Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Physik
Dozent: Dr. Benjamin Bahr

Proseminar: Einführung in die Relativitätstheorie

Mannigfaltigkeiten, Koordinaten(wechsel), Vektorfelder, 1-Formen

Seminarprotokoll zur Sitzung vom 07.06.2018

Benjamin Nickels und Patrick Richter (Vortrag)
Sascha Haupt und Paulina Goedicke (Protokoll)

14. Juni 2018

Zusammenfassung

Um in der Allgemeinen Relativitätstheorie mit gekrümmten Räumen zu arbeiten, ist es nützlich, einige mathematische Konzepte aus der Differentialgeometrie einzuführen. Dazu gehört die Mannigfaltigkeit, zu deren Definition wir die Konzepte des topologischen Raums und des Hausdorffraums benötigen.
Anschließend betrachten wir Tangential- und Kotangentialvektoren (1-Formen) auf Mannigfaltigkeiten und deren Zusammenhang mit Koordinatentransformationen.

Wie wir im vorangegangenen Vortrag gesehen haben, ist die Raumzeit in der Allgemeinen Relativitätstheorie im Allgemeinen gekrümmt. Um konzeptionell damit arbeiten zu können, benötigen wir ein mathematisches Objekt, das diese Raumzeit beschreiben kann. Wir suchen also nach einer Verallgemeinerung des euklidischen Raumes, genauer nach einem mathematischen Objekt, das lokal dem euklidischen Raum gleicht, global aber davon abweichen kann: Die Mannigfaltigkeit.
Um den Begriff der Mannigfaltigkeit zu definieren, benötigen wir zunächst einige Grundbegriffe aus der Topologie.

1 Grundbegriffe der Topologie

Definition 1.1 *Ein **topologischer Raum** $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ ist eine Menge $\mathcal{X}$ mit einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von $\mathcal{X}$. Mengen $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ heißen „offene Mengen in $\mathcal{X}$“. Zudem gelte:*

1. *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen in $\mathcal{X}$.*

2. Der Schnitt von je zwei offenen Mengen ist offen in $\mathcal{X}$.

3. Die leere Menge $\emptyset$ und die Grundmenge $\mathcal{X}$ sind offen in $\mathcal{X}$.

Anmerkung: Aus 2.) folgt sofort, dass auch der Schnitt endlich vieler offener Mengen offen ist.

Ähnlich wie bei Vektorräumen können wir auch für topologische Räume eine Basis definieren:

Definition 1.2 *Eine* ***Basis*** *einer Topologie $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ ist eine Menge $\mathcal{B}$ von offenen Teilmengen von $\mathcal{X}$, aus deren Vereinigung sich jede offene Menge bilden lässt.*

Wie auf metrischen Räumen können wir auch auf topologischen Räumen stetige Abbildungen definieren:

Definition 1.3 *Eine Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zwischen topologischen Räumen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ heißt* ***stetig*** *genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge unter f eine offene Menge ist.*

Das Konzept des topologischen Raums ist für unsere Anwendungen noch deutlich zu allgemein. Zum Beispiel ist die Konvergenz von Folgen nicht eindeutig. Wir definieren deshalb den Hausdorff-Raum als Spezialfall des topologischen Raums:

Definition 1.4 *Ein* ***Hausdorff-Raum*** *ist ein topologischer Raum, bei dem sich zu je zwei ungleichen Punkten stets disjunkte offene Umgebungen finden lassen.*

Bemerkung 1.5 *Alle metrischen Räume sind (bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie) Hausdorff-Räume. Betrachte dafür zu zwei Punkten $x, y \in \mathcal{X}$ eines metrischen Raumes $\mathcal{X}$ die offenen Bälle $B_r(x)$ um $B_r(y)$ mit Radius $r = \frac{d(x,y)}{2}$. (siehe Abb. 1) Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass diese disjunkt sind. [2]*

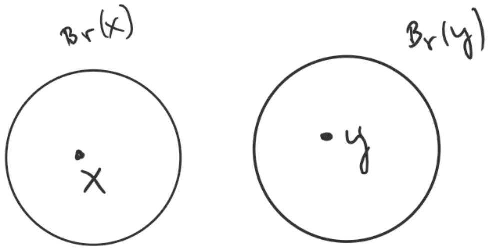

Abbildung 1: In einem metrischen Raum findet man um zwei verschiedene Punkte je zwei disjunkte offene Bälle. (eigene Darstellung)

2 Mannigfaltigkeiten

Wir wollen jetzt den Begriff der Mannigfaltigkeit mathematisch exakt definieren. Dazu müssen wir die Eigenschaft, lokal dem euklidischen Raum zu gleichen, präzisieren. Wir verwenden dazu stetige Abbildungen von topologischen (Hausdorff-) Räumen in den $\mathbb{R}^n$. Dabei betrachten wir den $\mathbb{R}^n$ mit der vom euklidischen Standardskalarprodukt induzierten Metrik als metrischen Raum.

