

Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie

Marvin Skiba, Simon Bott

April 2018

1 Abstract

In folgender Abhandlung werden die Inhalte des Vortrags von Johannes Sut-schies und Mirko Wytopil festgehalten. Zunächst werden die grundlegenden Lorentz-Transformationen und die daraus folgenden Gleichungen der Zeitdilatation und Längenkontraktion behandelt. Danach untersuchen wir zwei bekannte Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie: Das Zwillingsparadoxon und das Garagenparadoxon. Wir werden zeigen, dass die scheinbaren Widersprüche durch kontraintuitive Eigenschaften der Relativitätstheorie gelöst werden. So ist es im Zwillingsparadoxon der Wechsel zwischen Inertialsystemen durch Beschleunigung und im Garagenparadoxon die Nichterhaltung der Gleichzeitigkeit. Anschließend betrachten wir mit dem Myonenzerfall ein Beispiel aus der realen Welt, das nicht dem klassischen Modell entspricht, und erwähnen kurz das Hafele-Keating-Experiment und die Notwendigkeit der speziellen Relativitätstheorie für das GPS.

2 Lorentz-Transformation

Der Physiker Hendrik Antoon Lorentz beschäftigte sich im Zusammenhang mit der Elektronentheorie auch mit der Elektrodynamik bewegter Körper. 1895 entwickelte er auf der Grundlage der klassischen Vorstellungen Gleichungen, die es ermöglichen die räumliche und zeitliche Koordinaten von einem Inertialsystem in ein anderes, dazu bewegtes, umzurechnen. Lorentz blieb dabei in den klassischen Vorstellungen des absoluten Raums mit einem ruhenden Äther verhaftet, und ging nicht von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, sondern davon aus, dass sich bei Bewegung eines Körpers, dessen Länge verringert.

Etwa zehn Jahre später formulierte Albert Einstein als eines seiner zwei Ausgangspostulate das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die von Lorentz angegebenen Gleichungen erwiesen sich demnach trotzdem als richtig, erfuhren jedoch durch Einstein eine völlig neue, relativistische Bedeutung.

Wird in Ereignis betrachtet, welches eindeutig durch die Koordinaten (x, t) im Inertialsystem IS beschrieben ist, ist dieses Ereignis im Inertialsystem IS' durch die Koordinaten (x', t') eindeutig beschrieben. Ausgehend von den beiden

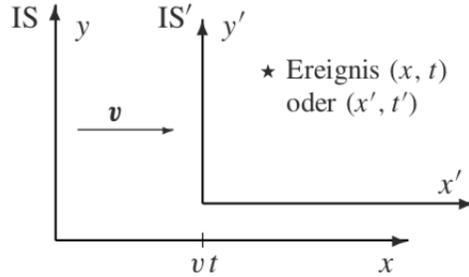


Abbildung 1: Bewegtes Inertialsystem[1]

bekanntem Formeln, welche über die Galilei-Transformation gewonnen werden:

$$x = x' + vt' \quad (1)$$

$$x' = x - vt \quad (2)$$

wird von Lorentz folgender Ansatz für die Transformationsgleichungen gewählt, die bei sehr hohen ("relativistischen") Geschwindigkeiten gültig sein sollen.

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (3)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (4)$$

Des Weiteren müssen für den Korrekturterm γ folgende Bedingungen gelten:

1. Das γ ein mathematischer Ausdruck sei, der sich für kleine Geschwindigkeiten v immer näher der 1 annähert.

2. Der Korrekturfaktor γ muss in beiden Inertialsystemen der selbe sein, weil es sonst nicht egal wäre welches der beiden Systemen mit welchen Koordinaten versehen ist.

