Kopplungen linearer Multipletts in der $N = 1$ Supersymmetrie

Diplomarbeit am
II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

Vorgelegt von
Jacek Swiebodzinski

Februar 2006

Gutachter der Diplomarbeit:	Prof. Dr. Jan Louis
Zweitgutachter:	Jun.-Prof. Dr. Henning Samtleben

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Globale Supersymmetrie **9**
2.1 Die SUSY-Algebra 9
2.2 Irreduzible Darstellungen 10
2.3 Infinitesimale SUSY-Transformationen und Superfeld-Formalismus 11
2.4 Das chirale Multiplett 13
2.5 Das Vektormultiplett 14
2.6 Die Projektionstechnik 15
2.7 Supersymmetrische Lagrangedichten 15

3 Das lineare Multiplett **19**
3.1 Das lineare Multiplett 19
3.2 Eichinvariante Wirkungen 21
3.2.1 Kinetischer Term 21
3.2.2 Massenterm 22
3.3 Dualitätstransformationen 23

4 Supersymmetrie und WZ-Eichung **25**
4.1 SUSY-Transformationen des chiralen Spinorsuperfeldes 25
4.2 SUSY-Transformationen und WZ-Eichung 29

5 Kopplungen linearer Multipletts **33**
5.1 Verallgemeinerung des kinetischen Terms 33
5.1.1 Renormierbarer Fall 33
5.1.2 Nicht renormierbarer Fall 34
5.2 Verallgemeinerung des Massenterms 35
5.3 Komponenteninhalt des Massenterms der Lagrangedichte 40
5.4 Minima des skalaren Potentials 44

6 Dualitätstransformationen **47**
6.1 Masseloser Fall 47
6.1.1 First-order Lagrangedichte 47
6.1.2 Komponentengestalt der dualen Lagrangedichte 49
6.1.3 Kinetischer Term und skalares Potential 51
6.2 Massiver Fall 52
6.2.1 First-order Lagrangedichte 52
6.2.2 Komponentengestalt der Lagrangedichte 56
6.2.3 Kopplungsmatrix und Freiheitsgrade 57

6.2.4 Transformation der Eichbedingung 58
6.2.5 Skalares Potential 59
6.3 Nichtabelscher Fall 62

7 Zusammenfassung **65**

A Identitäten **67**
A.1 Konventionen und Spinoralgebra 67
A.2 Bispinoren 69
A.3 Integration über die Grassmannkoordinaten 69
A.4 Identitäten mit kovarianten Ableitungen 70
A.5 Variationsregeln für Superfelder 70

B Taylor-Entwicklung im Superraum **71**
B.1 Allgemeines 71
B.2 Spezielle Entwicklungen 72

C Eigenschaften der Massenmatrizen **75**
C.1 Symmetrieeigenschaften 75
C.2 Inverse Matrizen 76

D Nichtabelsche Supersymmetrie **79**

Kapitel 1

Einleitung

Alle aus dem Standardmodell der Elementarteilchen bekannten Symmetrie-Transformationen haben eine Eigenschaft gemeinsam: Sie lassen den Spin eines Teilchens unverändert. Die Anwendung z.B. einer Lorentz-Transformation auf ein Fermion wird nichts anderes als ein Fermion zum Ergebnis haben. Es scheint so, als wären die grundlegenden Konstituenten der Materie, die Fermionen sind, von den Trägern der Kräfte, den Austauschteilchen mit bosonischem Charakter, grundsätzlich verschieden, mit ihnen unvereinbar. Tatsächlich zeigen beide unterschiedliche Eigenschaften, die aus dem Unterschied der zugrundeliegenden Statistiken resultieren: der Fermi-Dirac-Statistik mit ihrem Pauli-Verbot und der Bose-Einstein-Statistik. Es erscheint zunächst nicht zwingend notwendig diese Kluft zu schließen, nicht zwingend, solange man von einem gewissen ästhetischen Grundbedürfnis absieht. Dass dieses ästhetische Grundbedürfnis oft genug eine entscheidende Rolle bei der Entwicklung wegweisender Ideen in der Physik gespielt hat, sollte zunächst ohne Bedeutung sein und hat auf die Richtigkeit oder Falschheit einer Theorie keine Aussagekraft. Dennoch scheinen wir uns von einer Theorie, die die komplexe Vielschichtigkeit der erfahrbaren Welt in möglichst einfacher, geschlossener mathematischer Form beschreibt, sehr stark angezogen zu fühlen.

In Wirklichkeit gibt es aber eine Reihe innerhalb des Standardmodells unverstandener, physikalischer Phänomene, wie gravitative Effekte bei hohen Energien, das Hierarchie - Problem, dunkle Materie u.a. (s. z.B. [1]), die die Vermutung nahelegen, dass das Standardmodell nur eine effektive niederenergetische Theorie ist und damit die Suche nach seinen Erweiterungen motivieren. Eine mögliche Erweiterung, die Ansätze zur Lösung vieler dieser Probleme liefert und gleichzeitig die oben beschriebene Kluft zwischen Bosonen und Fermionen zu schließen vermag, ist die Supersymmetrie (SUSY) (s. [2, 3, 4, 5] für eine Übersicht). Dennoch vermag sie nicht alle mit dem Standardmodell verbundenen Probleme zu lösen, so dass die Überzeugung vorherrscht, dass sie höchstens eine Zwischenstufe zu einer allumfassenden Theorie darstellt. Ein Kandidat für die letztere ist die Superstringtheorie[1] [6], für die die Supersymmetrie eine notwendige Voraussetzung bildet.

Die Supersymmetrie vereinbart beide Statistiken, indem sie die Invarianz der Theorie bezüglich sog. Supersymmetrietransformationen, das heißt Transformationen, die Fermionen in Bosonen umwandeln und umgekehrt, fordert. Im Rahmen einer supersymmetrischen Beschreibung wird das Teilchenspektrum jedoch verdoppelt: Jedes Teilchen des Standardmodells bekommt einen Superpartner gleicher Masse aber unterschiedlichen Spins zugewiesen. Da diese Teilchen in der Natur nicht beobachtet werden, kann Supersymmetrie, wenn überhaupt, nur in gebrochener Form realisiert sein.

[1] Es ist nicht ganz richtig von *der* Superstringtheorie zu sprechen. Tatsächlich gibt es fünf verschiedene String-Theorien: Vom Typ I, IIA, IIB und die beiden heterotischen $E_8 \times E_8$ und $SO(32)$.

Ein großer Teil der Motivation für die vorliegende Arbeit erwächst aus der Superstringtheorie. Wir wollen daher kurz darauf eingehen: Die Superstringtheorie, die historisch betrachtet der Ausgangspunkt zur Entwicklung von Supersymmetrie gewesen ist (s. hierzu etwa [7]), bedarf zu ihrer Konsistenz der Einführung zusätzlicher räumlicher Dimensionen. Um die Beschreibung mit der beobachteten Vierdimensionalität der Welt in Einklang zu bringen, nimmt man an, dass die gesamte Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{10}$ ein Produkt aus der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit $\mathcal{M}_4$ und einer kompakten (sechsdimensionalen) Mannigfaltigkeit Y_6 ist

$$\mathcal{M}_{10} = \mathcal{M}_4 \times Y_6 \ .$$

Ein Beispiel für eine solche kompakte Mannigfaltigkeit sind die Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Die Klasse der möglichen Calabi-Yau's ist sehr groß und verschiedene Y_6 werden zu verschiedenen Theorien in 4 Dimensionen führen.

In [8] wird die Lagrangedichte der Type IIB Stringtheorie bei Anwesenheit von Hintergrundflüssen auf den Calabi-Yau-Orientifolds kompaktifiziert. In der effektiven $N = 1$ Wirkung tritt ein massives antisymmetrisches Tensorfeld auf. Ein antisymmetrischer Tensor ist Bestandteil des linearen Multipletts und in [9] wird gezeigt, dass die effektive Wirkung sich innerhalb der $N = 1$ Supersymmetrie aus der Konstruktion einer eichinvarianten Wirkung für das lineare Multiplett über den Stückelberg-Mechanismus ergibt. Es erwächst in natürlicher Weise die Frage, in wie weit sich die dortigen Betrachtungen auf den Fall von mehreren linearen Multipletts ausdehnen lassen. Es ist ein erstes Ziel der vorliegenden Arbeit, dieser Frage nachzugehen und eine Lorentz- und eichinvariante Wirkung für eine beliebige Anzahl linearer Multipletts zu konstruieren. Bei der Konstruktion der massiven Lagrangedichte verwenden wir wiederum den Stückelberg-Mechanismus [10, 11]. Bevor wir dies genauer erläutern, wollen wir zunächst auf Eichtheorien, die eine große Rolle in dieser Arbeit spielen, eingehen.

Die Eichinvarianz einer Theorie bedeutet stets, dass zur theoretischen Beschreibung des Systems mehr Freiheitsgrade hinzugezogen werden, als das System physikalische Freiheitsgrade tatsächlich besitzt. Dieser Überschuss an Information kann wieder bereinigt werden, indem man eine Zusatzbedingung an das System erzwingt. Man spricht von der Wahl einer Eichung. Diese Reduktion der in der Beschreibung des Systems auftretender Freiheitsgrade geht mit einer Verminderung der Symmetrie des Systems einher. Oft wird jedoch in der Physik ein anderer Weg beschritten, bei dem die „Redundanz" der Beschreibung zu Gunsten einer stärkeren Symmetrie in Kauf genommen wird.

Der antisymmetrische Tensor ist im linearen Multiplett über seine Feldstärke, eine 3-Form, enthalten, während er im chiralen Spinormultiplett in direkter Weise auftritt. Das lineare Multiplett ist das Feldstärkemultiplett des chiralen Spinorsuperfeldes. Es zeigt Eichinvarianz gegenüber bestimmten Transformationen, so dass man für das Spinorsuperfeld eine Eichung, die sog. WZ-Eichung, wählen darf, ohne dass dies eine Auswirkung auf das lineare Multiplett besitzt. Während im masselosen Fall eine supersymmetrische Wirkung durch das lineare Multiplett selbst beschrieben wird, muss im massiven Fall das chirale Spinorsuperfeld hinzugezogen werden. Bei der Konstruktion der Massenterme über den Stückelberg-Formalismus geht man den folgenden Weg. Es zeigt sich, dass diejenigen Terme, die zur Konstruktion der massiven Lagrangedichte notwendig sind, nicht mehr die Eichinvarianz des masselosen Systems besitzen. In der Sprache der Freiheitsgrade bedeutet das, dass die massiven Felder zusätzliche physikalische Freiheitsgrade tragen. Einen Ausweg liefert der Stückelberg-Formalismus, indem er ein Kompensationsfeld einführt, das die zusätzlichen Freiheitsgrade trägt und durch sein Transformationsverhalten die Eichinvarianz sichert.

Wir haben bereits erwähnt, dass man für das chirale Spinorsuperfeld die WZ-Eichung wählen darf, ohne dabei das lineare Multiplett zu beeinflussen. Bei der Konstruktion der massiven

Lagrangedichte über den Stückelberg-Mechanismus werden die massiven Freiheitsgrade abgekoppelt, so dass das Spinorsuperfeld wieder in der WZ-Eichung erscheint. Nun wird aber bei einer Supersymmetrie-Transformation die WZ-Eichung zerstört. Dennoch gibt es eine Möglichkeit, die WZ-Eichung dabei zu erhalten, und zwar wenn man bei einer geeigneten Wahl des Eichtransformationsparameters Supersymmetrie- und Eichtransformationen simultan ausführt. Wir untersuchen diese Möglichkeit für das Spinorsuperfeld und bestimmen den betreffenden Parameter. Wir prüfen die Auswirkungen dieser modifizierten Transformation auf das Vektormultiplett, das die Rolle des Kompensationsfeldes im Stückelberg-Mechanismus spielt. Dabei beschränken wir uns auf eine Theorie mit nur einem linearen Multiplett und schließen damit eine Lücke in der Analyse von [8].

Ein weiteres Ziel dieser Diplomarbeit besteht in der Untersuchung der Dualitäten linearer Multipletts. Die Dualität zweier Theorien bedeutet hier, dass sich beide aus einer übergeordneten Lagrangedichte, der sog. first-order Lagrangedichte $\mathcal{L}_{first}$ herleiten lassen, wenn man die aus $\mathcal{L}_{first}$ folgenden Bewegungsgleichungen dorthin wieder einsetzt. Wir stellen eine first-order Lagrangedichte auf, aus der sich nach diesem Schema die zuvor konstruierte massive Theorie mehrerer linearer Multipletts ergibt. Wir zeigen, dass die hierzu duale Theorie durch massive Vektormultipletts beschrieben wird. Entsprechende Überlegungen sind in dieser Form für den allgemeinen Fall mehrerer linearer Multipletts bisher nicht durchgeführt worden.

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt:

- In Kapitel 2 stellen wir die Grundlagen der globalen Supersymmetrie vor. Den Schwerpunkt legen wir auf den Superfeldformalismus, der die Grundlage für die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen bildet. Wir stellen das chirale und das Vektormultiplett vor und erläutern die Konstruktion supersymmetrischer Lagrangedichten. Des weiteren wird eine kurze Einführung in die Projektionstechnik gegeben.