Definition 2.1 *Ein* ***Homöomorphismus*** *ist eine stetige, bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung.*

Definition 2.2 *Eine* ***Karte*** *ist ein Homöomorphismus* $\phi : \mathcal{S} \supseteq \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ *von einer Teilmenge* $\mathcal{U}$ *eines Hausdorff-Raums* $\mathcal{S}$ *in eine Teilmenge* $\mathcal{V}$ *des* $\mathbb{R}^n$*.*

Da eine Mannigfaltigkeit nur lokal dem $\mathbb{R}^n$ gleichen soll, haben wir nicht gefordert, dass eine Karte auf dem ganzen Hausdorff-Raum $\mathcal{S}$ definiert ist. Deshalb ordnet eine Karte im Allgemeinen nicht jedem Punkt $p \in \mathcal{S}$ einen Punkt $q \in \mathbb{R}^n$ zu. Um ganz $\mathcal{S}$ zu überdecken, benötigen wir deshalb im Allgemeinen eine Menge von Karten.

Definition 2.3 *Ein* ***Atlas*** $\mathcal{A}$ *ist eine Menge von Karten* ϕ_i *auf einem Hausdorff-Raum* $\mathcal{S}$*, die ganz* $\mathcal{S}$ *überdecken.*

Nachdem wir nun die nötigen Grundbegriffe eingeführt haben, kommen wir zur formalen Definition der Mannigfaltigkeit:

Definition 2.4 *Eine (n-dimensionale)* ***Mannigfaltigkeit*** *ist ein Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und einen Atlas besitzt, dessen Karten in den* $\mathbb{R}^n$ *abbilden. (siehe auch Abb. 2) Dabei besagt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dass der betrachtete topologische Raum eine abzählbare Basis besitzt.*

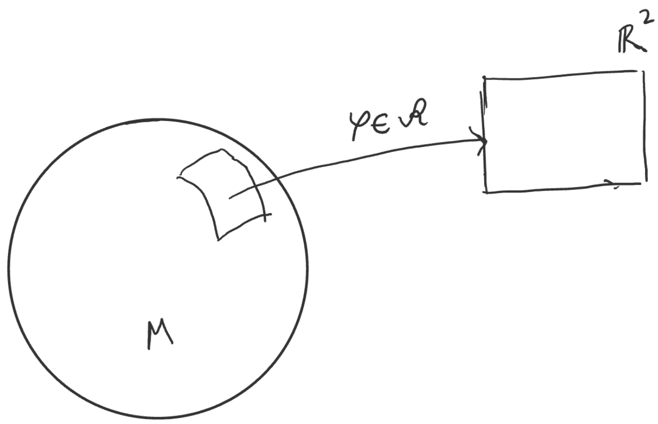

Abbildung 2: Beispiel einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit (hier als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$) mit Karte, die in den $\mathbb{R}^2$ abbildet. (eigene Darstellung)

Für Anwendungen im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie werden wir weitere Forderungen an die Mannigfaltigkeiten stellen, beispielsweise, dass die Karten differenzierbar sind.

3 Vektorfelder

Allgemein beschreibt ein Vektorfeld eine Zuordnung eines Vektors zu jedem Punkt p eines Raumes $\mathcal{V}$. In der Physik finden Vektorfelder zahlreiche Anwendungen, beispielsweise als elektrisches Feld, als Magnetfeld oder als Gravitationsfeld. Dabei handelt es sich (im nichtrelativistischen Fall) üblicherweise um Vektorfelder auf dem euklidischen Raum. Vektoren können hier als Verschiebungen entlang einer Richtung aufgefasst werden. Wir wollen nun Vektorfelder auf verallgemeinerten Räumen, also auf Mannigfaltigkeiten, definieren. In diesem Fall können Vektoren als infinitesimale Verschiebung aufgefasst werden.[1]

Definition 3.1 *Wir betrachten eine differenzierbare Kurve* $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{M}$ *in einer Mannigfaltigkeit* $\mathcal{M}$*, für die gilt, dass* $\gamma(0) = p$*. Ein* ***Tangentialvektor*** v_p *am Punkt* p *ist nun wie folgt definiert:*

$$v_p = \left. \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} \right|_{t=0}$$

Der Tangentialvektor in p entspricht also dem Geschwindigkeitsvektor von $\gamma(t)$ in p. Da lokal gilt, dass $\gamma(t) = x^i(t)$, kann man die einzelnen Komponenten von v_p auch so ausdrücken:

$$v_p^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{t=0} \tag{3.1}$$

Bemerkung 3.2 *Um v_p lokal beschreiben zu können, brauchen wir noch eine Basis. Hierzu betrachten wir die Änderung in Richtung der einzelnen $x^i(t)$ auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$: $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{t=0}$ und benutzen diese als Basisvektoren. Die Basis-Darstellung von v_p auf $\mathcal{M}$ sieht nun folgendermaßen aus:*

$$v_p = v_p^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{t=0}$$

Ein Tangentialvektor lässt sich als Operator auf eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ anwenden. Dabei gilt:

$$v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{3.2}$$

Definition 3.3 *Den Raum aller Tangentialvektoren v_p zu einem Punkt $p \in \mathcal{M}$ bezeichnen wir als* ***Tangentialraum*** *an p, $T_p\mathcal{M}$. Die Menge aller Tangentialräume über $\mathcal{M}$ nennen wir* ***Tangentialbündel****, $T\mathcal{M}$.*

