Schwarze Löcher I

Proseminar Relativität SoSe 2018

Luca Noppmann & Vincent Bettaque

5. Juli 2018

Wir betrachten eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für den Fall einer kugelförmigen, homogenen, ungeladenen und statischen Massenverteilung, die Schwarzschild-Metrik. Für diese Lösung prüfen wir den Newtonschen Grenzfall. Damit definieren wir den Schwarzschild-Radius, der die Eigenschaft hat, dass Massen mit geringerer Ausdehnung als dieser zu einem schwarzen Loch werden. Im zweiten Teil betrachten wir den Fall in ein solches schwarzes Loch. Dafür berechnen wir zunächst aus Sicht des Fallenden die Eigenzeiten bis zum Schwarzschildradius und bis zur Singularität und daraufhin die Zeit für einen externen Beobachter.

1 Die Schwarzschild-Metrik

Da wir wie gesagt die Metrik außerhalb einer kugelförmigen, homogenen, ungeladenen und statischen Massenverteilung betrachten wollen, benutzen wir als Ansatz für den metrischen Tensor die Standardform in Kugelkoordinaten:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Das Linienelement $\mathrm{d}s^2$ nimmt daher die folgende Form an:

$$\mathrm{d}s^2 = B(r)c^2\,\mathrm{d}t^2 - A(r)\,\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2. \tag{2}$$

Da diese Metrik bei großen Entfernungen zur Massenverteilung in die radiale Minkowski-Metrik

$$\mathrm{d}s_\eta^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta - r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2 \tag{3}$$

übergehen soll, stellen wir entsprechende Bedingungen an die Funktionen A und B:

$$\lim_{r\to\infty} B(r) = 1, \quad \lim_{r\to\infty} A(r) = 1. \tag{4}$$

Diesen Ansatz wollen wir nun an die Bedingungen der Einsteinschen Feldgleichungen anpassen. Die Gleichungen lauten in allgemeiner Form

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Da wir allerdings das Verhalten außerhalb der Massenverteilung und somit im Vakuum betrachten, gilt folglich für den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu} = 0$ und das Gleichungssystem reduziert sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & R - \frac{1}{2} \cdot 4R = -R = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & R_{\mu\nu} = 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

Diese Bedingung erfüllt der Ricci-Tensor

$$
R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\rho} \tag{7}
$$

mit den (nicht verschwindenden) Christoffelsymbolen

$$
\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{B'}{2B}, && \Gamma^1_{00} = \frac{B'}{2A}, && \Gamma^1_{11} = \frac{A'}{2A} \\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, && \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A}, && \Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2(\theta)}{A} \\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, && \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot(\theta), && \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta)
\end{aligned} \tag{9}
$$

trivialerweise schon für unseren Metrik-Ansatz $g_{\mu\nu}$ im Fall $\mu \neq \nu$. Wir müssen daher A und B nur noch so wählen, dass die Tensorkomponenten $R_{\mu\nu}$ für $\mu = \nu$ verschwinden. Das resultierende System aus Differentialgleichungen abhängig von r lautet dann explizit:

$$
R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} = 0 \tag{10}
$$

$$
R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} = 0 \tag{11}
$$

$$
R_{22} = -1 - \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} = 0 \tag{12}
$$

$$
R_{33} = R_{22} \cdot \sin^2(\theta) = 0 \tag{13}
$$

Da Gleichung 13 für beliebige θ gelten muss, ist ihre Aussage äquivalent zu Gleichung 12. Daher reduziert sich das Problem auf die ersten drei Gleichungen 10 - 12.