- Das für diese Arbeit fundamentale lineare Multiplett ist Gegenstand des 3. Kapitels. Wir diskutieren seinen Komponenteninhalt und erläutern sein Verhalten bei Eichtransformationen, das ihn als Feldstärkemultiplett des chiralen Spinorsuperfeldes charakterisiert. Wir erklären die Konstruktion einer Lorentz- und eichinvarianten Wirkung über den Stückelberg-Mechanismus. Schließlich erläutern wir die Dualität zwischen dem linearen und dem chiralen Multiplett, die im masselosen Fall besteht.

- In Kapitel 4 wenden wir uns dem chiralen Spinorsuperfeld zu und konzentrieren uns auf sein Verhalten bei SUSY- und Eichtransformationen. Wir berechnen die explizite Gestalt der Supersymmetrie - Transformationen seiner Komponentenfelder und zeigen, dass bei einer geeigneten Wahl des Eichtransformationsparameters die gleichzeitige Ausführung von SUSY- und Eichtransformationen die WZ-Eichung nicht zerstört. Eine analoge Betrachtung führen wir für das Feldstärkemultiplett des Vektorsuperfeldes durch. Dabei stoßen wir auf eine interessante Möglichkeit die Supersymmetrie über ein skalares Feld, das kein Hilfsfeld ist, zu brechen.

- Im 5. Kapitel konstruieren wir eine Lorentz- und eichinvariante Wirkung für mehrere lineare Multipletts, die an Vektormultipletts koppeln. Ferner erlauben wir die Kopplung an chirale Multipletts. Wir betrachten zunächst den kinetischen Term der Lagrangedichte und geben seine Komponentengestalt an. Im zweiten Schritt wenden wir uns einer massiven Theorie zu, die die Anwendung des Stückelberg-Mechanismus erfordert. Wir definieren die Massen, die in diesem Fall durch quadratische Matrizen beschrieben werden. Wir geben ferner die Komponentengestalt der Lagrangedichte an. Schließlich zeigen wir, dass das skalare Potential nur ein triviales Minimum besitzt.

- Im 6. Kapitel betrachten wir die Dualitäten des antisymmetrischen Tensors. Wir stellen die first-order Lagrangedichten für mehrere lineare Multipletts im masselosen und im massiven Fall auf und stellen die Dualität zwischen masselosen linearen und masselosen chiralen Multipletts sowie massiven linearen und massiven Vektormultiplett her. Wir zeigen, dass im massiven Fall die von uns aufgestellte first-order Lagrangedichte einer über die Formulierung massiver Freedman-Townsend-Modelle im $N = 1$ Superraum gewonnenen Lagrangedichte [12] entspricht, sofern man jene im abelschen Limes betrachtet.

- Die Anhänge geben einen Überblick über die in dieser Arbeit verwendeten Konventionen und nützliche Identitäten, nichtabelsche Supersymmetrie und die Taylor-Entwicklung im Superraum. Im letzteren geben wir die Komponentengestalt einiger spezieller, in dieser Arbeit benutzter Entwicklungen an.
  Die Konstruktion der Lagrangedichte für mehrere massive lineare Multipletts über den Stückelberg-Mechanismus erfordert die Einführung von i. a. nichtquadratischen Kopplungsmatrizen und quadratischen Massenmatrizen. Bei späteren Berechnungen, wie z. B. den Dualitätstransformationen, spielen gewisse Eigenschaften dieser Matrizen, insbesondere die Invertierbarkeit bestimmter aus ihnen gebildeter Produkte, eine entscheidende Rolle. Im Anhang besprechen wir diese Eigenschaften und geben das Inverse eines solchen in dieser Arbeit aufgetretenen Produktes an.

Kapitel 2

Globale Supersymmetrie

Und ich so hässlich auf dieser schönen Welt
Friedrich Schiller, Die Räuber

2.1 Die SUSY-Algebra

Die Forschung auf dem Gebiet der theoretischen Hochenergiephysik wurde stets von dem tiefen Glauben begleitet, dass sich die fundamentalen Wechselwirkungen der Natur im Rahmen eines Formalismus von übergeordneten Symmetrieprinzipien beschreiben lassen. Aus diesem Glauben heraus erwuchs das Bemühen, die bekannten Wechselwirkungen durch Auffindung von Symmetriegruppen, die die bestehenden Symmetrien in natürlicher Weise enthielten, zu vereinigen. Ein Ansatz hierzu war, nach Erweiterungen der Poincaré-Gruppe und der durch sie beschriebenen Raumzeit-Symmetrien[1] zu suchen.

Auf der Suche nach möglichen Erweiterungen der Poincaré-Gruppe zu einer übergeordneten Symmetriegruppe stießen Coleman und Mandula 1967 auf ein Theorem [13], das besagt, dass bei Aufrechterhaltung gewisser allgemeiner Forderungen wie z.B. Lokalität und Positivität der Energie jede Symmetriegruppe der S-Matrix höchstens ein direktes Produkt der Poincaré-Gruppe und einer inneren Symmetriegruppe sein kann. Mit der Betrachtung der Poincaré-Gruppe wären damit die möglichen Raumzeit-Symmetrien im wesentlichen ausgeschöpft, keine weitere Vereinigung mit einer inneren Symmetriegruppe wäre möglich.

Das Coleman-Mandula-Theorem befasst sich nur mit Symmetrien, die durch bosonische Generatoren erzeugt werden, lässt also einen gewissen Ausweg zu, wenn man auch fermionische Generatoren erlaubt. Damit muss man aber neben Kommutatoren auch Antikommutatoren zulassen und somit auf die Lie-Algebra-Struktur der Generatoren verzichten. Eine Algebra, die neben Kommutatoren auch Antikommutatoren enthält, bezeichnet man als graduierte Lie-Algebra. Haag, Lopuszanski und Sohnius haben gezeigt [14], dass die einzige graduierte Lie-Algebra, die mit relativistischer Quantenfeldtheorie vereinbar ist, die Supersymmetrie-Algebra

[1] Neben den Raumzeit-Symmetrien unterscheiden wir sog. innere Symmetrien, d.h. Symmetrien die nicht auf die Raumzeit wirken.

ist. Wir geben ihre Struktur an [2]:

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\}_+ &= 2\sigma^m_{\alpha\dot\beta} P_m \ , \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\}_+ &= \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\}_+ = 0 \ , \\
[P_m, Q_\alpha]_- &= [P_m, \bar{Q}_{\dot\alpha}]_- = 0 \ , \\
[M_{mn}, Q_\alpha]_- &= \frac{1}{2}(\sigma_{mn})_\alpha{}^\beta Q_\beta \ , \qquad [M_{mn}, \bar{Q}_{\dot\alpha}]_- = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot\beta}(\bar\sigma_{mn})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \ , \\
[P_m, P_n]_- &= 0 \ , \\
[P_m, M_{rs}]_- &= i\left(g_{mr}P_s - g_{ms}P_r\right) \ , \\
[M_{mn}, M_{rs}]_- &= i\left(g_{nr}M_{ms} - g_{ns}M_{mr} - g_{mr}M_{ns} + g_{ms}M_{nr}\right) .
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

Die letzten drei Zeilen sind die gewöhnliche Poincaré-Algebra. Die anderen Gleichungen stellen die Graduierung dar. Die Bezeichnungen sind wie folgt gewählt: Griechische Buchstaben laufen von eins bis zwei und bezeichnen zweikomponentige Weyl-Spinoren, kleine lateinische Buchstaben entsprechen Lorentz-Indizes und laufen von 0 bis 3. Mit (2.1.1) haben wir die SUSY-Algebra für den in dieser Arbeit ausschließlich betrachteten Fall der $N = 1$ Supersymmetrie aufgestellt, wobei N die Anzahl der Paare von Supersymmetrie-Generatoren Q bezeichnet.

An der ersten der Gleichungen (2.1.1) erkennt man, dass die SUSY-Generatoren für sich keine Algebra bilden. Die Anwendung des Antikommutators führt aus dem Raum der Q's heraus. Dies ist ein wesentliches Merkmal graduierter Algebren. Ferner erkennt man an dieser Gleichung, dass der Antikommutator der SUSY-Generatoren eine Translation im Minkowski-Raum zur Folge hat. Wir werden uns diesem Aspekt in Abschnitt 2.3 widmen. Zuvor wollen wir jedoch die irreduziblen Darstellungen der SUSY-Algebra angeben.

2.2 Irreduzible Darstellungen

Es ist üblich die irreduziblen Darstellungen mit Hilfe der Eigenwerte von Casimir-Operatoren[2] zu klassifizieren. Bei der Poincaré-Algebra, mit ihren beiden Casimir-Operatoren $P^2 = P^\mu P_\mu$ und $W^2 = W^\mu W_\mu$, wobei P^μ der Vierer-Impuls und $W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}$ der Pauli-Lubanski-Vektor ist, enspricht dies einer Klassifikation nach Masse und Spin.[3] Dies begründet eine Identifikation der Elementarteilchen mit den irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe.

Die SUSY-Algebra besitzt die beiden Casimir-Operatoren

$$
P^2 = P^\mu P_\mu \qquad \text{und} \qquad C^2 = C^{\mu\nu}C_{\mu\nu} \tag{2.2.1}
$$

mit

$$
C^{\mu\nu} = Y^\mu P^\nu - Y^\nu P^\mu, \qquad\qquad Y^\mu = W^\mu - \frac{1}{4}Q\sigma^\mu\bar{Q} \ . \tag{2.2.2}
$$

Insbesondere ist W^2 kein Casimir der SUSY-Algebra mehr und die oben beschriebene Identifikation von Teilchen und Darstellungen nicht mehr möglich. Vielmehr sind die irreduziblen

[2] Ein mit allen Generatoren einer Gruppe kommutierender Operator wird als Casimir-Operator, oder kurz Casimir, der Gruppe bezeichnet.

[3] Wir betrachten hier den massiven Fall. Im masselosen Fall wird die Unterscheidung nach der Helizität vorgenommen.

Darstellungen nun Teilchenmultipletts, in deren Bestand Teilchen gleicher Masse, jedoch unterschiedlichen Spins gehören. Um die massiven irreduziblen Darstellungen zu bestimmen, dürfen wir ins Ruhesystem wechseln. Für (2.2.1) können wir dann schreiben

$$P^2 = m^2, \qquad C^2 = 2m^4 J^k J_k \ . \tag{2.2.3}$$

Dabei ist

$$mJ_k = mS_k - \frac{1}{4}(\bar{Q}\bar{\sigma}_k Q) = Y_k \ , \tag{2.2.4}$$

wo S_k die k-te Komponente des Spinoperators kennzeichnet. Die J^k gehorchen den Drehimpulsvertauschungsrelationen

$$[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k \tag{2.2.5}$$

und $\mathbf{J}$ stellt somit einen verallgemeinerten Drehimpuls mit den Eigenwerten $j(j+1)$, wobei j ganz- oder halbzahlig ist, dar. Wir schlussfolgern: Die irreduziblen Darstellungen lassen sich durch die beiden Eigenwerte (m, j) vollständig beschreiben.

Die Antikommutatoren der SUSY-Algebra nehmen im Ruhesystem die Gestalt einer Clifford-Algebra an

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0, \qquad \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} = 2m\delta_{\alpha\dot{\alpha}} \ . \tag{2.2.6}$$

Bis auf die Normierung entsprechen sie also Auf- und Absteigeoperatoren. Angefangen mit einem Zustand Ω,

$$Q_\alpha \Omega = 0 \ , \tag{2.2.7}$$

der als Clifford-Vakuum[4] bezeichnet wird, erhalten wir die Zustände innerhalb einer irreduziblen Darstellung durch Wirkung der $\bar{Q}$'s auf Ω. Die so konstruierten Zustände lassen sich durch die Quantenzahlen j_3, s_3 sowie den Impulseigenwert p_μ charakterisieren. Dabei durchläuft j_3 die Werte $j, j-1, \ldots, -j$ und zu jedem Wert von j_3 gehören die Werte $j_3, j_3 + \frac{1}{2}, j_3 - \frac{1}{2}, j_3$ von s_3.

2.3 Infinitesimale SUSY-Transformationen und Superfeld-Formalismus

Im Superfeld-Formalismus wird die Supersymmetrie besonders ästhetisch manifest. Wie bei der Relativitätstheorie, wo sich relativistische Kovarianz beim Übergang zum um die Zeitdimension erweiterten, höherdimensionalen Minkowski-Raum in natürlicher Weise zeigt, lebt die Supersymmetrie in einem um Grassmann-Koordinaten erweiterten Superraum. Im Rahmen einer solchen Beschreibung erhält man die irreduziblen Darstellungen durch Aufstellen SUSY-kovarianter Bedingungen an im Superraum definierte Funktionen, die Superfelder. Wir wollen die wesentlichen Schritte angeben, die zum Superfeld-Formalismus führen.

Wir bemerken zunächst [2], dass sich die SUSY-Algebra vollständig durch Kommutatoren beschreiben lässt, wenn man untereinander sowie mit den SUSY-Generatoren $Q^\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ antikommutierende Parameter $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ einführt:

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\theta^\alpha, Q_\beta\} = \cdots = [P_m, \theta^\alpha] = 0 \ , \tag{2.3.1}$$

so dass

$$\begin{aligned} [\theta Q, \bar{\theta}\bar{Q}] &= 2\theta\sigma^m\bar{\theta}P_m \\ [\theta Q, \theta Q] &= [\bar{\theta}\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}] = 0 \\ [P^m, \theta Q] &= [P^m, \bar{\theta}\bar{Q}] = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

[4] Das Clifford-Vakuum entspricht i.a. *nicht* dem Zustand niedrigster Energie.

