Proseminar: Einführung in die Relativitätstheorie

bei Dr. Benjamin Bahr

-

Tensoren und Tensorfelder

Benjamin Nickels & Patrick Richter

Zusammenfassung

Vorgestellt werden Tensoren als Verbindungen von Vektoren über das Tensorprodukt, ihre Recheneigenschaften, sowie das Transformationsverhalten auf Mannigfaltigkeiten und das Konzept der kovarianten Ableitung.

Inhaltsverzeichnis

1 Tensorbegriff

Tensoren sind die allgemeinere Fortsetzung von Skalaren, Vektoren und Matrizen und dienen in der Physik zur Darstellung physikalischer Größen und Zusammenhänge insbesondere in Feldtheorien.
Charakterisiert werden Tensoren dabei über ihre Transformationseigenschaften.

2 Tensorprodukt

Gegeben seien zwei Vektorräume V, W mit $dim(V) = n, dim(W) = m$ und zwei Vektoren $v \in V$, $w \in W$. Zusätzlich wählen wir zugehörige Basen:

$$B_V = \{e_i\}_{i=1}^n \qquad B_W = \{f_j\}_{j=1}^m$$

Für diese definiert man jetzt das Tensorprodukt als

$$v \otimes w = v^i w^j e_i \otimes f_j$$

Die Dimension des so aufgespannten Tensorraums ist folglich

$$dim(V \otimes W) = dim(V) * dim(W)$$

Die Tensormultiplikation ist eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \lambda(v \otimes w) &= (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \end{aligned}$$

Zwischen Tensoren v,w,f gelten grundsätzliche Rechenregeln:

$$\begin{aligned} {v_i}^j + {w_i}^j &= {f_i}^j && \text{Addition gibt Tensor gleicher Stufe} \\ v_i \otimes w^j &= {f_i}^j && \text{Stufen addieren sich im Produkt} \\ (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) &= v \otimes (\lambda w) && \text{Multiplikation mit Skalaren} \end{aligned}$$

Es gilt aber im Allgemeinen keine Kommutativität, also

$$v \otimes w \neq w \otimes v$$

Man kann in einem Tensor sowohl Vektoren als auch Dualvektoren miteinander verketten. Der gesamte Tensor hat dann einen Typ (r,s) wobei r die Anzahl der Elemente des Vektorraums und s die Anzahl der Elemente des Dualraums angibt.

3 Tensoren auf Mannigfaltigkeiten

Zunächst soll daran erinnert werden, dass man auf Mannigfaltigkeiten mit Vektoren und Dualvektoren aus dem Tangentialraum bzw. dem Kotangentialraum arbeitet, welche für ein lokales Koordinatensystem x^i die Basen besitzen

$$B_{T_pM} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \qquad B_{T_p^*M} = \left\{ dx^j \right\}$$

So lassen sich nun, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, derartige Vektoren zu Tensoren verknüpfen, so wäre zum Beispiel ein Tensor vom Typ (2,1) von der Form

$$T = T^{ij}{}_k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k$$

Für zwei Koordinatensysteme mit überlappenden Definitionsbereichen kann man auch die Darstellung der Tensoren ändern. Dafür erinnert man sich an das Transformationsverhalten von (Ko-)Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} x^j \qquad && \tilde{\omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \omega_j \\
&\alpha^i{}_j := \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \qquad && \bar{\alpha}^i{}_j := \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \\
&\Rightarrow \tilde{T}^{ij}{}_k = \alpha^i{}_l \alpha^j{}_m \bar{\alpha}^n{}_k T^{lm}{}_n
\end{aligned}$$

4 Metrik

Ein spezieller Tensor ist der Maßtensor (auch "metrischer Tensor") g. Er ist ein Tensor vom Typ (0,2), also der Form (die $\otimes$ werden im folgenden weggelassen)

$$g = g_{ij} dx^i dx^j$$

Der metrische Tensor dient dazu, die Elemente unserer Mannigfaltigkeit mit einem Maß für Länge und Richtung bzw. Winkel auszustatten.
Ihm zugeordnet ist eine Signatur, welche die Anzahl der Eigenwerte größer, kleiner und gleich 0 erfasst.

$$p := \#EW > 0$$

$$q := \#EW < 0$$

$$r := \#EW = 0$$

Wenn $r > 0$, so ist der metrische Tensor entartet. Gilt hingegen $p = n$ (oder $q = n$), sodass alle n Eigenwerte positiv (bzw. negativ) sind, so nennt man g positiv/negativ definit.
Man kann nun auch direkt zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren wechseln.