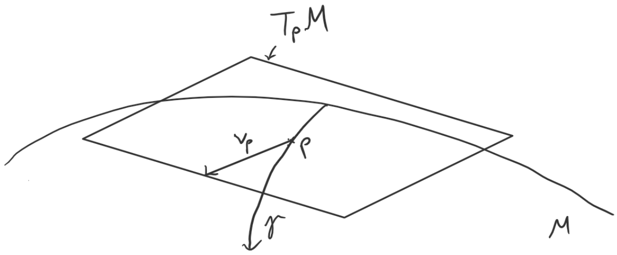

Abbildung 3: Tangentialraum einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit an einem Punkt p (hier wieder beispielhaft bei einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$) (eigene Darstellung)

Wichtig ist, dass die Tangentialräume für einzelne $p \in \mathcal{M}$ nichts miteinander zu tun haben und auch keine Schnittmengen haben.
Wir können nun den Begriff des Vektorfelds formal definieren:

Definition 3.4 *Ein Vektorfeld auf $\mathcal{M}$ ist eine Abbildung, die jedem $p \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ ein $v_p \in T_p\mathcal{M}$ zuordnet, also eine Abbildung von der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in das Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$.*

Wir wollen jetzt einen **Koordinatenwechsel** durchführen. Dazu betrachten wir ein anderes Koordinatensystem mit $\tilde{v}_p^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial t}\Big|_{t=0}$.
Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\tilde{v}_p^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^j} v_p^j\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v_p^j\Bigg|_{t=0} \tag{3.3}$$

Woraus folgt, dass ein Koordinatenwechsel allgemein durch

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Bigg|_{t=0} \tag{3.4}$$

gegeben ist.

So wie wir eben Tangentialvektoren definiert haben, können wir auch sogenannte Kotangentialvektoren ω_p, auch 1-Formen genannt, zu jedem $p \in U \subseteq \mathcal{M}$ definieren.

Definition 3.5 ***Kotangentialvektoren****, (auch:* ***1-Formen*** *oder Pfaff'sche Formen) sind Elemente des Kotangentialraumes T_p^*M, also des Dualraums zum Tangentialraum, und definieren Abbildungen $\omega_p : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$.*

Bemerkung 3.6 *Eine Basis des Kotangentialraums ist durch die Kotangentialvektoren $\mathrm{d}x^i \in T_p^*M$ gegeben. Für diese gilt:*

$$\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij}$$

Mit Hilfe dieser Basis lässt sich ein Element aus dem Kotangentialraum wie folgt darstellen:

$$\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$$

Auch hier wollen wir einen Koordinatenwechsel durchführen. Die Rechnung erfolgt analog zu (3.3) und liefert schließlich:

$$\tilde{\omega}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\omega_i \tag{3.5}$$

Wenden wir nun einen Kotangentialvektor $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ auf einen Tangentialvektor $v \in T_p\mathcal{M}$ an, ergibt sich unter Ausnutzung von Bemerkung 3.6, dass

$$\omega(v) = \omega_i v^j \mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i v^i \tag{3.6}$$

und nach einem Koordinatenwechsel:

$$\omega_i v^i = \tilde{\omega}_j \tilde{v}^j \tag{3.7}$$

Ein Kotangentialvektor, auf einen Tangentialvektor angewandt, ist also invariant unter Koordinatentransformationen, was für die Integration von ω eine wichtige Rolle spielt:[1]

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \omega \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \omega_i v^i \mathrm{d}t \tag{3.8}$$

Ein Beispiel aus der Physik hierfür wäre die Integration der Kraft über einen Weg, was eine Arbeit hervor brächte.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben das Konzept der Mannigfaltigkeit auf Grundlage von topologischen Begriffen eingeführt. Anschließend wurden mithilfe des Tangentialraumes Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten definiert und deren Verhalten unter Koordinatentransformationen betrachtet. Wir haben auch den zu einem Tangentialraum dualen Raum, den Kotangentialraum, eingeführt. Seine Elemente, die Kotangentialvektoren, sind Abbildungen von den Tangentialvektoren auf die reellen Zahlen, die auch als 1-Formen bezeichnet werden.

Mithilfe der Konzepte des Tangential- und Kotangentialraums können im weiteren Verlauf des Seminars Tensorfelder definiert werden. Dazu gehören der Energie-Impuls-Tensor und der Riemannsche Krümmungstensor, die für Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen wichtig sind.

Literatur

[1] Benjamin Bahr. *Introduction to General Relativity: Lecture Notes: (Typed by Claudia Schönberg).* Hamburg, 2017. URL: `https://unith.desy.de/sites/sites_custom/site_unith/content/e28509/e45341/e65980/e65981/ART-Skript_1-4.pdf`.

[2] Oliver Goertsches. *Differentialgeometrie: Skript der Vorlesung im SoSe 2014*. Hamburg, 2014. URL: `https://www.math.uni-hamburg.de/home/kroencke/lehre/ss2018/goertsches_diffgeo.pdf`.