Damit erhalten wir formal die Struktur einer Lie-Algebra mit antikommutierenden Parametern und die aus der Theorie der Lie-Gruppen bekannten Vorgehensweisen [15] können einfach übernommen werden. Insbesondere können wir die der Algebra korrespondierenden Gruppenelemente durch Exponentiation der Generatoren gewinnen:

$$G(x,\theta,\bar{\theta}) = e^{i(-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})} \ . \tag{2.3.3}$$

Gruppenmultiplikation kann mittels der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\ldots} \tag{2.3.4}$$

ausgewertet werden. Aufgrund von (2.3.2) werden höhere Kommutatoren nicht auftreten und bei der Hintereinanderausführung zweier Gruppenelemente erhalten wir

$$G(0,\epsilon,\bar{\epsilon})G(x,\theta,\bar{\theta}) = G(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma^m\bar{\theta}, \theta+\epsilon, \bar{\theta}+\bar{\epsilon}) \ . \tag{2.3.5}$$

Wir sehen, dass selbst wenn man $x^m = 0$ setzt, also nicht im Minkowski-Raum verschiebt, man dennoch bei zwei aufeinander folgenden Transformationen mit SUSY-Parametern $\theta \neq 0$ und $\epsilon \neq 0$, eine Verschiebung im Minkowski-Raum erhält.

Die rechte Seite von (2.3.5) entspricht wieder einem Gruppenelement der Form (2.3.3). Die Multiplikation von Gruppenelementen (2.3.3) induziert demnach eine Verschiebung in dem durch die acht Koordinaten $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ aufgespannten Parameterraum. Der um die vier Grassmann-Koordinaten erweiterte Minkowski-Raum

$$\mathbb{R}^{4|4} := \left\{ z^M = \left(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right)_{\substack{m=0,1,2,3 \\ \alpha,\dot{\alpha}=1,2}} \right\} \tag{2.3.6}$$

wird als Superraum bezeichnet [2]. Er entspricht dem Parameterraum der SUSY-Algebra (2.3.2). Eine operatorwertige Funktion f auf $\mathbb{R}^{4|4}$ nennt man ein Superfeld. Wir können es durch seine Entwicklung nach den Potenzen von θ und $\bar{\theta}$ erklären. Aufgrund des Grassmann-Charakters dieser Variablen wird die Reihe endlich sein. Das allgemeine Superfeld hat dann die Gestalt:

$$\begin{aligned} f(x,\theta,\bar{\theta}) \quad = \quad & g(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\xi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) \\ & + \theta\sigma^m\bar{\theta} v_m(x) + \theta\theta\bar{\theta}\lambda(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} d(x) \ . \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Die als Koeffizienten auftretenden Funktionen von x werden als Komponentenfelder bezeichnet.

Wir wollen nun eine SUSY-Transformation mit infinitesimalen Parametern betrachten. Ihre Wirkung auf ein Superfeld f wird gemäß (2.3.5) wie folgt sein

$$\begin{aligned} f(x^m,\theta,\bar{\theta}) \longrightarrow & f(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma^m\bar{\theta}, \theta+\epsilon, \bar{\theta}+\bar{\epsilon}) \\ & = \left[1 + \epsilon\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\right) + \bar{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\bar{\sigma}^m\theta\partial_m\right) + \ldots\right] f(x^m,\theta,\bar{\theta}) \ , \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

wobei wir um $(x^m, \theta, \bar{\theta})$ entwickelt und, da ϵ und $\bar{\epsilon}$ infinitesimal, höhere Terme vernachlässigt haben. Aus der Entwicklung des unitären Operators

$$e^{i(-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})}$$

bis zur ersten Ordnung und Koeffizientenvergleich mit (2.3.8) gewinnen wir die Darstellung der SUSY-Generatoren Q und $\bar{Q}$ als Differentialoperatoren im Superraum:[5]

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \ , \qquad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \ . \tag{2.3.9}$$

[5] Der Faktor i wurde aus Konventionsgründen eingeführt.

Als nächstes lassen sich kovariante Ableitungen $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ definieren. Kovarianz bedeutet hier, dass diese Ableitungen invariant gegenüber SUSY-Transformationen sind, d.h.

$$[\delta_\epsilon, D] = [\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}, D] = 0 \tag{2.3.10}$$

und ebenso für $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$. Sie sind durch die folgenden Differentialoperatoren gegeben

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \ , \qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \tag{2.3.11}$$

und erfüllen

$$\begin{gathered}\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \ , \\ \{D_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \ ,\end{gathered} \tag{2.3.12}$$

womit sich (2.3.10) zeigen lässt.

In den nächsten Abschnitten wollen wir die für diese Arbeit wichtigen chiralen und Vektormultipletts vorstellen. Das lineare Multiplett wird in Kapitel 3 eingeführt.

2.4 Das chirale Multiplett

Das chirale Multiplett ist durch die Wirkung der kovarianten Ableitung (2.3.11) auf ein Superfeld über die Bedingung

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{2.4.1}$$

definiert. Um die θ-Entwicklung von Φ zu bestimmen, ist es üblich zu neuen Koordinaten $(y^m, \theta, \bar{\theta})$ überzugehen, wobei

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta} \ . \tag{2.4.2}$$

Dies ist insoweit gerechtfertigt, als in den neuen Variablen (2.4.2) die kovariante Ableitung in (2.4.1)

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}$$

wird. Somit löst jede Funktion, die nur von θ und y^m abhängt, die Gleichung (2.4.1) und das allgemeine chirale Superfeld besitzt die Entwicklung:

$$\begin{aligned}\Phi(y,\theta) =& A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ =& A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x) \\ &+ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \ .\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Komponentengestalt in (2.4.3) haben wir für y^m (2.4.2) eingesetzt und um die Stelle x^m entwickelt. Die Komponentenfelder des chiralen Multipletts sind die beiden komplexen, skalaren Felder A und F, wobei F, wie sich später zeigen wird, die Rolle eines Hilfsfeldes spielt, sowie das komplexe Weyl-Spinorfeld ψ. Das chirale Multiplett entspricht der irreduziblen Darstellung aus Abschnitt 2.2 für $j = 0$.

In analoger Weise wird das antichirale Superfeld durch die Bedingung

$$D_\alpha\bar{\Phi} = 0 \tag{2.4.4}$$

definiert. Seine θ-Entwicklung bestimmt sich aus (2.4.3) durch komplexe Konjugation zu

$$\begin{aligned}\bar\Phi(\bar y,\bar\theta) =& A^*(\bar y)+\sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(\bar y)+\bar\theta\bar\theta F^*(\bar y)\\ =& A^*(x)-i\theta\sigma^m\bar\theta\partial_m A^*(x)+\frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A^*(x)\\ &+\sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(x)+\frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^m\partial_m\bar\psi(x)+\bar\theta\bar\theta F^*(x)\ .\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

(Anti-)chirale Superfelder beschreiben Materiefelder.

2.5 Das Vektormultiplett

Das Vektormultiplett V, durch die Bedingung

$$V=V^\dagger \tag{2.5.1}$$

definiert, ist ein reelles Superfeld. Seine θ-Entwicklung ist

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\bar\theta) =& C(x)+i\theta\chi(x)-i\bar\theta\bar\chi(x)+\frac{i}{2}\theta\theta\Big(M(x)+iN(x)\Big)\\ &-\frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta\Big(M(x)-iN(x)\Big)-\theta\sigma^m\bar\theta v_m(x)+i\theta\theta\bar\theta\Big(\bar\lambda(x)+\frac{i}{2}\bar\sigma^m\partial_m\chi(c)\Big)\\ &-i\bar\theta\bar\theta\theta\Big(\lambda(x)+\frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar\chi(x)\Big)+\frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Big(D(x)+\frac{1}{2}\Box C(x)\Big)\ .\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

Dabei sind C, D, M, N reelle skalare Felder, v_m ein reelles Vektorfeld und χ, λ Weyl-Spinoren.

Wir betrachten nun die folgende Transformation

$$V\longrightarrow V+\Phi+\bar\Phi\ , \tag{2.5.3}$$

wobei Φ eine chirales und $\bar\Phi$ ein antichirales Superfeld ist. Mit (2.4.3) bedeutet dies für die Komponentenfelder von V

$$\begin{aligned}C&\to C+A+A^*\ , & \chi&\to\chi-i\sqrt{2}\psi\ ,\\ M+iN&\to M+iN-2iF\ , & v_m&\to v_m-i\partial_m(A-A^*)\ ,\\ \lambda&\to\lambda\ , & D&\to D\ .\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

Wir erkennen, dass das Transformationsverhalten des Vektorfeldes v_m einer $U(1)$-Eichtransformation entspricht. Gleichung (2.5.3) stellt somit eine supersymmetrische Verallgemeinerung der Eichtransformation dar.

An (2.5.4) können wir ablesen, dass wir eine spezielle Eichung wählen können, in der die Felder C, M, N und χ verschwinden. Eine solche Eichung wird in der Literatur als Wess-Zumino- oder kurz WZ-Eichung bezeichnet [2]. Sie lässt weiterhin eine $U(1)$-Eichfreiheit. In der WZ-Eichung nimmt V die folgende Gestalt an:

$$V_{WZ}=-\theta\sigma^m\bar\theta v_m(x)+i\theta\theta\bar\theta\bar\lambda(y)-i\bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x)+\frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x)\ . \tag{2.5.5}$$

Wir wollen nun Feldstärken für das Vektormultiplett konstruieren. Diese sollten invariant unter (2.5.3) sein und können nach (2.5.4) die Felder λ, $\bar\lambda$, D sowie die Feldstärke $F_{lm}=\partial_l v_m-\partial_m v_l$ enthalten. Eine kovariante Bedingung für ein solches Feldstärkemultiplett ist mit

$$W_\alpha=-\frac{1}{4}\bar D\bar D D_\alpha V\ ,\qquad \bar W_{\dot\alpha}=-\frac{1}{4}DD\bar D_{\dot\alpha}V \tag{2.5.6}$$

gefunden, was als Definition von W_α und $\bar{W}_{\dot\alpha}$ zu lesen ist. Wir wollen zeigen, dass (2.5.6) tatsächlich eichinvariant ist.

$$\begin{aligned} W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}^{\dot\alpha}D_\alpha V \quad \longrightarrow \quad W'_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}^{\dot\alpha}D_\alpha(V+\Phi+\bar\Phi) \\ &= -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}^{\dot\alpha}D_\alpha V + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\alpha}D_\alpha\Phi \\ &= -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}^{\dot\alpha}D_\alpha V - \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot\alpha}D_\alpha\bar{D}_{\dot\alpha}\Phi - \frac{i}{2}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar{D}^{\dot\alpha}\Phi \\ &= -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{D}^{\dot\alpha}D_\alpha V \ , \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

wobei wir mehrmals die Chiralitätsbedingung (2.4.1) und im vorletzten Schritt die Relation (2.3.12) benutzt haben. Um die Komponentengestalt von W_α anzugeben, dürfen wir aufgrund der Eichinvarianz V in der WZ-Eichung nehmen. Es zeigt sich [2], dass

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y) + \Big(\delta_\alpha{}^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\beta F_{mn}(y)\Big)\theta_\beta + \theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{\dot\alpha}(y) \ , \\ \bar{W}_{\dot\alpha} &= i\bar\lambda_{\dot\alpha}(\bar y) + \Big(\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}D(\bar y) + \frac{i}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(\bar\sigma^m\sigma^n)^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}F_{mn}(\bar y)\Big)\bar\theta^{\dot\beta} - \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta\bar\sigma^{m\dot\beta\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(\bar y) \ . \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Die Komponentenfelder sind hier Funktionen der Variablen $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar\theta$ bzw. $\bar y^m = x^m - i\theta\sigma^m\bar\theta$ (vgl. (2.4.2)).