$$A_i = g_{ij} A^j \qquad A^i = g^{ij} A_j$$

Hierbei definiert sich g^{ij} durch

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$$

Auch ergibt sich daraus ein Skalarprodukt (welches allerdings nur dann ein mathematisch echtes Skalarprodukt ist, wenn g positiv definit ist):

$$\langle x, y \rangle := g_{ij}x^i y^j$$

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist der Maßtensor das Quadrat des Linienelements ds

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta}{\partial x^\mu\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu$$

und wir können damit nun auch den auf Mannigfaltigkeiten stets bemühten Kurven γ eine Länge zuzuordnen. Sei dazu $\gamma(\phi)$ eine Kurve mit

$$\phi \to x^i(\phi) \qquad \dot{x}^i := \frac{dx^i}{d\phi}$$

$$l(\gamma) = \int \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}d\phi$$

Dies geht für die Relativitätstheorie nur im zeitartigen Bereich, da wir nur eine Pseudometrik haben. Im raumartigen Fall ist das Vorzeichen zu wechseln, damit das Ergebnis reellwertig bleibt.

$$l(\gamma) = \int \sqrt{-g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}d\phi$$

5 kovariante Ableitung

In diesem Abschnitt wird nun noch eine kurze Überlegung zur Ableitung von Tensoren auf Mannigfaltigkeiten vorgestellt.

Wenn man die normale partielle Ableitung eines Tensorfeldes in zwei unterschiedlichen Koordinatendarstellungen betrachtet, so würden diese sich ineinander transformieren gemäß

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{A}^i}{\partial\tilde{x}^k} &= \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^k}\left(\alpha^i{}_m A^m\right) \\ &= \alpha^i{}_m\frac{\partial A^m}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial\tilde{x}^k} + \frac{\partial\alpha^i{}_m}{\partial\tilde{x}^k}A^m \\ &= \alpha^i{}_m\bar{\alpha}^r{}_k\frac{\partial A^m}{\partial x^r} + \frac{\partial\alpha^i{}_m}{\partial\tilde{x}^k}A^m\end{aligned}$$

Der erste Summand ist der naiv erwartete, mit dem die Transformation die grundlegenden Eigenschaften erhalten würde. Durch den zweiten Summanden ist der Gesamtausdruck jedoch nicht länger ein Tensorfeld. Wir benötigen also ein alternatives Differentiationskonzept. Dieses ist die kovariante Ableitung.

Es gibt verschiedene mögliche Herleitungen, zum Beispiel den Paralleltransport, auf welche hier jetzt aber nicht weiter eingegangen wird. Letztendlich erhält man dann für eine räumliche Ableitung in die j-te Richtung

$$(\nabla_k A)^i = \lim_{\phi\to 0} \frac{A^i - \tilde{A}^j}{\phi} = \lim_{\phi\to 0} \left(\frac{A^i - A^j}{\phi} + \Gamma^i_{kj} A^j + \mathcal{O}(\phi) \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} A^i + \Gamma^i_{kj} A^j$$

Hierbei ist $\Gamma^i_{kj} A^j$ ein Christoffelsymbol. Dieses Objekt ist wieder ein Tensor einer um 1 höheren Stufe, obwohl die einzelnen Summanden für sich genommen keine Tensoren wären.

Eine ähnliche Form erhält man für kontravariante A_i

$$(\nabla_k A)_i = \frac{\partial}{\partial x^k} A_i + \Gamma^i_{kj} A_j$$

Das Ganze lässt sich zudem analog für Tensoren höherer Stufen rechnen. Nehmen wir zum Beispiel einen Tensor $T^{ij} = A^i B^j$, so folgt

$$(\nabla_k T)^{ij} = (\nabla_k A)^i B^j + A^i (\nabla_k B)^j$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} T^{ij} + \Gamma^i_{kl} T^{lj} + \Gamma^j_{kl} T^{il}$$

Es sei abschließend angemerkt, dass für einfache Fälle wie

$$g_{ij} = \delta_{ij} \text{ oder } g_{ij} = \eta_{ij}$$

die kovariante Ableitung wieder in die partielle Ableitung übergeht und somit in jeder Hinsicht eine sinnvolle Ableitung auf Mannigfaltigkeiten darstellt.

6 Quellenverzeichnis

Dieses Dokument ist eine schriftliche Ausarbeitung eines Referats von Malte Holzapfel & John Messerschmidt vom 14.06.2018. Ergänzend wurde folgende Literatur verwendet:

- B.Bahr, Introduction to General Relativity (`https://unith.desy.de/sites/sites_custom/site_unith/content/e28509/e45341/e65980/e65981/ART-Skript_1-4.pdf`)
- T. Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie (München, Elsevier, 2006)