Relativitätstheorie

Äquivalenzprinzip

Protokoll

Dennis Einfeldt, Mirko Pollok

1 Abstract

Als Übergang von der speziellen in die allgemeine Relativitätstheorie wurde in diesem Thema das Äquivalenzprinzip vorgestellt. Dabei wurde die Idee des Prinzips, die daraus folgenden Bewegungsgleichngen, ein Vergleich von Newton mit Einstein, das Christoffelsymbol sowie die Metrik und ein kurzer Vergleich mit der E-Dynamik dargelegt.

2 Hauptteil

2.1 Newton'sche Gravitationstheorie

Zu Beginn des Referats wird die Newtonsche Gravitationstheorie wiederholt.
Das Newtonsche Gravitationsgesetz ist ein physikalisches Gesetz der klassischen Physik, nach dem jeder Massenpunkt auf jeden anderen Massenpunkt mit einer anziehenden Gravitationskraft einwirkt. Die Formel dazu lautet:

$$m \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = F = -G \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot \hat{e}_r \tag{1.1}$$

Es wird angenommen, dass m viel kleiner als M ist und sich am Ort r befindet.
Außerdem wird das Potential $\Phi(r)$ eingeführt, mithilfe dessen man nun

$$mt \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = -m_s \cdot \nabla \cdot \Phi(r) \tag{1.2}$$

schreiben kann. Hierbei bezeichnet m_t die träge Masse, welche träge gegen ihre Beschleunigung ist und m_s die schwere Masse, welche die Quelle der Gravitationskraft ist. Daraus folgt, das

$$\Phi(r) = -G \cdot \frac{M}{r} \tag{1.3}$$

gelten muss.
Die weitere Betrachtung findet unter der Annahme statt, dass das Gravitationsfeld homogen ist und beschränkt sich außerdem auf eine Dimension. Es wird das Potential

$$\phi = gz \tag{1.4}$$

definiert.
Daraus folgt mithilfe von (1.1) und (1.2):

$$F = -m_s \cdot g = m_t \frac{d^2z}{dt^2} \tag{2.1}$$

$$\text{und } z(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_s}{m_t} g t^2 \tag{2.2}$$

2.2 Äquivalenzprinzip

Im zweiten Abschnitt wird das Äquivalenzprinzip erläutert. Nach einem Experiment von Adelberger im Jahre 1999 gilt: $\frac{m_s}{m_t} - 1 < 4 \cdot 10^{-13}$ wodurch das schwache Äquivalenzprinzip folgt:

$$m_s = m_t \tag{2.3}$$

Dieses drückt also aus, dass die schwere und die träge Masse eines Körpers glich groß sind. Nun wird ein beschleunigtes Koordinatensystem betrachtet. Die zugehörigen Transformationen lauten:

$$z' = z + \tfrac{1}{2}gt^2,\ t' = t \tag{2.4}$$

Diese werden nun in (2.2) eingesetzt und es folgt:

$$m_t \tfrac{d^2}{dt^2} \cdot (z' - \tfrac{1}{2}gt^2) = -m_s \Rightarrow \tfrac{d^2 z'}{dt^2} m_t = g(m_t - m_s) = 0 \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow t'(t) = v_0 t + z_o \tag{2.6}$$

Es gibt daher relativ zu einem mitbewegten Bezugssystem während des freien Falls keine Auswirkungen des äußeren Gravitationsfeldes auf die Bewegung der Körper.
Deswegen beschreiben alle Körper im freien Fall in einem äußeren Gravitationsfeld, bei gleichen Anfangsbedingungen, in derselben Zeit dieselbe Bahn.
Als nächstes wird das von Einstein postulierte starke Äquivalenzprinzip betrachtet.
Es lautet „In einem frei fallenden Koordinatensystem laufen alle Vorgänge ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden sei.“
Damit dieses gilt muss das Laborsystem hinreichend klein sein, man bezeichnet es dann auch als LIS (Lokales Inertialsystem), da es sich dann wie ein Inertialsystem verhält. Umso kleiner das LIS ist, desto kleiner werden auch die Fehler durch diese Betrachtung, wobei das Optimum bei einem Punktteilchen liegt.
Das Äquivalenzprinzip sagt nun aus, dass im LIS die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten ohne Gravitationskraft. Erst durch die Transformation von dem LIS in ein anderes Koordinatensystem entsteht die Gravitationskraft und es gilt die allgemeine Relativitätstheorie.