2.6 Die Projektionstechnik

Bei der Projektionstechnik [5, 3] werden die Komponentenfelder über die Wirkung der kovarianten Ableitungen auf das Superfeld definiert. So erhält man z.B. für das chirale Multiplett die Komponentenfelder durch die folgenden Projektionen:

$$A(x) = \Phi\big| \ , \qquad \sqrt{2}\psi_\alpha(x) = D_\alpha\Phi\big| \ , \qquad F(x) = -\frac{1}{4}D^2\Phi\big| \ . \tag{2.6.1}$$

Die senkrechten Striche weisen darauf hin, dass jeweils die Komponente nullter Ordnung in θ betrachtet wird. Wir werden diese Technik in Kapitel 4 bei der Berechnung der Supersymmetrie-Transformationen des chiralen Spinorsuperfeldes benutzen. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass sich die Transformationen der Komponentenfelder einzig aus den Eigenschaften der kovarianten Ableitungen ergeben. Wir machen dies am Beispiel des Komponentenfeldes ψ_α aus (2.6.1) deutlich und bemerken zunächst, dass aus der Kombination von (2.3.9) und (2.3.11) die Identität

$$\delta_\varepsilon = (\varepsilon Q + \bar\varepsilon\bar Q) = -(\varepsilon D + \bar\varepsilon\bar D) + 2i(\varepsilon\sigma^m\bar\theta - \theta\sigma^m\bar\varepsilon)\partial_m \tag{2.6.2}$$

folgt. Damit sowie mit der Eigenschaft der Kovarianz (2.3.10) erhält man sofort

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\delta_\varepsilon\psi_\alpha =& D_\alpha\{\delta_\varepsilon\Phi\}\big| = (\varepsilon Q + \bar\varepsilon\bar Q)D_\alpha\Phi\big| = -\varepsilon D D_\alpha\Phi\big| - \bar\varepsilon\bar D D_\alpha\Phi\big| \\ =& - 2\varepsilon_\alpha F(x) - 2i(\sigma^m\bar\varepsilon)_\alpha\partial_m A(x) \ . \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

2.7 Supersymmetrische Lagrangedichten

Ein wesentliches Merkmal von Superfeldern besteht darin, dass sich ihre höchste Komponente bei SUSY-Transformationen in eine Viererdivergenz transformiert [2]. Das Verfahren, um eine supersymmetrische Wirkung zu erhalten, ist demnach, aus einer geeigneten Kombination von Superfeldern die höchste Komponente herauszuprojizieren. Formal entspricht dies einer (Berezin-) Integration im θ-Raum [5].[6] Die entsprechende Kombination von Superfeldern muss natürlich so gewählt werden, dass die Lagrangedichte ein Lorentz-Skalar ist. Weitere Einschränkungen können z.B. aus der Forderung nach Eichinvarianz oder Renormierbarkeit resultieren. Wir können aber zunächst festhalten

$$S = \int d^4x \int d^4\theta \ \mathcal{L} \ . \tag{2.7.1}$$

Im Folgenden wollen wir einige Lagrangedichten für supersymmetrische Theorien, die chirale sowie Vektormultipletts enthalten, angeben [4, 2, 16].

Wir betrachten eine Theorie mit einer bestimmten Anzahl n_C von chiralen Multipletts Φ_i, wobei der Index i die Werte von 1 bis n_C zu durchlaufen hat. Die entsprechende Lagrangedichte lautet [2]:

$$\mathcal{L} = \bar{\Phi}_i \Phi_i \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \right] \ . \tag{2.7.2}$$

In Komponenten lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ &= \ i\partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \Box A_i + F_i^* F_i \\ &\quad + \left[m_{ij} \left(A_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) + g_{ijk} (A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \lambda_i F_i + \text{h.c.} \right] \ . \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Stellt man die Bewegungsgleichungen für F und F^* auf, so zeigt es sich, dass sie rein algebraisch sind. Komponentenfelder mit algebraischen Bewegungsgleichungen bezeichnet man als Hilfsfelder und die entsprechende Lagrangedichte als off-shell Lagrangedichte. Werden die Hilfsfelder mittels ihrer Bewegungsgleichungen eliminiert, so gelangt man zu der on-shell Lagrangedichte.

Mit Hilfe der Feldstärken (2.5.8) lässt sich eine eich- und supersymmetrisch invariante Wirkung für das freie und masselose Vektormultiplett konstruieren. Sie lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \Big(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} \Big) = \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} - i\lambda\sigma^m \partial_m \bar{\lambda} \ , \tag{2.7.4}$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung die Komponentengestalt abzulesen ist. Dieses Ergebnis kann man auf zweifache Weise verallgemeinern: Zum einen kann man mehrere Vektormultipletts mit einer symmetrischen Kopplungsfunktion f_{AB}, wobei $A, B = 1, \ldots, n_V$, wenn n_V die Anzahl der Vektormultipletts bezeichnet, betrachten. Zum anderen kann man die Vektormultipletts an eichneutrale chirale Multipletts koppeln. Man erreicht dies dadurch, dass man f_{AB} als eine Funktion von n_C chiralen Multipletts, die wir im Folgenden mit N^i bezeichnen wollen, ansetzt [16].[7] Eine solche Lagrangedichte lautet dann

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \int d^2\theta f_{AB}(N) W^A W^B + \text{h.c.} \ . \tag{2.7.5}$$

Diese Lagrangedichte ist insoweit unvollständig, als zur vollständigen Beschreibung noch die kinetischen Terme der chiralen Felder aus (2.7.2) berücksichtigt werden sollten.[8] Immer dann,

[6] Wir werden diese Integration zumeist nicht explizit ausführen, sondern die herauszuprojizierende Komponente durch einen senkrechten Strich kenntlich machen. Daher das Wort „formal".

[7] Die Kopplungsfunktion f_{AB} wird auch als „eichkinetische Funktion" bezeichnet [17]. Unsere Wahl, sie als eine Funktion der (eichneutralen) chiralen Multipletts anzusetzen, ist durch [8] motiviert, wo diese als Moduli-Felder auftauchen.

[8] Wir machen noch einmal darauf aufmerksam, dass wir es nicht mit chiralen Multipletts zu tun haben, die unter der Eichgruppe geladen sind. Die kinetischen Terme sind daher nicht von der Form $\bar{\Phi} e^V \Phi$, wie sie bei der Kopplung an geladene chirale Multipletts auftreten (vgl. Anhang D).

wenn wir auf dieses Ergebnis in dieser Arbeit zurückgreifen, werden wir, ohne es explizit hinzuschreiben, das Vorhandensein solcher kinetischen Terme im Hinterkopf behalten.
Um die Komponentengestalt von (2.7.5) anzugeben, ist es notwendig, die Kopplungsfunktion f_{AB} im Superraum Taylor- zu entwickeln (s. Anhang B). Mit der θ-Entwicklung (2.4.3) eines chiralen Superfeldes für N^i erhalten wir die folgende Gestalt von f_{AB}

$$f_{AB}(N) = f_{AB}(A) + \sqrt{2}\theta\chi^i\partial_i f_{AB} + \theta\theta\big(F^i\partial_i f_{AB} - \frac{1}{2}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\big) \ , \tag{2.7.6}$$

wobei die partielle Ableitung $\partial_i = \frac{\partial}{\partial A^i}$ bezeichnet. Unter Benutzung von (2.7.6) erhalten wir die folgende Komponentengestalt für (2.7.5)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{kin}} = &- \frac{1}{4}\mathrm{Re} f_{AB} F^A_{mn} F^{B\,mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im} f_{AB}\epsilon^{mnpr}F^A_{mn}F^B_{pr} + \frac{1}{2}\mathrm{Re} f_{AB} D^A D^B \\
&- \frac{i}{2} f_{AB}\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar\lambda^B - \frac{i}{2} f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\sigma^m\partial_m\lambda^B \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB} D^A\chi^i\lambda^B - \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*} f^*_{AB} D^A\bar\chi^i\bar\lambda^B \\
&- \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB} F^A_{mn}\chi^i\sigma^{mn}\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*} f^*_{AB} F^A_{mn}\bar\chi^i\bar\sigma^{mn}\bar\lambda^B \\
&- \frac{1}{4}F^i\partial_i f_{AB}\lambda^A\lambda^B - \frac{1}{4}F^{*i}\partial_{i*} f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B \\
&+ \frac{1}{8}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\lambda^A\lambda^B + \frac{1}{8}\bar\chi^i\bar\chi^j\partial_{i*}\partial_{j*} f_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B \ .
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Hierin sind die D^A und F^i Hilfsfelder. Die Bewegungsgleichungen für D^A können wir sofort angeben[9]

$$D^B = -\mathrm{Re}\, f^{-1\,AB}\left(\frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AC}\chi^i\lambda^C - \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*} f^*_{AC}\bar\chi^i\bar\lambda^C\right) \ . \tag{2.7.8}$$

Als letztes Beispiel in diesem Kapitel wollen wir die Vektormultipletts massiv machen. Ein Massenterm der bei nur einem Vektormultiplett zu (2.7.4) hinzuzuaddieren ist, ist im Falle einer renormierbaren Theorie durch

$$m^2V^2 \tag{2.7.9}$$

gegeben. Wollen wir Renormierbarkeit nicht verlangen und eine massive Theorie (2.7.5) betrachten, so dürfen wir statt (2.7.9) eine allgemeine Funktion U der n_V Vektormultipletts wählen, so dass

$$\mathcal{L}_m = U(V^A) \ . \tag{2.7.10}$$

Das Problem dabei ist, dass sowohl (2.7.9), als auch die Verallgemeinerung (2.7.10) die Eichinvarianz zerstört. Eine Möglichkeit, die Eichinvarianz zu retten, bietet der Stückelberg-Mechanismus [10, 11, 18]. Dieser wird in den Kapiteln 3 und 5 am Beispiel des linearen Multipletts im Detail behandelt. Wir bemerken dennoch kurz: Die Feldstärke W_α besteht aus den Komponentenfeldern $(\lambda_\alpha, D, F_{mn})$. Wie wir gesehen haben, sind dies die gleichen Felder, die auch in V_{WZ} auftreten und beide Superfelder tragen die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden. Das ungeeichte Vektormultiplett V hat neben den oben aufgezählten noch zusätzliche Komponentenfelder (vgl. 2.5.2) und trägt daher eine höhere Zahl von Freiheitsgraden. All diese Freiheitsgrade werden in dem Massenterm (2.7.9), wie auch in (2.7.10) auftreten. Wir bezeichnen die

[9] Um die Bewegungsgleichungen für F^i zu erhalten, muss man die kinetischen Terme der chiralen Multipletts berücksichtigen.

zusätzlichen Freiheitsgrade daher als „massive Freiheitsgrade". Die Grundidee des Stückelberg-Mechanismus besteht darin, die massiven Freiheitsgrade von V abzukoppeln. Wir schreiben

$$V^A = V^{A\prime} + \Phi^A + \bar{\Phi}^A \ . \tag{2.7.11}$$

Das V' entspricht dabei V_{WZ} und trägt daher die Freiheitsgrade der masselosen Theorie und Φ ($\bar{\Phi}$) sind (anti-)chiral und tragen die massiven Freiheitsgrade. Mit den Transformationen

$$V^{A\prime} \to V^{A\prime} + \Sigma^A + \bar{\Sigma}^A \ , \qquad \Phi^A \to \Phi^A - \Sigma^A \tag{2.7.12}$$

wird der Massenterm

$$\mathcal{L}_m = U(\{V^{A\prime} + \Phi^A + \bar{\Phi}^A\}) \tag{2.7.13}$$

eichinvariant. Die Komponentengestalt von (2.7.13) gewinnt man durch Taylor-Entwicklung im Superraum (s. Anhang B).

Kapitel 3

Das lineare Multiplett

3.1 Das lineare Multiplett

Das lineare Multiplett[1] [19, 20, 5, 3, 9, 21] ist durch die folgende Bedingung definiert:

$$D^2 L = \bar{D}^2 L = 0 \ , \tag{3.1.1}$$

wobei L ein reelles Superfeld ist. Setzen wir die allgemeine Entwicklung eines reellen Superfeldes

$$\begin{aligned} L(x, \theta, \bar{\theta}) =& C(x) + \theta\eta(x) + \bar{\theta}\bar{\eta}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} M^*(x) \\ &+ \theta\sigma^m\bar{\theta} v_m(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} D(x) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

sowie (2.3.11) für die kovarianten Ableitungen in die beiden Definitionsgleichungen (3.1.1) ein, so erhalten wir als Bedingungen an die Komponentenfelder

$$\begin{aligned} M &= 0 \ , \qquad & D &= -\frac{1}{4}\Box C \ , \\ \partial^m v_m &= 0 \ , \qquad & \lambda &= -\frac{i}{2}\sigma^m \partial_m \bar{\eta} \ . \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Eingesetzt in (3.1.2) impliziert dies die folgende θ-Entwicklung von L

$$L = C + \theta\eta + \bar{\theta}\bar{\eta} + \theta\sigma^m\bar{\theta} v_m - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C \tag{3.1.4}$$

mit der noch unverbrauchten zusätzlichen Bedingung

$$\partial^m v_m = 0 \ . \tag{3.1.5}$$

An (3.1.4) und (3.1.5) können wir sofort die Anzahl der off-shell Freiheitsgrade von L ablesen

C	reelles Skalarfeld	1 FG
η	komplexes Weyl-Spinorfeld	4 FG
v_m	reelles Vektorfeld mit Zusatzbedingung	3 FG
		8 FG

[1] Es wird auch als 2-Form- oder reelles Tensormultiplett bezeichnet.

Wir werden bei unseren späteren Berechnungen hauptsächlich auf die Entwicklung (3.1.4) zurückgreifen. Es ist jedoch wichtig festzuhalten, dass die Gleichungen (3.1.4) und (3.1.5) zusammengefasst werden können, wenn man nämlich bedenkt, dass aufgrund der letzteren v_m als

$$v_m = \frac{1}{2}\epsilon_{mnpq}H^{npq} \tag{3.1.6}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist

$$H^{npq} = \frac{1}{6}\left(\partial^n B^{pq} + \partial^p B^{qn} + \partial^q B^{np} - \partial^n B^{qp} - \partial^q B^{pn} - \partial^p B^{nq}\right) = \partial^{[n}B^{pq]} \tag{3.1.7}$$

die Feldstärke des reellen antisymmetrischen Tensors B^{mn}. Damit erhält das lineare Multiplett die folgende Gestalt

$$L = C + \theta\eta + \bar{\theta}\bar{\eta} + \frac{1}{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}\epsilon_{mnpq}H^{npq} - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C \ . \tag{3.1.8}$$

Neben (3.1.1) gibt es noch eine andere, gleichwertige[2] Definition des linearen Multipletts, die L über das chirale Spinorsuperfeld Φ_α definiert

$$L = \frac{1}{2}(D^\alpha\Phi_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{\dot{\alpha}}), \qquad \bar{D}_{\dot{\beta}}\Phi_\alpha = 0 \ . \tag{3.1.9}$$

Dabei hat Φ_α die folgende θ-Entwicklung:

$$\Phi_\alpha = \chi_\alpha - \theta_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma(C+iE)}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}\right) + \theta\theta\left(\eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right) \ . \tag{3.1.10}$$

Das chirale Spinorsuperfeld enthält also in direkter Weise den antisymmetrischen Tensor B_{mn}, der im linearen Multiplett nur über seine Feldstärke H^{lmn} auftritt. Wie wir etwas weiter unten sehen werden, ist das lineare Multiplett auch das Feldstärkemultiplett von Φ_α.

