der Möglichkeit der Vermeidung von Regierungskontrolle her.

Problem: Wenn Zahlung oder Leistung in der Zukunft versprochen wird, ist es schwierig, zu wissen, ob der Leistungsverpflichtete seine Verpflichtung honorieren wird.

Der Markt muß Strategien entwickeln, die Glaubwürdigkeit und Kontrakterfüllung fördern, ohne sich der traditionellen von Regierungen bereitgestellten Rechtsmittel bedienen zu können.

private Abhilfe: Private Regelungen und Strategien statt Verordnungen von Staats wegen. Marktkräfte haben in sehr effektiver Weise regulierend gewirkt und aus dem scheinbaren Chaos internationaler Finanzmärkte Ordnung geschaffen. Wäre überall nur Lug und Betrug, so käme der Handel zum Erliegen!

Ordnungsprinzip: Wiederholtes Handeln derselben Agenzien ist auf internationalen Finanzmärkten allgemein verbreitet. Dies macht es möglich, einen Ruf als ehrlicher Händler zu erwerben, der sich dann wirtschaftlich positiv auswirkt.

Belohnungen für die Entwicklung und Durchsetzung glaubhafter Strategien für Wohlverhalten sind ein wichtiger Ersatz für traditionelle Formen von Gesetz und Ordnung. Es wird ein Zustand geschaffen, in dem der Betrüger wirtschaftlich nicht überleben kann.

Spezielle Strategien :

- **Members-only-Club** mit hohen Eintrittsanforderungen. (vgl. Zünfte).
Beispiele: privat organisierte Clearing Houses, organisierte Börsen.
Sei dem 19-ten Jahrhundert haben die Clearing house associations des Chicago Board of Trade und des Chicago Mercantile Exchange die finanzielle Gesundheit ihrer Mitglieder beobachtet und eine Art Versicherung gegen Versagen ihrer Mitglieder eingerichtet.
- **Unabhängige Credit-Rating agencies** z.B. für OTC-Derivate.
US: Moody's, Standard and Poor's.
Bescheinigen die Kreditwürdigkeit eines potentiellen Partners in einer finanziellen Transaktion. Sie beobachten das Verhalten der großen Spieler und geben ein Urteil ab.

Verträge können Klauseln enthalten, die zum vorzeitigen Rücktritt vom Vertrag berechtigen, wenn das Credit-Rating des Partners unter eine bestimmte Schwelle fällt.

Banken mit schlechter Glaubwürdigkeit werden auf dem Markt bestraft, weil Kunden niedrigere Preise bezahlen und höhere Rendite von Papieren verlangen, die von Institutionen ausgegeben werden, denen sie nicht vertrauen (**Risiko-Prämie!**)

- **Chinesische Mauern** zwischen Institutionen die mit verschiedene Operationen befaßt sind, die zu Interessenkonflikten führen können.

Selbstorganisations-Aspekt :

Der Zusammenschluß von Agenzien zu Club's usw. ist spontane Bildung zusammengesetzter Objekte, deren Konstituenten sich in kohärenter Weise verhalten.

Dies geschieht, weil die Konstituenten dadurch einen evolutionären Vorteil erringen: sie sind an mehr und vorteilhafteren finanziellen Transaktionen beteiligt. (vgl. Biologie.)

Vorteil privater Regulierung :

1. **größere Fähigkeit zu schneller Anpassung**
Moody's und *Standard & Poors* können allgemeine Richtlinien erlassen was "*good practise*" ist und schnell und kompetent urteilen, wenn Neuerungen auftreten.
2. **Unabhängigkeit**
öffentliche Regulatoren sind politischem Druck und dem Druck von Interessengruppen ausgesetzt, und der Versuchung der Willkür in der Ausübung ihrer Macht.