Mit der Bedingung, dass zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ auch $x = x' = 0$ ist, die Ursprünge der beiden Inertialsysteme also zur Zeit $t = t' = 0$ zusammen fallen, lassen sich zwei Gleichungen herleiten welche dem zweiten Postulat Einsteins entsprechen: $x = ct$ und $x' = ct'$. Sendet man unter der oben genannten Bedingung, also im gemeinsamen Ursprung, ein Lichtsignal in Richtung der x - bzw. x' -Achse aus, so müssen für den Ort des Lichtsignal in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit t bzw. t' eben genau diese Gleichungen gelten. Durch Einsetzen und Umformen der formulierten Bedingungen wird eine Gleichung für den Korrekturfaktor γ erhalten. Diese lautet:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

2.1 Herleitung der Transformationsgleichung für t

Wird Gleichung (3) und (4) betrachtet, kann x in Gleichung (4) durch den Zusammenhang aus Gleichung (3) eingesetzt werden. Durch weitere Umformung, Einsetzen der Beziehung:

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad (6)$$

und Umstellen nach der gesuchten Variable t ergibt sich folgende Gleichung:

$$t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x' \right) \quad (7)$$

und analog

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \quad (8)$$

2.2 Zeitdilatation als Folgerung der Lorentz-Transformation

Im Folgenden werden Zwei Ereignisse, welche in einem System S' zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t'_1 und t'_2 , aber an einem festen Ort mit der selben Koordinate x'_0 stattfinden betrachtet. Hierbei wird die zwischen den beiden Ereignissen liegende Zeitdifferenz als Eigenzeit bezeichnet.

$$t_E = t'_2 - t'_1 \quad (9)$$

Wird das selbe Ereignis aus einem System S , welches sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum System S' bewegt, so gelangt man dort zu dem Schluss, dass die beiden Ereignisse zu den beiden (im System S gemessenen) Zeitpunkten:

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_0 \right) \quad (10)$$

bzw. analog:

$$t_2 = \gamma \cdot \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_0 \right) \quad (11)$$

stattgefunden haben. Es folgt also die im System S gemessene Zeitdifferenz zwischen den beiden Ereignissen:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \cdot \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_0 \right) - \gamma \cdot \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_0 \right) = \gamma \cdot (t'_2 - t'_1) = \gamma \cdot \Delta t_E \quad (12)$$

In Worten: Jenes Zeitintervall für zwei Ereignisse, welche man am selben Ort betrachtet, ist immer kleiner als das Zeitintervall für dieselben Ereignisse, welche in einem anderen, zu dem ersten relativ bewegten Inertialsystem, an zwei verschiedenen Orten stattfindet. Einfach gesagt, die Zeit vergeht für bewegte Objekte langsamer.

2.3 Längenkontraktion als Folgerung der Lorentz-Transformation

Im ruhenden System S' ist die Ruhelänge (Eigenlänge) eines Objekts mit den Koordinaten x'_1 und x'_2 definiert als:

$$l_E = x'_2 - x'_1 \quad (13)$$

Die im relativ zu S' bewegten System S gemessene Länge des Objekts ist definiert als die Differenz:

$$l = x_2 - x_1 \quad (14)$$

der x-Koordinaten der beiden Orte, an denen sich die beiden Enden des Objekts zur selben in System S gemessenen Zeit befinden. Daraus folgt $t_1 = t_2$.

$$x'_1 = \gamma \cdot (x_1 - v \cdot t_1) \quad (15)$$

bzw. analog:

$$x'_2 = \gamma \cdot (x_2 - v \cdot t_2) \quad (16)$$

Aus der oben angestellten Voraussetzung wird daraus:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma \cdot (x_2 - v \cdot t) - \gamma \cdot (x_1 - v \cdot t) = \gamma \cdot (x_2 - x_1) \quad (17)$$

Daraus folgt:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} \cdot (x'_2 - x'_1) \quad (18)$$

Also ist:

$$l = \frac{1}{\gamma} \cdot l_E = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot l_E \quad (19)$$

In Worten: In jedem Inertialsystem, in dem sich ein Objekt bewegt, ist dessen in Bewegungsrichtung gemessene Länge kürzer als die Ruhelänge, d.h. die gemessene Länge in einem Koordinatensystem, in dem das Objekt ruht bzw. das sich mit dem Objekt mitbewegt.