An (3.1.10) können wir die off-shell Freiheitsgrade des (noch ungeeichten) chiralen Spinorsuperfeldes ablesen:

$C + iE$	komplexes Skalarfeld	2 FG
χ, η	zwei komplexe Weyl-Spinorfelder	8 FG
B_{mn}	reeller antisymmetrischer Tensor	6 FG
		16 FG

Wir sehen, dass Φ_α doppelt soviele Freiheitsgrade wie L besitzt. Offenbar müssen bei dem Übergang (3.1.9) von Φ_α zu L Freiheitsgrade „verloren gegangen" sein. Tatsächlich stellen wir bei genauerer Betrachtung fest, dass sich L unter den Eichtransformationen

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha &\to \Phi_\alpha + \frac{i}{8}\bar{D}^2 D_\alpha\Lambda \ , \\ \bar{\Phi}_{\dot{\alpha}} &\to \bar{\Phi}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{8}D^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda \ ,\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

nicht ändert.[3] Dieses Verhalten charakterisiert das lineare Multiplett als das Feldstärkemultiplett des chiralen Spinorsuperfeldes.

[2]Die Äquivalenz zeige man leicht, indem man (3.1.9) in (3.1.1) einsetzt und die Relationen (2.3.12) verwendet.

[3]Man setze (3.1.11) in die Definition (3.1.9) ein und verwende (A.4.4).

Die Komponentengestalt der Eichtransformation von Φ_α können wir sofort ablesen, da sich diese nur um einen Vorfaktor von der Feldstärke des Vektormultipletts (2.5.6) unterscheidet

$$\delta\Phi_\alpha = \frac{i}{8}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}_\alpha\Lambda = -\frac{1}{2}\lambda^e_\alpha - \left(\delta_\alpha{}^\gamma\frac{iD^e}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\sigma^n)_\alpha{}^\gamma\left(\partial_m\Lambda^e_n - \partial_n\Lambda^e_n\right)\right)\theta_\gamma - \frac{i}{2}\theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{e\,\dot\alpha} \ . \tag{3.1.12}$$

Bei geeigneter Wahl von $\delta\Phi_\alpha$ lassen sich die überflüssigen Freiheitsgrade „wegtransformieren”. (3.1.12) hat das folgende Transformationsverhalten für die Komponentenfelder zur Folge:

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &\rightarrow \chi_\alpha - \frac{1}{2}\lambda_\alpha \ , \qquad E \rightarrow E + D \ , \qquad C \rightarrow C \ , \qquad \eta_\alpha \rightarrow \eta_\alpha \ , \\ B_{mn} &\rightarrow B_{mn} + \partial_m\Lambda_n - \partial_n\Lambda_m \ . \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Eichen wir χ_α und E zu Null, so entspricht dies 5 Freiheitsgraden, die wir wegeichen. Mit (3.1.13) lassen sich dann 3 weitere Freiheitsgrade wegheben: Das Vektorfeld Λ_m trägt vier Freiheitsgrade, jedoch entfällt ein Freiheitsgrad aufgrund der „Reduzibilität” der Transformation (3.1.13): Mit der Wahl $\Lambda_m = \partial_m g$, wobei g eine skalare Funktion ist, wird $\delta B_{mn} = 0$, obwohl $\Lambda_m \neq 0$.[4]

Wir bemerken, dass die Feldstärke (3.1.7) unter der Eichtransformation (3.1.13) von B_{mn} ebenfalls invariant bleibt. Die 3 Freiheitsgrade des Vektorfeldes v_m entsprechen in dieser Formulierung also den 3 off-shell Freiheitsgraden von B_{mn}.

Abschließend wollen wir die Gestalt von Φ_α in einer Eichung, in der χ_α und E Null sind (Wess-Zumino-Eichung), und das daher die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden wie L trägt, angeben

$$\Phi_\alpha = -\,\theta_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma C}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}\right) + \theta\theta\eta_\alpha \ . \tag{3.1.14}$$

3.2 Eichinvariante Wirkungen

Wir wollen die Konstruktion einer eichinvarianten Wirkung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_m \tag{3.2.1}$$

für das lineare Multiplett skizzieren. Wir geben zunächst die Gestalt des kinetischen Terms $\mathcal{L}_{kin}$ an, dessen Eichinvarianz offensichtlich ist [5, 3, 9, 19, 20]. Ein eichinvarianter Massenterm $\mathcal{L}_m$ kann dann mit Hilfe des Stückelberg-Formalismus konstruiert werden [9].

3.2.1 Kinetischer Term

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden: Den renormierbaren und den nicht renormierbaren. Im renormierbaren Fall ist die Lagrangedichte durch

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\int d^2\theta d^2\bar\theta L^2 \ . \tag{3.2.2}$$

gegeben. Die Komponentengestalt von (3.2.2) bestimmt sich zu

$$\mathcal{L}_{\rm kin} \ = \ -\frac{1}{2}\left(\partial_m C\partial^m C + i(\eta\sigma^m\partial_m\bar\eta + \bar\eta\bar\sigma^m\partial_m\eta) - v^m v_m\right) \ . \tag{3.2.3}$$

[4]Details findet man in [22].

Im nicht renormierbaren Fall sind beliebige Potenzen von L zugelassen. Wir setzen daher die Lagrangedichte als

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(L) \ , \tag{3.2.4}$$

mit einer reellen Funktion $K(L)$ an. Die Komponentengestalt von (3.2.4) erhält man, wenn man $K(L)$ im θ-Raum Taylor-entwickelt und anschließend die θ-Integration ausführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin}} &= -\frac{1}{4}K'' \left(\partial_m C \partial^m C + i(\eta\sigma^m\partial_m\bar{\eta} + \bar{\eta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta) - v^m v_m\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}K'''\,\eta\sigma^m\bar{\eta}\,v_m - \frac{1}{48}K''''\,\eta\eta\bar{\eta}\bar{\eta} \ . \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

3.2.2 Massenterm

Ein Massenterm für Φ_α sollte von der folgenden Form sein

$$\mathcal{L}_{\text{m}} \sim m^2 \int d^2\theta \Phi^\alpha \Phi_\alpha + \text{h.c.} \ . \tag{3.2.6}$$

Eine solche Lagrangedichte würde gerade die Terme

$$m^2 B_{mn} B^{mn} \ , \tag{3.2.7}$$

die in der massiven Theorie auftreten sollten, enthalten. Nun enthält (3.2.6) mehr Freiheitsgrade als in L vorhanden (nämlich die Freiheitsgrade des chiralen Spinorsuperfeldes Φ_α) und ist nicht eichinvariant unter (3.1.11). Deshalb müssen wir ein Kompensationsfeld W_α einführen, welches die Eichinvarianz sichert, indem es die nicht eichinvarianten Terme mittels geeignet gewählter Komponenten kompensiert. Anders formuliert können wir sagen, dass wir die massiven Freiheitsgrade von B_{mn} abkoppeln. Eine solche Vorgehensweise bezeichnet man als Stückelberg-Formalismus [10, 11].

Man erkennt schnell, dass mit

$$B_{mn} = B'_{mn} + \frac{1}{m}\left(\partial_n v_m - \partial_m v_n\right) \tag{3.2.8}$$

der Term

$$B^{mn} B_{mn}$$

unter den Eichtransformationen

$$B'_{mn} \to B'_{mn} + \partial_m \Lambda_n - \partial_n \Lambda_m, \qquad v_n \to v_n + m\Lambda_n \tag{3.2.9}$$

invariant bleibt. Die Tatsache, dass (3.1.12) und die erste der Gleichungen (2.5.8) bis auf einen Vorfaktor übereinstimmen, lässt bereits den Schluss zu, dass auf der Ebene der Superfelder ein geeignetes Kompensationsfeld mit der Feldstärke des Vektormultipletts gefunden ist. Die Invarianz von (3.2.8) unter (3.2.9) entspricht also der Invarianz von

$$2i\Phi_\alpha - \frac{1}{m} W_\alpha \tag{3.2.10}$$

unter

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &\longrightarrow \Phi_\alpha + \frac{i}{8}\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda \\ W_\alpha &\longrightarrow W_\alpha - \frac{1}{4} m \bar{D}^2 D_\alpha \Lambda \ . \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Dass (3.2.10) tatsächlich eichinvariant ist, lässt sich schnell erkennen. Wir können nun eine Lorentz- und eichinvariante Lagrangedichte konstruieren, indem wir (3.2.10) quadrieren und über die Spinorindizes summieren. Selbstverständlich müssen wir noch den hermitesch konjugierten Ausdruck hinzuaddieren, damit gesichert wird, dass $\mathcal{L}_m$ reell ist. Wir erhalten also:

$$\mathcal{L}_m = \int d^2\theta \left(2i\Phi^\alpha - \frac{1}{m}W^\alpha\right)\left(2i\Phi_\alpha - \frac{1}{m}W_\alpha\right) + \text{h.c.}\ . \tag{3.2.12}$$

Es zeigt sich, dass dies nicht der einzig mögliche eichinvariante Term, der aus den Feldern Φ_α und W_α konstruiert werden kann, ist. Man kann noch einen Term hinzuaddieren, der sich unter (3.2.11) zu einer totalen Ableitung, die aus der Wirkung ausintegriert werden kann, transformiert [9]. Die gesamte Lagrangedichte lautet dann, falls die Kopplung an mehrere Vektormultipletts sowie an Materie erlaubt wird:

$$\mathcal{L}_\mathrm{m} = \frac{1}{4}\int d^2\theta \Big(f_{AB}(N)(W^A - 2im^A\Phi)(W^B - 2im^B\Phi) + 2e_A\Phi(W^A - im^A\Phi)\Big) + \text{h.c.}\ . \tag{3.2.13}$$

3.3 Dualitätstransformationen

Wir werden die Dualitäten des antisymmetrischen Tensors im Fall mehrerer linearer Multipletts in Kapitel 6 im Detail untersuchen. In diesem Abschnitt demonstrieren wir kurz die Dualität eines linearen zu einem chiralen Multiplett im masselosen Fall [23, 24, 25].[5] Dabei folgen wir weitgehend [23]. Der massive Fall wird ausführlich in [9] behandelt.

Wir betrachten die beiden folgenden Theorien

$$\mathcal{L}_{lin} = -\frac{1}{2}\int d^4\theta L^2\ , \tag{3.3.1}$$

$$\mathcal{L}_{chir} = \int d^4\theta \Phi\bar{\Phi} + \text{ h.c.}\ , \tag{3.3.2}$$

die ein masseloses lineares bzw. masseloses chirales Multiplett beschreiben. Ausgangspunkt für die Dualitätstransformationen ist eine sog. first-order Lagrangedichte $\mathcal{L}_{first}$, aus der sich beide Theorien unter Benutzung der aus ihr folgenden Bewegungsgleichungen herleiten lassen. Wir betrachten die first-order Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{first} = \int d^4\theta \left\{-\frac{1}{2}(V^0)^2 + V^0(\Phi + \bar{\Phi})\right\}\ , \tag{3.3.3}$$

worin V^0 ein reelles, jedoch nicht notwendigerweise lineares Multiplett darstellt. Um die Bewegungsgleichungen zu bestimmen, benutzen wir die im Anhang A.5 aufgelisteten Variationsregeln. Wir variieren zunächst nach Φ und $\bar{\Phi}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_{first}}{\delta\Phi} &= \frac{1}{4}\bar{D}^2V^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{D}^2V^0 = 0 \\ \frac{\delta\mathcal{L}_{first}}{\delta\bar{\Phi}} &= \frac{1}{4}D^2V^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad D^2V^0 = 0,\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

was die Definitionsgleichung des linearen Multipletts ist. Setzen wir $V^0 = L$ in (3.3.3) ein, so erhalten wir

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left\{-\frac{1}{2}L^2 + L(\Phi + \bar{\Phi})\right\} = -\frac{1}{2}\int d^4\theta L^2\ , \tag{3.3.5}$$

[5] Man beachte, dass das lineare dual zum chiralen Multiplett ist, die Umkehrung aber Zusatzbedingungen erfordert.

worin der letzte Schritt nach zweifacher partieller Integration wegen $D^2L = \bar{D}^2L = 0$ folgt.[6] Ausgehend von (3.3.3) sind wir unter Benutzung der Bewegungsgleichungen für Φ also bei der Lagrangedichte (3.3.1) für das masselose lineare Multiplett angelangt.