Durch Umformung von 10 und 11 ergibt sich die Gleichung

$$
\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) = 0. \tag{14}
$$

Da $\frac{1}{rA} \neq 0$, folgt daraus

$$
\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \ln(AB) = 0. \tag{15}
$$

Somit ist der Term $A(r)B(r)$ konstant und aus 4 folgt, dass diese Konstante 1 sein muss. Es ergibt sich also die Beziehung

$$
A(r) = \frac{1}{B(r)} \tag{16}
$$

Diese Bedingung eingesetzt in 12 und 11 resultiert in

$$
R_{22} = -1 + rB' + B = 0 \tag{17}
$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{rB'' + 2B'}{2rB} = \frac{1}{2rB}\frac{\mathrm{d}R_{22}}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{18}$$

Es folgt, dass 17 direkt 18 impliziert. Letztere Gleichung können wir auch schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}(rB)}{\mathrm{d}r} = 1 \tag{19}$$

Integration nach r auf beiden Seiten resultiert in der Gleichung

$$rB = r + \mathrm{const} = r - 2a \tag{20}$$

Somit können wir A und B explizit durch r und die (noch unbekannte) Konstante a ausdrücken:

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r}, \quad A(r) = \frac{1}{B(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2a}{r}} \tag{21}$$

Den Wert dieser Integrationskonstante können wir dann durch Betrachtung des Newtonschen Grenzfalls für schwache Felder bestimmen:

$$g_{00} = B(r) \xrightarrow{r\to\infty} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{2a}{r} \tag{22}$$

Wir identifizeren dieses Ergebnis als den sogenannten Schwarzschild-Radius r_s:

$$2a = \frac{2GM}{c^2} = r_s. \tag{23}$$

Somit haben A und B die endgültige Form

$$B(r) = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad A(r) = \frac{1}{B(r)} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \tag{24}$$

und die Schwarzschild-Metrik lautet daher wegen 2:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\right) \mathrm{d}r^2 - r^2 \mathrm{d}\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) \mathrm{d}\phi^2. \tag{25}$$

Der Schwarzschild-Radius besitzt besondere Eigenschaften, die im nächsten Teil evaluiert werden. Bei den meisten Körpern ist dieser aber kleiner als der Radius der Massenverteilung z.B nur 3 km für die Sonne. Ist der Schwarzschild-Radius aber größer, so spricht man von einem schwarzen Loch.

Nähert man sich dem Schwarzschild-Radius, so vergeht die Zeit immer langsamer und der Raum breitet sich immer weiter auf. Sobald man den Ereignishorizont überschritten hat, ist der normale Zeitbegriff aber nicht mehr sinnvoll und die Raumrichtung ist zur Mitte des schwarzen Loches festgesetzt.

2 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für die Schwarzschild-Metrik resultieren aus der Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \tag{26}$$

mit den schon bekannten Christoffelsymbolen aus 9. Für eine ausführlichere Diskussion verweisen wir auf die Literatur [2] [1] [3]

3 Der Fall ins schwarze Loch

Wir berechnen nun die Zeiten für den Fall einer massiven Person in ein schwarzes Loch. Dabei betrachten wir im ersten Teil den Fall aus der Perspektive des Fallenden und im zweiten Teil aus jener eines externen Beobachters.

3.1 Vom Fallenden aus betrachtet

Da wir einen zentralen Fall betrachten, gibt es kein θ und kein ϕ und wir erhalten die folgende Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{2GM}{r} = c^2\left(\left[\frac{E}{mc^2}\right]^2 - 1\right) \tag{27}$$

Der Startpunkt sei mit r_0 bezeichnet. Bei $r = r_0$ gilt

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{28}$$

Das Einsetzen des Schwarzschildradius $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ liefert

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right) = 1 - \frac{r_s}{r_0} \tag{29}$$

Dies setzen wir nun in die Bewegungsgleichung ein und erhalten

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{r_s}{r_0} - 1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \tag{30}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2\left(-\frac{r_s}{r_0} + \frac{r_s}{r}\right) \tag{31}$$

Dies liefert uns die beiden Lösungen

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm c\sqrt{r_s}\sqrt{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}} \tag{32}$$