3 Paradoxa

3.1 Zwillingsparadoxon

Das Zwillingsparadoxon, oder auch Uhrenparadoxon, bezeichnet ein Gedankenexperiment welches einen scheinbaren Widerspruch zu den Folgen der speziellen Relativitätstheorie beschreibt. Man stelle sich vor, die identischen Zwillingsbrüder Mirko und Albert E. werden am Tag ihrer Geburt getrennt. Mirko begibt sich unmittelbar nach seiner Geburt auf interstellare Reise mit einer Uhr an Bord seines Raumschiffs. Dieses bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 0.98622c$. Nach 11.5 Jahren macht sein Raumschiff kehrt und er gelangt nach insgesamt 23 Jahren ($t_E = 23a$) (auf seiner Uhr) zurück zur Erde und möchte seinen Zwillingsbruder aufsuchen. Nun stellt sich die Frage, wie alt ist sein Zwillingsbruder Albert E zum Zeitpunkt seiner Rückkehr?

Setzt man die gegebenen Werte für die verstrichene Zeit t_E und die Geschwindigkeit des Raumschiffes mit $v = 0.98622c$ in Gleichung (12) ein. So kommt man zu dem Schluss, das für Albert E. welcher auf der Erde verblieb 139.02 Jahre vergangen sind. Prinzipiell steht dieses Ergebnis völlig in Einklang mit den oben aufgeführten Erkenntnissen der speziellen Relativitätstheorie. Wird jedoch die Symmetrie des Paradoxons betrachtet, und Mirko als Raumfahrer behauptet, dass er sich nicht bewege, sondern sich die Erde relativ zu ihm entfernte kehren sich die Ergebnisse der Rechnungen um, sodass Albert E. nun der 'jüngere' Zwilling wäre.

Durch genaues Betrachten des Ablaufs wird jedoch deutlich, dass die Standpunkte der Zwillinge nicht identisch sind. Da Albert E. immer auf der Erde verbleibt, ist die gleichbedeutend mit der Aussage, dass er sich immer im selben Inertialsystem befindet. Mirko hingegen bewegt sich in mindestens zwei verschiedenen Inertialsystemen, da er zum Ausgangspunkt zurück fliegt und somit definitiv keine geforderte geradlinige, gleichförmige Bewegung vollzieht. Des Weiteren erfolgt, zumindest bei seinem Umkehrpunkt, ein Beschleunigungsprozess. Beschleunigte Bezugssysteme werden allerdings nicht vollständig durch die spezielle Relativitätstheorie erfasst, sondern lassen sich nur im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie beschreiben.

3.2 Garagenparadoxon

Das Garagenparadoxon ist ähnlich dem Zwillingsparadoxon ein Gedankenexperiment, nur steht nun zunächst die Längenkontraktion im Fokus. Wir betrachten eine im Inertialsystem S ruhende Garage mit einer Eigenlänge von 10 m und eine im Inertialsystem S' ruhende Leiter mit einer Eigenlänge von 20 m, welche von einem Mann mit annähernd Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Garage getragen wird. Die Garage hat an beiden Seiten jeweils ein Tor, von denen zunächst das zur Leiter gerichtete offen steht und das andere geschlossen ist. Sobald das die Leiter das hintere Tor erreicht, öffnet sich dieses und

zeitgleich schließt sich das vordere Tor.¹

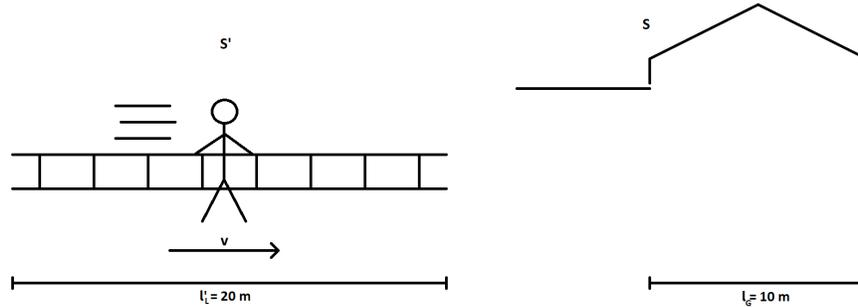


Abbildung 2: Die Leiter bewegt sich aus Sicht von S in positiver x -Richtung auf die Garage zu

Klassisch wäre eine Kollision unvermeidbar, nun soll sich die Leiter aber so schnell bewegen, dass es relativistisch zu keiner Kollision kommt. Dazu betrachten wir die Situation zunächst aus Sicht von S . Damit die Leiter gerade so in die Garage passt, muss ihre Länge l_L in S gleich der Länge der Garage l_G sein. Dabei berechnet sich l_L mittels der Längenkontraktion (19). Also folgt

$$l_G = l_L = \frac{1}{\gamma} \cdot l'_L \quad (20)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{l'_L}{l_G} = \frac{20 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 2 \quad (21)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} \cdot c = \frac{\sqrt{3}}{2} c \approx 0.866c \quad (22)$$