Wir wollen jetzt nach V^0 variieren. Das Ergebnis dieser Variation ist die Bewegungsgleichung

$$V^0 = \Phi + \bar{\Phi} \ . \tag{3.3.6}$$

Eingesetzt in (3.3.3) ergibt dies

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \Phi\bar{\Phi} \ , \tag{3.3.7}$$

also gerade die Lagrangedichte (3.3.2) für ein masseloses chirales Multiplett. Damit haben wir die Dualität zwischen dem linearen und dem chiralen Multiplett demonstriert.

[6] Ein chirales Superfeld Φ kann stets durch ein allgemeines Superfeld Σ ausgedrückt werden [5]: $\Phi = \bar{D}^2\Sigma$. Damit kann in (3.3.5) partiell integriert werden.

Kapitel 4

Supersymmetrie und WZ-Eichung

Supersymmetrie und WZ-Eichung sind nicht miteinander vereinbar. Die Wahl der WZ-Eichung hat zur Folge, dass Supersymmetrie gebrochen wird und umgekehrt brechen Supersymmetrie-Transformationen die WZ-Eichung. Andererseits wird die Eichung auch bei Durchführung einer Eichtransformation zerstört. Bei einer bestimmten Wahl des Eichtransformationsparameters kann es aber vorkommen, dass sowohl Supersymmetrie als auch WZ-Eichung erhalten bleiben, sofern man beide, Supersymmetrie- und Eichtransformationen, gleichzeitig ausführt [26]. Wir untersuchen in diesem Abschnitt das chirale Spinorsuperfeld unter diesem Gesichtspunkt.

4.1 SUSY-Transformationen des chiralen Spinorsuperfeldes

Um die Supersymmetrie-Transformationen des chiralen Spinorsuperfeldes zu berechnen, werden wir die Projektionstechnik [5] anwenden. Hierzu betrachten wir das chirale Spinorsuperfeld in der folgenden Gestalt:

$$\Phi_\alpha = \chi_\alpha - \theta_\gamma \left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma (C + iE)}{2} + \frac{1}{4} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn} \right) + \theta\theta\lambda_\alpha \ , \tag{4.1.1}$$

wobei

$$\lambda_\alpha = \eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \partial_m \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \ . \tag{4.1.2}$$

Wir definieren zunächst die Komponentenfelder von (4.1.1) durch die folgenden Projektionen[1]

$$\Phi_\alpha\Big| = \chi_\alpha \tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned} D_\beta \Phi_\alpha\Big| &= \left(\partial_\beta + 2i\sigma^m_{\beta\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_m \right) \left[\chi_\alpha - \theta_\gamma \left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma (C + iE)}{2} + \frac{1}{4} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn} \right) + \theta\theta\lambda_\alpha \right] \\ &= \varepsilon_{\beta\alpha} \frac{C + iE}{2} + \frac{1}{4} \varepsilon_{\beta\gamma} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

$$D^2 \Phi_\alpha\Big| = -4\lambda_\alpha \ . \tag{4.1.5}$$

[1] Wir erinnern daran, dass wir sowohl Φ_α als auch die kovarianten Ableitungen D_α und $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ in der Variablen (2.4.2) bzw. der dazu komplex konjugierten Variablen schreiben.

Statt (4.1.4) können wir die folgenden beiden Projektionen betrachten:

$$\begin{aligned} D^\beta\Phi_\beta\Big| &= -\varepsilon^{\beta\alpha}\partial_\alpha\theta_\gamma\left(\frac{\delta_\beta{}^\gamma(C+iE)}{2}+\frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\beta{}^\gamma B_{mn}\right) \\ &= C+iE \qquad (4.1.6) \\ \frac{1}{2}D_\alpha\Phi_\beta\Big|+\frac{1}{2}D_\beta\Phi_\alpha\Big| &= \varepsilon_{\beta\alpha}\frac{C+iE}{2}+\frac{1}{8}\varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}+\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{C+iE}{2}+\frac{1}{8}\varepsilon_{\alpha\gamma}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\beta{}^\gamma B_{mn} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}\ . \qquad (4.1.7) \end{aligned}$$

Dabei haben wir in (4.1.6) die Identität (A.1.27) sowie die Antisymmetrie von B_{mn} ausgenutzt. In (4.1.7) benutzten wir hingegen, dass

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma^k\bar\sigma^l)_\alpha{}^\gamma+\varepsilon_{\alpha\gamma}(\sigma^k\bar\sigma^l)_\beta{}^\gamma\right)B_{kl} &= \left(\sigma^k_{\alpha\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\sigma^l_{\beta\dot\gamma}+\sigma^k_{\beta\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\sigma^l_{\alpha\dot\gamma}\right)B_{kl} \\ &= \varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\sigma^k_{\alpha\dot\alpha}\sigma^l_{\beta\dot\gamma}B_{kl}-\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\sigma^k_{\alpha\dot\gamma}\sigma^l_{\beta\dot\alpha}B_{kl} \\ &= 2\varepsilon_{\beta\gamma}\sigma^k_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{l\ \dot\alpha\gamma}B_{kl}\ , \qquad (4.1.8) \end{aligned}$$

worin der vorletzte Schritt wegen der Antisymmetrie von B_{kl} und nach einer Umbenennung der Summationsindizes $k\leftrightarrow l$ und der letzte Schritt wegen der Antisymmetrie von $\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}$ folgt.
Wir wollen nun die SUSY-Transformationen der oben definierten Felder berechnen.

$$\begin{aligned} \delta_\xi\chi_\alpha &= (\xi Q+\bar\xi\bar Q)\chi_\alpha=(\xi Q+\bar\xi\bar Q)\Phi_\alpha\Big|=(\xi D+\bar\xi\bar D)\Phi_\alpha\Big|=\xi^\beta D_\beta\Phi_\alpha\Big| \\ &= -\xi_\alpha\frac{C+iE}{2}-\frac{1}{4}(\sigma^k\bar\sigma^l)_\alpha{}^\gamma\xi_\gamma B_{kl} \qquad (4.1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_\xi(C+iE) &= D^\beta(\xi Q+\bar\xi\bar Q)\Phi_\beta\Big|=(\xi D+\bar\xi\bar D)D^\beta\Phi_\beta\Big| \\ &= \frac{1}{2}\xi^\alpha\varepsilon^{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\gamma}D^2\Phi_\beta\Big|+\bar\xi_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\beta\gamma}\bar D_{\dot\beta}D_\gamma\Phi_\beta\Big| \\ &= 2\xi^\alpha\lambda_\alpha-2i\bar\xi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\ \dot\alpha\beta}\partial_m\chi_\beta \qquad (4.1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_\xi\left(\frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma^k\bar\sigma^l)_\alpha{}^\beta B_{kl}\right) &= D_{(\alpha}(\xi Q+\bar\xi\bar Q)\Phi_{\beta)}\Big|=(\xi D+\bar\xi\bar D)\frac{1}{2}(D_\alpha\Phi_\beta+D_\beta\Phi_\alpha)\Big| \\ &= \frac{1}{4}\xi^\gamma\varepsilon_{\gamma\alpha}D^2\Phi_\beta\Big|+\frac{1}{4}\xi^\gamma\varepsilon_{\gamma\beta}D^2\Phi_\alpha\Big| \\ &\quad -i\bar\xi_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\beta}\partial_m\Phi_\beta\Big|-i\bar\xi_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^m_{\beta\dot\beta}\partial_m\Phi_\alpha\Big| \\ &= \xi_\alpha\lambda_\beta+\xi_\beta\lambda_\alpha+i(\sigma^m_{\alpha\dot\beta}\bar\xi^{\dot\beta}\partial_m\chi_\beta+\sigma^m_{\beta\dot\beta}\bar\xi^{\dot\beta}\partial_m\chi_\alpha) \qquad (4.1.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_\xi\lambda_\alpha &= -\frac{1}{4}D^2(\xi Q+\bar\xi\bar Q)\Phi_\alpha\Big|=-\frac{1}{4}\bar\xi\bar D D^2\Phi_\alpha\Big|=i\bar\xi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\ \dot\alpha\gamma}\partial_m D_\gamma\Phi_\alpha\Big| \\ &= i\bar\xi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\ \dot\alpha\gamma}\partial_m\left(\varepsilon_{\gamma\alpha}\frac{C+iE}{2}+\frac{1}{4}\varepsilon_{\gamma\beta}(\sigma^k\bar\sigma^l)_\alpha{}^\gamma B_{kl}\right) \qquad (4.1.12) \end{aligned}$$

Diese Transformationen stellen noch nicht das von uns gesuchte Ergebnis dar. Wir müssen aus ihnen das Transformationsverhalten der Komponentenfelder gewinnen. Dies wollen wir im Folgenden tun.

Transformationsverhalten von C und E

Aus (4.1.10) gewinnen wir die Transformationen der beiden Felder C und E, indem wir den Real- und Imaginärteil dieses Ausdrucks bilden. Mit dem komplex konjugierten

$$(2\xi^\alpha\lambda_\alpha - 2i\bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\sigma}^{m\ \dot\alpha\beta}\partial_m\chi_\beta)^\dagger = 2\bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\lambda}^{\dot\alpha} + 2i\partial_m\bar{\chi}_{\dot\alpha}\bar{\sigma}^{m\dot\alpha\beta}\xi_\beta \tag{4.1.13}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta_\xi C &= \xi^\alpha\lambda_\alpha + \bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\lambda}^{\dot\alpha} - i(\bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\sigma}^{m\ \dot\alpha\beta}\partial_m\chi_\beta + \chi^\beta\sigma^m_{\beta\dot\alpha}\partial_m\bar{\chi}^{\dot\alpha}) && (4.1.14)\\
\delta_\xi E &= -i\xi^\alpha\lambda_\alpha + i\bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\lambda}^{\dot\alpha} - (\bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\sigma}^{m\ \dot\alpha\beta}\partial_m\chi_\beta - \chi^\beta\sigma^m_{\beta\dot\alpha}\partial_m\bar{\chi}^{\dot\alpha})\ . && (4.1.15)
\end{aligned}$$

Transformationsverhalten von B_{kl}

Um aus (4.1.11) die Transformationen von B_{kl} zu gewinnen, bedarf es etwas mehr Arbeit. Zunächst formen wir die linke Seite von (4.1.11) um:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma^k\bar{\sigma}^l)_\alpha{}^\gamma B_{kl} &= -\frac{1}{8}\left((\sigma^k\bar{\sigma}^l)_\alpha{}^\gamma + (\sigma^k\bar{\sigma}^l)_\alpha{}^\gamma\right)\varepsilon_{\gamma\beta}B_{kl}\\
&= -\frac{1}{8}\left((\sigma^k\bar{\sigma}^l)_\alpha{}^\gamma - (\sigma^l\bar{\sigma}^k)_\alpha{}^\gamma\right)\varepsilon_{\gamma\beta}B_{kl} = -\frac{1}{2}(\sigma^{kl})_\alpha{}^\gamma\varepsilon_{\gamma\beta}B_{kl}\ . && (4.1.16)
\end{aligned}$$

Nun können wir beide Seiten von (4.1.11) mit $\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha$ multiplizieren. Wir betrachten zunächst die linke Seite:

$$\delta_\xi\left(-\frac{1}{2}(\sigma^{kl})_\alpha{}^\gamma\varepsilon_{\gamma\beta}\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha B_{kl}\right) = \delta_\xi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^{kl}\sigma^{mn})B_{kl}\right) = \frac{1}{2}\delta_\xi B^{mn} + \frac{i}{4}\delta_\xi\varepsilon^{klmn}B_{kl}\ , \tag{4.1.17}$$

wobei die Antisymmetrie von B_{mn} und (A.1.34) benutzt wurde. Da B_{mn} reell ist, ist der erste Term reell und der zweite rein imaginär. Wir wenden uns nun der rechten Seite von (4.1.11), die wir mit dem gleichen Faktor multiplizieren, zu:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha\left(\varepsilon_\alpha\lambda_\beta + \varepsilon_\beta\lambda_\alpha + i(\sigma^m_{\alpha\dot\beta}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_m\chi_\beta + \sigma^m_{\beta\dot\beta}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_m\chi_\alpha)\right)\\
&\quad = \lambda^\delta(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha\xi_\alpha - \xi^\delta(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha\lambda_\alpha + i\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha\left(\sigma^r_{\alpha\dot\beta}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_r\chi_\beta + \sigma^r_{\beta\dot\beta}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_r\chi_\alpha\right)\ . && (4.1.18)
\end{aligned}$$