2.3 Bewegung im Gravitationsfeld

Der dritte Abschnitt des Vortrages hat sich mit der Bewegung im Gravitationsfeld beschäftigt.

Da im Äquivalenzprinzip das lokale Intertialystem betrachtet wird, muss auch in in anderen Koordinaten gerechnet werden: ξ^α. Für diese Koordinaten gilt:

$$\frac{d^2\xi^2}{d\tau^2} = 0$$

Woraus sich die Bewegungleichungen errechnen lassen:

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Mit:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}$$

Diese Gleichungen sind für Objekte mit einer Ruhemasse und einer Eigenzeit gültig. Um auch Licht mit diesen Gleichungen beschreiben zu können, muss τ durch λ ersetzt werden. Dann ergeben sich analog Bedingung und Gleichung:

$$\frac{d^2\xi^2}{d\lambda^2} = 0$$
$$\frac{d^2x^\kappa}{d\lambda^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

2.4 Vergleich Newton und Einstein

Im vierten Abschnitt wird Newtons Mechanik mit Einsteins Relativitätstheorie in vier Beispielen verglichen.

Im ersten Beispiel ist eine Person in einem geschlossenem Raum der auf der Erdoberfläche steht, dementsprechend steht die Person auf dem Boden des Raums. Nach Newton ist dieses System ein Inertialsystem indem die Gravitationskraft wirkt, für Einstein allerdings ist es kein Inertialsystem, da es eine Kraft gibt, die den Raum auf der Erdoberfläche hält.

Im zweiten Beispiel wird der Raum durch einen Antrieb beschleunigt und fliegt durchs Weltall, auch hier steht die Person auf den Boden des Raums. Newton und Einstein sagen beide, dass dies kein Inertialsystem ist, da der Antrieb eine Kraft ausübt.

Im dritten Beispiel befindet sich der Raum im freien Fall Richtung Erdboden, die Person darin ist schwerelos. Newton sagt hierbei handelt es sich nicht um ein Inertialsystem, da die Gravitationskraft wirkt und eine Scheinkraft im Raum induziert. Einstein allerdings behauptet es ist ein Inertialsystem, da keine Kraft wirkt.

Beim letzten Beispiel sind sich Newton und Einstein wieder einig, ein Raum im Weltall

ohne Antrieb und ohne Stern in der Nähe ist ein Inertialsystem, denn es wirken keine Kräfte.
Aus diesem Vergleich lässt sich nun folgern, dass für Einstein die Gravitationskraft eine Scheinkraft ist, da sie sich weg transformieren lässt und somit nur vom Bezugssystem induziert ist.
Die Person im Raum kann außerdem nicht zwischen dem ersten und zweiten, sowie dem dritten und vierten Beispiel unterscheiden, was für Einsteins Relativitätstheorie spricht.

2.5 Christoffel-Symbol und Metrik

Während des fünften Teils wurde näher auf das Christoffelsymbol und den metrischen Tensor eingegangen.
Der metrische Tensor ist definiert als:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Ein Vergleich mit dem Christoffelsymbol $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ legt nahe, dass die beiden Größen in einander überführt werden können. Nach einigem Rechnen ergibt sich dann:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)$$

2.6 Vergleich mit E-Dynamik

Ein Vergleich der so gewonnen Formeln mit denen aus der Elektrodynamik lässt folgende Schlüsse zu:

$$\begin{gathered}F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \mathrel{\widehat{=}} \Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \tfrac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\tfrac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\\ m\tfrac{d^2x^\alpha}{dT^2} = \tfrac{q}{c}F^{\alpha\mu}\tfrac{dx^\mu}{dT} \mathrel{\widehat{=}} \tfrac{d^2x^\kappa}{dT^2} = -\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\tfrac{dx^\lambda}{dT}\tfrac{dx^\mu}{dT}\end{gathered}$$

3 Summary

In diesem Vortrag wurde eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie über das Äquivalenzprinzip gemacht. Es wurden notwendige Überlegungen veranschaulicht, Formeln für die Bewegung im Gravitationsfeld hergeleitet und abschließend noch einmal der Zusammenhang der hergeleiteten Formeln untereinander und mit anderen Gebieten der Relativitätstheorie dargestellt.

4 Bibliographie

T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, 7. Auflage, Springer Verlag, Siegen, **2016**, S.41-59.