Die Problematik des Paradoxon wird deutlich, wenn man die Situation aus Sicht von S' betrachtet. Jetzt verkürzt sich die Länge der Garage noch weiter auf 5 m, sodass die Leiter nun erst recht nicht hineinpasst. Demnach würde es in S' zu einer Kollision kommen, welches aber im direkten Widerspruch zur Kollisionsfreiheit in S steht.

Das Paradoxon wird dadurch aufgelöst, dass Gleichzeitigkeit beim Wechsel in ein anderes Inertialsystem nicht erhalten bleibt. Dazu betrachten wir die vier Ereignisse:

- 1: Das vordere Ende der Leiter passiert das erste Tor
- 2: Das erste Tor schließt sich
- 3: Das zweite Tor öffnet sich
- 4: Das hintere Ende der Leiter passiert das zweite Tor

¹ 'Zeitgleich' bezieht sich hier auf das Inertialsystem S . Also haben die Ereignisse 'Öffne hinteres Tor' und 'Schließe vorderes Tor' die selbe Zeitkoordinate t in S . Warum diese Unterscheidung so wichtig ist, wird gleich deutlich.

Die Reihenfolge in S ist gegeben, die Ereignisse 2 und 3 treten gleichzeitig auf:

$$1 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4 \quad (23)$$

Die Zeiten t'_2 und t'_3 ergeben sich durch die Lorentz-Transformation der Zeit (8):

$$t'_2 = \gamma \cdot \left(t_2 - \frac{v}{c^2} \cdot x_2 \right) \quad (24)$$

$$t'_3 = \gamma \cdot \left(t_3 - \frac{v}{c^2} \cdot x_3 \right) \quad (25)$$

Mit $t_2 = t_3$ und $x_2 < x_3$ folgt direkt $t'_3 < t'_2$. Also lautet die Reihenfolge in S' :

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \quad (26)$$

Aus Sicht der Leiter öffnet sich zuerst das zweite Tor, das erste schließt aber erst, wenn das hintere Ende der Leiter das erste Tor passiert, also wenn der Großteil der Leiter die Garage bereits verlassen hat.

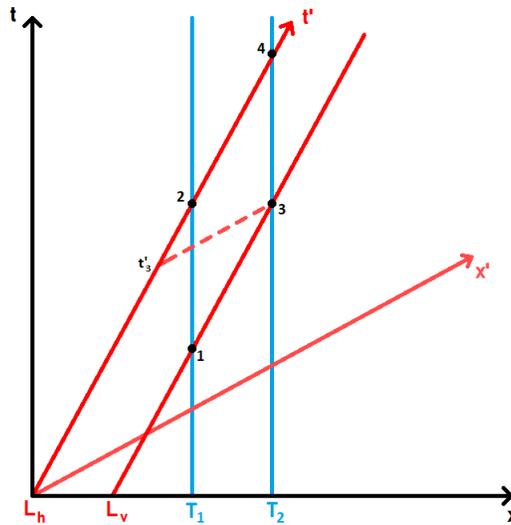


Abbildung 3: Skizzenhaftes Minkowski-Diagramm des Garagenparadoxon: Eingezeichnet sind die Weltlinien des vorderen Leiterendes L_v , des hinteren Endes L_h , des ersten Tors T_1 und des zweiten Tors T_2

4 Empirische Nachweise der SRT

4.1 Myonenzerfall

Das Myon ist ein Elementarteilchen ähnlich dem Elektron, beide sind Leptonen und haben die charakteristische Ladung $-e$. Im Gegensatz zum Elektron ist

das schwerere Myon jedoch nicht stabil. Die Halbwertszeit dieses Zerfalls wurde erstmals 1939 vom italienischen Physiker Bruno Rossi gemessen:

$$T_{1/2} = 1.56 \mu s \quad (27)$$

Myonen sind Teil der sekundären kosmischen Strahlung, das heißt sie entstehen, wenn die kosmische Strahlung mit Teilchen in der oberen Erdatmosphäre reagiert.² Den Teilchenfluss der so oberhalb von 10 km Höhe entstandenen Myonen wurde 1941 von Rossi und Hall in 2000 m Höhe zu 560 Teilchen pro Stunde und in 650 m Höhe zu 420 Teilchen pro Stunde am Gipfel bzw. Fuß des Mt Washington gemessen.[2] Zudem bewegen sich die Myonen mit der Geschwindigkeit $v = 0.995c$.