Wir wollen den letzten Term betrachten. Zunächst wird unter Benutzung von (A.1.35)

$$\begin{aligned}
i\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha\sigma^r_{\alpha\dot\beta}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_r\chi_\beta &= i\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{mn}\sigma^r)_{\delta\dot\beta}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_r\chi_\beta\\
&= \frac{i}{2}\partial_r\chi^\delta\left(\eta^{mr}\sigma^n_{\delta\dot\beta} - \eta^{nr}\sigma^m_{\delta\dot\beta} + i\varepsilon^{mnrs}\sigma_{s\ \delta\dot\beta}\right)\bar{\xi}^{\dot\beta}\\
&= \frac{i}{2}\left(\partial^m\chi^\delta\sigma^n_{\delta\dot\beta} - \partial^n\chi^\delta\sigma^m_{\delta\dot\beta} + i\partial_r\chi^\delta\varepsilon^{mnrs}\sigma_{s\ \delta\dot\beta}\right)\bar{\xi}^{\dot\beta}\ . && (4.1.19)
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise folgt mit (A.1.36)

$$\begin{aligned}
i\varepsilon^{\beta\delta}(\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha\sigma^r_{\beta\dot\beta}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_r\chi_\alpha &= -\bar{\sigma}^{r\ \dot\gamma\gamma}(\sigma^{mn})_\gamma{}^\alpha\varepsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\bar{\xi}^{\dot\beta}\partial_r\chi_\alpha\\
&= \frac{i}{2}\left(\bar{\xi}_{\dot\gamma}\bar{\sigma}^{m\ \dot\gamma\alpha}\partial^n\chi_\alpha - \bar{\xi}_{\dot\gamma}\bar{\sigma}^{n\ \dot\gamma\alpha}\partial^m\chi_\alpha - i\bar{\xi}_{\dot\gamma}\varepsilon^{rmns}\bar{\sigma}^{\dot\gamma\alpha}_s\partial_r\chi_\alpha\right)\ . && (4.1.20)
\end{aligned}$$

Setzen wir nun (4.1.19) und (4.1.20) in (4.1.18) ein und setzen das Ergebnis hiervon der rechten Seite von (4.1.17) gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta_\xi B^{mn} + \frac{i}{4}\delta_\xi \varepsilon^{klmn} B_{kl} &= \lambda^\delta (\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha \xi_\alpha - \xi^\delta (\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha \lambda_\alpha \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(\partial^m \chi^\delta \sigma^n_{\delta\dot\beta} - \partial^n \chi^\delta \sigma^m_{\delta\dot\beta} + i\partial_r \chi^\delta \varepsilon^{mnrs} \sigma_{s\ \delta\dot\beta}\right)\bar\xi^{\dot\beta} \\
&\quad + \frac{i}{2}\bar\xi_{\dot\gamma}\left(\bar\sigma^{m\ \dot\gamma\alpha}\partial^n \chi_\alpha - \bar\sigma^{n\ \dot\gamma\alpha}\partial^m \chi_\alpha - i\varepsilon^{rmns}\bar\sigma_s^{\dot\gamma\alpha}\partial_r \chi_\alpha\right) \\
&= \lambda^\delta (\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha \xi_\alpha - \xi^\delta (\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha \lambda_\alpha - \varepsilon^{mnrs}\partial_r \chi^\delta \sigma_{s\delta\dot\beta}\bar\xi^{\dot\beta} \\
&\quad + i\left(\partial^m \chi^\delta \sigma^n_{\delta\dot\beta} - \partial^n \chi^\delta \sigma^m_{\delta\dot\beta}\right)\bar\xi^{\dot\beta}\ ,
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

wobei wir (A.1.13) sowie die totale Antisymmetrie von ε^{mnrs} benutzt haben. Nutzen wir ferner (A.1.14) und die Definition (A.1.20) von σ^{mn}, so können wir festhalten

$$\begin{aligned}
\delta_\xi B^{mn} + \frac{i}{2}\delta_\xi \varepsilon^{klmn} B_{kl} &= 4\lambda^\delta (\sigma^{mn})_\delta{}^\alpha \xi_\alpha - 2\varepsilon^{mnrs}\partial_r \chi^\delta \sigma_{s\delta\dot\beta}\bar\xi^{\dot\beta} \\
&\quad + 2i\left(\partial^m \chi^\delta \sigma^n_{\delta\dot\beta} - \partial^n \chi^\delta \sigma^m_{\delta\dot\beta}\right)\bar\xi^{\dot\beta}\ .
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Der Realteil von diesem Ausdruck entspricht der Transformation von B^{mn}, der Imaginärteil der Transformation des dualen Feldstärketensors. Wir möchten Real- und Imaginärteil explizit angeben, wobei wir innere Indizes unterdrücken

$$\begin{aligned}
\delta_\xi B^{mn} &= 2\lambda\sigma^{mn}\xi + 2\bar\lambda\bar\sigma^{mn}\bar\xi - \varepsilon^{mnrs}(\partial_r \chi\sigma_s\bar\xi + \chi\sigma_s\partial_r\bar\chi) \\
&\quad + i(\partial^m\chi\sigma^n - \partial^n\chi\sigma^m)\bar\xi - i\xi(\sigma^n\partial^m\bar\chi - \sigma^m\partial^n\bar\chi)
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta_\xi \varepsilon^{klmn} B_{kl} &= -2i\lambda\sigma^{mn}\xi + 2i\bar\xi\bar\sigma^{nm}\bar\lambda + i\varepsilon^{mnrs}\left(\partial_r\chi\sigma\bar\xi - \xi\sigma_s\partial_r\bar\chi\right) \\
&\quad + (\partial^m\chi\sigma^n - \partial^n\chi\sigma^m)\bar\xi + \xi(\sigma^n\partial^m\bar\chi - \sigma^m\partial^n\bar\chi)\ .
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Die beiden Gleichungen (4.1.23) und (4.1.24) stehen miteinander in folgender Beziehung

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{srmn}\delta_\xi \frac{1}{2}\varepsilon^{klmn} B_{kl} = \delta_\xi B_{rs}\ . \tag{4.1.25}$$

Wir können die Transformationen (4.1.23) noch in Abhängigkeit der beiden Felder η und $\partial_m\bar\chi$ aus (4.1.2) ausdrücken. Hierzu schreiben wir unter Benutzung von (A.1.35) und (A.1.36) jene Terme aus (4.1.23), die ein λ bzw. $\bar\lambda$ enthalten, um. Es gilt

$$\begin{aligned}
2\lambda\sigma^{mn}\xi + 2\bar\xi\bar\sigma^{nm}\bar\lambda &= 2\eta\sigma^{mn}\xi + 2\bar\xi\bar\sigma^{nm}\bar\eta + i\xi\sigma^m\partial^n\bar\chi - i\xi\sigma^n\partial^m\bar\chi + \varepsilon^{mnkr}\xi\sigma_r\partial_k\bar\chi \\
&\quad + i\bar\xi\bar\sigma^m\partial^n\chi - i\bar\xi\bar\sigma^n\partial^m\chi - \varepsilon^{mnkr}\bar\xi\bar\sigma_r\partial_k\chi\ .
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Setzen wir dies in (4.1.23), so erhalten wir das Resultat

$$\begin{aligned}
\delta_\xi B^{mn} =& 2\eta^\alpha(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta\xi_\beta + 2\bar\eta_{\dot\alpha}(\bar\sigma^{mn})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\bar\xi^{\dot\beta} \\
&+ 2i(\xi^\beta\sigma^m_{\beta\dot\alpha}\partial^n\bar\chi^{\dot\alpha} - \xi^\beta\sigma^n_{\beta\dot\alpha}\partial^m\bar\chi^{\dot\alpha}) + 2i(\bar\xi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\beta}\partial^n\chi_\beta - \bar\xi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{n\dot\alpha\beta}\partial^m\chi_\beta)\ .
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

Transformationsverhalten von η

Als letztes wollen wir aus (4.1.12) die Transformationen von η gewinnen. Ausgehend von (4.1.2) gilt zunächst

$$\delta_\xi \lambda_\alpha = \delta_\xi \eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \partial_m \delta_\xi \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \tag{4.1.28}$$

und wegen (4.1.9) können wir schreiben

$$\delta_\xi \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\,\bar{\xi}^{\dot{\gamma}} \left(\frac{\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}}(C - iE)}{2} + \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^m \sigma^n)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}} B_{mn} \right) \ . \tag{4.1.29}$$

Setzen wir (4.1.29) sowie (4.1.12) in (4.1.28) ein und formen nach $\delta_\xi \eta$ um, so erhalten wir vorerst

$$\delta_\xi \eta_\alpha = i\sigma^k_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_k C + \frac{i}{4}\sigma^k_{\gamma\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma \partial_k B_{mn} + \frac{i}{4}\sigma^k_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^m \sigma^n)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}} \bar{\xi}^{\dot{\gamma}} \partial_k B_{mn} \ . \tag{4.1.30}$$

Die beiden letzten Terme können wir mittels (A.1.30) zusammenfassen. Und zwar ist

$$\begin{aligned} &\frac{i}{4}\sigma^k_{\gamma\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma \partial_k B_{mn} + \frac{i}{4}\sigma^k_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^m \sigma^n)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}} \bar{\xi}^{\dot{\gamma}} \partial_k B_{mn} \\ &= \frac{i}{4}\left((\sigma^m \bar{\sigma}^n \sigma^k)_{\alpha\dot{\beta}} + (\sigma^k \bar{\sigma}^m \sigma^n)_{\alpha\dot{\beta}} \right) \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_k B_{mn} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{kmnr} \sigma_{r\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_k B_{mn} \ , \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

womit wir für (4.1.30) das Endresultat

$$\delta_\xi \eta_\alpha = i\sigma^k_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_k C - \frac{1}{2}\varepsilon^{kmnr} \sigma_{r\alpha\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \partial_k B_{mn} \tag{4.1.32}$$

erhalten. Im nächsten Abschnitt werden wir die hier gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen und uns dem Aspekt der WZ-Eichung zuwenden.

4.2 SUSY-Transformationen und WZ-Eichung

Wir gehen von dem chiralen Spinorsuperfeld Φ_α mit der folgenden θ-Entwicklung aus:

$$\Phi_\alpha = \chi_\alpha - \theta_\gamma \left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma (C + iE)}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn} \right) + \theta\theta \left(\eta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \partial_m \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \right) \ . \tag{4.2.1}$$

Hierin sind χ_α, η_α Weylspinoren, C, E reelle skalare Felder und B_{mn} der antisymmetrische Tensor. Wie wir im letzten Abschnitt gezeigt haben, bedeuten die SUSY-Transformationen

$$\Phi_\alpha \longrightarrow \Phi'_\alpha = \Phi_\alpha + \delta_\xi^{SUSY} \Phi_\alpha = \Phi_\alpha + (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi_\alpha \tag{4.2.2}$$

für die Komponentenfelder von Φ_α:

$$\begin{aligned} \delta_\xi^{SUSY} \chi_\alpha &= -\,\xi_\gamma \left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma (C + iE)}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn} \right) \\ \delta_\xi^{SUSY} C &= \xi^\alpha \eta_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \\ \delta_\xi^{SUSY} E &= -\,i\xi^\alpha \eta_\alpha + i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} + 2\left(\xi^\beta \sigma^m_{\beta\dot{\alpha}} \partial_m \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \partial_m \chi_\beta \right) \\ \delta_\xi^{SUSY} B^{mn} &= 2\eta^\alpha (\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta \xi_\beta + 2\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^{mn})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \\ &\quad + 2i(\xi^\beta \sigma^m_{\beta\dot{\alpha}} \partial^n \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} - \xi^\beta \sigma^n_{\beta\dot{\alpha}} \partial^m \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}) + 2i(\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \partial^n \chi_\beta - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta} \partial^m \chi_\beta) \\ \delta_\xi^{SUSY} \eta_\alpha &= i\sigma^k_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_k C - \frac{1}{2}\varepsilon^{kmnr} \sigma_{r\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_k B_{mn} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

In der WZ-Eichung wählen wir

$$\chi_\alpha = 0\ , \qquad E = 0\ ,$$

so dass die SUSY-Transformationen wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}\delta^{SUSY}_{\xi,WZ}\chi_\alpha =& - \xi_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma C}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}\right)\\ \delta^{SUSY}_{\xi,WZ} C =& \xi\eta + \bar\xi\bar\eta\\ \delta^{SUSY}_{\xi,WZ} E =& - i\xi\eta + i\bar\xi\bar\eta\\ \delta^{SUSY}_{\xi,WZ} B^{mn} =& 2\eta\sigma^{mn}\xi + 2\bar\eta\bar\sigma^{mn}\bar\xi\\ \delta^{SUSY}_{\xi,WZ}\eta_\alpha =& i(\sigma^k\bar\xi)_\alpha\partial_k C - \frac{1}{2}\varepsilon^{kmnr}(\sigma_r\bar\xi)_\alpha\partial_k B_{mn}\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Dabei haben wir einen Teil der Spinorindizes der besseren Übersicht wegen weggelassen. Wie man sieht, transformieren χ_α und E nicht zu Null und verletzen damit die WZ-Eichung. Möchten wir auch das transformierte Feld in der WZ-Eichung vorfinden, so sind wir gezwungen, die SUSY-Transformation gleichzeitig mit einer geeignet gewählten Eichtransformation auszuführen. Die Eichtransformation von Φ_α lautet:

$$\delta_{Eich}\Phi_\alpha = -\frac{1}{2}\lambda^e_\alpha - \left(\delta_\alpha{}^\gamma\frac{iD^e}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma\left(\partial_m\Lambda^e_n - \partial_n\Lambda^e_m\right)\right)\theta_\gamma - \frac{i}{2}\theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{e\,\dot\alpha}\ . \tag{4.2.5}$$