Ein positives Vorzeichen beschreibe eine Bewegung nach außen und ein negatives Vorzeichen eine Bewegung nach innen. Daher betrachten wir letzteren Fall und erhalten

$$d\tau = \left(-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{r_0}{r_s}}\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\right) dr \tag{33}$$

Somit können wir die Eigenzeit für die Person, welche in das schwarze Loch fällt, vom Startpunkt r_0 bis zum Punkt r' wie folgt berechnen

$$\tau(r') - \tau(r_0) = \int d\tau = \int_0^{r'} \left(-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{r_0}{r_s}}\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\right) dr \tag{34}$$

$$= \frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{r_s}}\left[\sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} + \arctan\left(-\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\right)\right]_{r_0}^{r'} \tag{35}$$

Bekanntlich gilt $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}...$ und somit folgt

$$\tau(r') - \tau(r_0) = \frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{r_s}}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{r'}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{36}$$

Gehen wir nun bis zum Schwarzschildradius bzw. dem Ereignishorizont des schwarzen Lochs, also $r' \to r_s$, erhalten wir für die bis dahin vergangene Eigenzeit

$$\tau_{horizont} = \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{c\sqrt{r_s}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{r_s}{r_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \tag{37}$$

Gehen wir bis zum Zentrum des schwarzen Lochs, also $r' \to 0$, so erhalten für die Eigenzeit bis zu dieser Singularität

$$\tau_{sing} = \frac{\pi r_0^{\frac{3}{2}}}{2c\sqrt{r_s}} \tag{38}$$

Wir konnten also trotz der Singularität beide Eigenzeiten, die bis zum Ereignishorizont sowie die bis zur Singularität, exakt berechnen.

3.2 Vom externen Beobachtenden aus betrachtet

Wir setzen die Schwarzschild-Metrik an

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \tag{39}$$

Für den Start gilt $(ds)^2 = 0$, also folgt

$$c^2 (dt)^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2} \tag{40}$$

$$dt = \pm \frac{dr}{c\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \tag{41}$$

Es gelte wieder, dass ein positives Vorzeichen aus der Richtung des schwarzen Lochs kommt und ein negatives Vorzeichen in Richtung des schwarzen Lochs zeigt. Somit erhalten wir

$$t_2 - t_1 = \int dt = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{c\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} = \frac{r_2 - r_1}{c} + \frac{r_s}{c} \ln \frac{r_2 - r_s}{r_1 - r_s} \tag{42}$$

Dabei bezeichne r_1 bzw. t_1 Ort und Zeit des Fallenden und r_2 bzw. t_2 Ort und Zeit des Beobachters. Erreicht nun der Fallende den Ereignishorizont, also gelte

$$r_1 \to r_s \tag{43}$$

so folgt direkt

$$t_2 - t_1 \to \infty \tag{44}$$

Also würde für den externen Beobachtern der Fallende den Ereignishorizont nie erreichen.

4 Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Wir haben die Schwarzschild-Metrik erhalten, welche den Newtonschen Grenzfall erfüllt. Wir haben geschlossen, dass die Zeit in der Nähe des Schwarzschild-Radius immer langsamer vergeht, während sich der Raum immer mehr ausbreitet. Innerhalb des Radius sagt die Lösung voraus, dass es dort eine Freiheit in der Zeit genannten Koordinate gibt, während die Raumrichtung nun in Richtung der Singularität festgelegt ist. Für den zentralen Fall konnten wir Eigenzeiten für den Fallenden zum Schwarzschild-Radius und zur Singularität berechnen. Für den externen Beobachter scheint es so, als würde der Fallende den Schwarzschild-Radius nie erreichen.

References

[1] B. Bahr. Vorlesungsskript general relativity. https://unith.desy.de/teaching/lecture_notes/gr_ws_1718, WS 17/18.

[2] Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer Verlag Heidelberg, 2012.

[3] Rindler. *Relativity: Special, General and Cosmological*. Oxford University Press, 2006.