Der Myonenzerfall unterliegt folgendem Gesetz:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T_{1/2}} \quad (28)$$

Wobei $N_0 = 560 \text{ h}^{-1}$ der Fluss am ersten Messpunkt und t die Zeit, die ein Myon benötigt um vom ersten Messpunkt zum zweiten zu kommen, ist.

$$t = \frac{2000 \text{ m} - 650 \text{ m}}{v} \quad (29)$$

$$\approx 4.53 \mu s \quad (30)$$

Eingesetzt in (28) ergibt sich also klassisch:

$$N(4.53 \mu s) = 560 \text{ h}^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{4.53 \mu s / 1.56 \mu s} \quad (31)$$

$$\approx 74.82 \text{ h}^{-1} \quad (32)$$

Dieser Wert steht jedoch im Widerspruch zum Messwert.

Betrachten die ganze Angelegenheit jedoch relativistisch aus Sicht eines Beobachters von der Erde aus, so muss die Zeitdilatation mit in Betracht gezogen werden.³ Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ aus (27) gilt nur aus Sicht des Myons. Also müssen wir sie in unser Bezugssystem umrechnen:

$$T'_{1/2} = \gamma \cdot T_{1/2} \quad (33)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 0.995^2}} \cdot 1.56 \mu s \quad (34)$$

$$\approx 15.6 \mu s \quad (35)$$

² Typischerweise entsteht zunächst ein geladenes Pion, welches anschließend zerfällt:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

³ Man kann natürlich auch die Sicht des Myons als Bezugssystem verwenden. Es läuft aber auf das Gleiche hinaus, da der γ -Faktor dann durch die Längenkontraktion eingeführt wird. Anstatt dem Myon mehr Zeit zu geben muss es nun also weniger Strecke zurücklegen.

Demnach ergibt sich in (28) eingesetzt:

$$N(4.53 \mu s) = 560 \text{ h}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{4.53 \mu s / 15.6 \mu s} \quad (36)$$

$$\approx 457.9 \text{ h}^{-1} \quad (37)$$

Dieser Wert ist schon deutlich näher am tatsächlichen Messwert von 420 Teilchen pro Stunde.

4.2 Weitere Nachweise

4.2.1 Hafele-Keating-Experiment

Im Hafele-Keating-Experiment wurden Atomuhren in einem kommerziellen Linienflugzeug transportiert durch die relative Geschwindigkeit und dem Unterschied im Gravitationspotential. Die Uhren zeigten einen messbaren Unterschied zu auf der Erdoberfläche verbliebenen Uhren.

4.2.2 Global Positioning System (GPS)

Obwohl sich Satelliten mit nur einem Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit bewegen und die aus der Zeitdilatation resultierende Zeitabweichung nur wenige Mikrosekunden pro Tag beträgt⁴, muss dies in den sensiblen Berechnung für das GPS, die sich eben darauf beziehen, wie viel Zeit Licht zur Kommunikation benötigt hat, um Entfernungen zu bestimmen, berücksichtigt werden.

5 Zusammenfassung

Sowohl das Zwillingen-, wie auch das Garagenparadoxon lassen sich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie theoretisch nahezu vollständig auflösen. Allerdings sind beide als Gedankenexperimente heutzutage nicht experimentell nachzuweisen. In modernen Anwendungen wie dem GPS, dem sogenannten Hafele-Keating-Experiment, und der Beobachtung des Myonenzerfalls lassen sich die theoretischen Folgen der aufgestellten Theorie durch experimentell ermittelte Messwerte fundieren.

Literatur

- [1] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 5. edition, 2006.
- [2] W. Rindler. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2. edition, 2006.

⁴ Gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie verursacht auch die Gravitation eine Abweichung. Diese ist sogar noch etwas stärker.