Wir wählen

$$\begin{aligned}\lambda^e_\alpha =& - \xi_\gamma\left(\frac{\delta_\alpha{}^\gamma C}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}\right)\\ D^e =& i\xi\eta - i\bar\xi\bar\eta\ .\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Damit transformieren sich bei gleichzeitiger Ausführung von SUSY- und Eichtransformation χ_α und E zu Null, was die WZ-Eichung wiederherstellt. Die Transformationen der physikalischen Felder sehen dann wie folgt aus

$$\begin{aligned}\left(\delta^{SUSY}_{\xi,WZ} + \delta_{Eich}\right) C =& \xi\eta + \bar\xi\bar\eta\\ \left(\delta^{SUSY}_{\xi,WZ} + \delta_{Eich}\right) B^{mn} =& 2\eta\sigma^{mn}\xi + 2\bar\xi\bar\sigma^{nm}\bar\eta + \partial^m\Lambda^{en} - \partial^n\Lambda^{em}\\ \left(\delta^{SUSY}_{\xi,WZ} + \delta_{Eich}\right)\eta_\alpha =& i(\sigma^k\bar\xi)_\alpha\partial_k C - \frac{1}{2}\varepsilon^{krmn}(\sigma_r\bar\xi)_\alpha\partial_k B_{mn}\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Als nächstes wollen wir uns ansehen, wie sich die Komponentenfelder der Feldstärke W_α des Vektormultipletts unter den entsprechenden Transformationen verhalten. Die θ-Entwicklung von W_α ist wie folgt:

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \left(\delta_\alpha{}^\beta D - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\beta F_{mn}\right)\theta_\beta + \theta\theta\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m\bar\lambda^{\dot\alpha}\ . \tag{4.2.8}$$

Wie auch in (4.2.1) sind alle Komponentenfelder Funktionen von $y = x + i\theta\sigma\bar\theta$. Die SUSY-Transformationen der Komponentenfelder übernehmen wir aus dem bekannten Ergebnis für das Vektormultiplett [2]:

$$\begin{aligned}\delta^{SUSY}_\xi F_{mn} =& i\left[\left(\xi\sigma^n\partial_m\bar\lambda + \bar\xi\bar\sigma^n\partial_m\lambda\right) - \left(\xi\sigma^m\partial_n\bar\lambda + \bar\xi\bar\sigma^m\partial_n\lambda\right)\right]\\ \delta^{SUSY}_\xi\lambda_\alpha =& i\xi_\alpha D + (\sigma^{mn}\xi)_\alpha F_{mn}\\ \delta^{SUSY}_\xi D =& \bar\xi\bar\sigma^m\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_m\bar\lambda\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Die Eichtransformationen für W_α waren (vgl. (3.2.11)):

$$W_\alpha \longrightarrow W_\alpha - \frac{1}{4} m\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda \; .$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\delta_{Eich} W_\alpha &= -\frac{1}{4} m\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda = +2im\frac{i}{8}\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda \\
&= -im\lambda^e_\alpha - 2im\left(\delta_\alpha{}^\gamma \frac{iD^e}{2} + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma \left(\partial_m \Lambda^e_n - \partial_n \Lambda^e_m\right)\right)\theta_\gamma \\
&\quad +\theta\theta m \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_m \bar{\lambda}^{e\,\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Mit der speziellen Wahl (4.2.6) lautet die Gesamttransformation:

$$\begin{aligned}
\left(\delta_\xi^{SUSY} + \delta_{Eich}\right)\lambda_\alpha &= -\, m\xi_\gamma\left(\delta_\alpha{}^\gamma C + \frac{1}{2}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\gamma B_{mn}\right) + i\xi_\alpha D + (\sigma^{mn}\xi)_\alpha F_{mn} \\
\left(\delta_\xi^{SUSY} + \delta_{Eich}\right) D &= m(i\xi\eta - i\bar{\xi}\bar{\eta}) + \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} \\
\left(\delta_\xi^{SUSY} + \delta_{Eich}\right) F_{mn} &= i\left[\left(\xi\sigma^n\partial_m\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^n\partial_m\lambda\right) - \left(\xi\sigma^m\partial_n\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_n\lambda\right)\right] + mF^e_{mn} \; .
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Wir wollen die Ergebnisse (4.2.7) und (4.2.11) diskutieren. An (4.2.7) erkennen wir zunächst, dass es keinen Ordnungsparameter für die SUSY-Brechung gibt. Hingegen kann in (4.2.11) wegen

$$\delta\lambda_\alpha \sim \xi_\alpha(iD - mC) \tag{4.2.12}$$

die Supersymmetrie sowohl über das Hilfsfeld D, als auch über das ursprünglich aus dem Spinormultiplett stammende Skalarfeld C gebrochen werden. Dies ist insoweit ungewöhnlich, als das Feld C kein Hilfsfeld ist. Wie wir in Abschnitt 5.3 sehen werden, ist $D \sim C$, so dass D verschwindet, falls C es tut, und die Supersymmetrie bleibt ungebrochen. Da beide Felder reell sind und D in (4.2.12) über einen imaginären Vorfaktor eingeht, ist ein Fall, bei dem beide Felder einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert (VEV) erhalten und die Supersymmetrie trotzdem ungebrochen bleibt, nicht möglich. Eine SUSY-Brechung ist also nur dann möglich, wenn das C-Feld oder das D-Feld einen von Null verschiedenen VEV besitzen.

Kapitel 5

Kopplungen linearer Multipletts

Die bisherigen Überlegungen sind für ein einzelnes lineares Multiplett durchgeführt worden. Von dieser Einschränkung wollen wir uns im Folgenden lösen und eine beliebige Anzahl n_L linearer Multipletts L^i, $i = 1, \ldots, n_L$, die wir mit symmetrischen Kopplungsfunktionen aneinander koppeln, zulassen. Für ein solches System betrachten wir zunächst eine masselose Theorie, bevor wir uns im zweiten Abschnitt dieses Kapitels der Konstruktion einer massiven Lagrangedichte zuwenden.

5.1 Verallgemeinerung des kinetischen Terms

5.1.1 Renormierbarer Fall

Wie wir aus Abschnitt 3.2.1 bereits wissen, ist der kinetische Term der Lagrangedichte für ein lineares Multiplett durch die $\theta^2\bar{\theta}^2$ - Komponente des Quadrats von L gegeben:

$$\mathcal{L}_{kin} = -\int d^2\theta d^2\bar{\theta} L^2 \ .$$

Um mehrere lineare Multipletts zuzulassen, führen wir eine bezüglich ihrer Indizes symmetrische Kopplungsfunktion g_{ij} ein und verallgemeinern den obigen Ausdruck wie folgt

$$\mathcal{L}_{kin} = -g_{ij} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} L^i L^j \ . \tag{5.1.1}$$

Mit

$$L^i = C^i + \theta\eta^i + \bar{\theta}\bar{\eta}^i + \theta\sigma^m\bar{\theta}v^i_m - \frac{i}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^i - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^i - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C^i$$

bestimmt sich die höchste Komponente des aus jeweils zwei linearen Multipletts gebildeten Produktes zu

$$\begin{aligned} L^i L^j \mid_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad &= \quad -\frac{1}{4}(C^i\Box C^j + C^j\Box C^i) + \frac{i}{4}(\eta^i\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^j + \bar{\eta}^i\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^j \\ &\quad + \bar{\eta}^j\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^i + \eta^j\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^i) - \frac{1}{2}v^{mi}v^j_m \ . \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Integral aus (5.1.1). Nutzen wir ferner die Symmetrie von g_{ij} aus, so erhalten wir für die Komponentengestalt des kinetischen Terms der Lagrangedichte das Ergebnis:

$$\mathcal{L}_{kin} = g_{ij}\left(\frac{1}{2}C^i\Box C^j - \frac{i}{2}(\eta^i\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^j + \bar{\eta}^i\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^j) + \frac{1}{2}v^{mi}v^j_m\right) \ . \tag{5.1.3}$$

5.1.2 Nicht renormierbarer Fall

Während im renormierbaren Fall für den kinetischen Term der Lagrangedichte Produkte aus höchstens je zwei linearen Superfeldern zugelassen waren, dürfen wir bei Außerachtlassung der Renormierbarkeit Produkte aus beliebig vielen Multipletts betrachten. Ganz allgemein können wir von einer Funktion K eines Satzes von linearen Multipletts $\{L^i\}$ ausgehen. Für die Lagrangedichte machen wir den folgenden Ansatz:

$$\mathcal{L}_{kin} = -\int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(L^i) \ . \tag{5.1.4}$$

Den Index i lassen wir übersichtlichkeitshalber im Folgenden weg und schreiben

$$K(L) \equiv K(L^i) \ .$$

Um die Komponentengestalt aus (5.1.4) zu gewinnen, müssen wir eine Taylor-Entwicklung durchführen. Wir definieren

$$X^i = L^i - L^i \mid$$

und führen für

$$K(L \mid +X)$$

die Taylor-Entwicklung durch:

$$\begin{aligned} K(L) = K(L \mid +X) = K(L) \mid + \sum_i \frac{\partial K(L)}{\partial C^i}\bigg| X^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 K(L)}{\partial C^i \partial C^j}\bigg| X^i X^j + \\ + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 K(L)}{\partial C^i \partial C^j \partial C^k}\bigg| X^i X^j X^k + \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^4 K(L)}{\partial C^i \partial C^j \partial C^k \partial C^l}\bigg| X^i X^j X^k X^l \ . \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Höhere Terme treten nicht auf. Benutzt wurde wieder, dass

$$\frac{\partial^n K(L|)}{\partial C^i \partial C^j ... \partial C^k} = \frac{\partial^n K(L)}{\partial C^i \partial C^j ... \partial C^k}\bigg| \ .$$

Nun sind noch die Produkte

$$X^i X^j \cdots X^k$$

anzugeben. Tatsächlich interessiert uns darin nur die $\theta\theta\overline{\theta\theta}$ - Komponente, denn nur diese wird nach der $d^4\theta$ - Integration übrig bleiben.

$$X^i = \theta\eta^i + \bar{\theta}\bar{\eta}^i + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m - \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^i - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^i - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box C^i \tag{5.1.6}$$

$$X^i X^j|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \frac{i}{4}\eta^i\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^j + \frac{i}{4}\bar{\eta}^i\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^j + \frac{i}{4}\bar{\eta}^j\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^i + \frac{i}{4}\eta^j\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^i - \frac{1}{2}v^{mi}v^j_m \tag{5.1.7}$$

$$\begin{aligned} X^i X^j X^k|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \frac{1}{4}(&\eta^k\sigma^m\bar{\eta}^i v^j_m + \eta^k\sigma^m\bar{\eta}^j v^i_m + \eta^i\sigma^m\bar{\eta}^k v^j_m + \eta^j\sigma^m\bar{\eta}^k v^i_m + \\ &+\eta^i\sigma^m\bar{\eta}^j v^k_m + \eta^j\sigma^m\bar{\eta}^i v^k_m) \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

$$\begin{aligned} X^i X^j X^k X^l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \frac{1}{4}(&\eta^i\eta^k\bar{\eta}^j\bar{\eta}^l + \eta^j\eta^k\bar{\eta}^i\bar{\eta}^l + \eta^i\eta^j\bar{\eta}^k\bar{\eta}^l + \eta^i\eta^l\bar{\eta}^j\bar{\eta}^k + \\ &+\eta^j\eta^l\bar{\eta}^i\bar{\eta}^k + \eta^k\eta^l\bar{\eta}^i\bar{\eta}^j) \ . \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Setzen wir die so gewonnene Entwicklung in (5.1.4) ein, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin} \quad = \quad & +\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial K(L)}{\partial C^i}\bigg| \Box C^i \\
& -\frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 K(L)}{\partial C^i \partial C^j}\bigg| \left(\frac{i}{4}\eta^i\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^j + \frac{i}{4}\bar{\eta}^i\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^j + \frac{i}{4}\bar{\eta}^j\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^i + \frac{i}{4}\eta^j\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^i - \frac{1}{2}v^{mi}v^j_m\right) \\
& -\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 K(L)}{\partial C^i \partial C^j \partial C^k}\bigg| \bigg(\frac{1}{4}(\eta^k\sigma^m\bar{\eta}^i v^j_m + \eta^k\sigma^m\bar{\eta}^j v^i_m + \eta^i\sigma^m\bar{\eta}^k v^j_m \\
& \qquad\qquad + \eta^j\sigma^m\bar{\eta}^k v^i_m + \eta^i\sigma^m\bar{\eta}^j v^k_m + \eta^j\sigma^m\bar{\eta}^i v^k_m)\bigg) \\
& -\frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^4 K(L)}{\partial C^i \partial C^j \partial C^k \partial C^l}\bigg| \bigg(\frac{1}{4}(\eta^i\eta^k\bar{\eta}^j\bar{\eta}^l + \eta^j\eta^k\bar{\eta}^i\bar{\eta}^l + \eta^i\eta^j\bar{\eta}^k\bar{\eta}^l \\
& \qquad\qquad + \eta^i\eta^l\bar{\eta}^j\bar{\eta}^k + \eta^j\eta^l\bar{\eta}^i\bar{\eta}^k + \eta^k\eta^l\bar{\eta}^i\bar{\eta}^j)\bigg) \ .
\end{aligned}
$$

Der erste Term kann nach partieller Integration und dem Verschwinden des Integrals über die Divergenz wie folgt geschrieben werden

$$
(\partial_{C^i}K)\partial_m\partial^m C^i = -(\partial_m\partial_{C^i}K)\partial^m C^i = -(\partial_{C^i}\partial_m K)\partial^m C^i = -(\partial_{C^i}\partial_{C^j}K)(\partial_m C^j)(\partial^m C^i),
$$

so dass letztendlich

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin} = & -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 K(L)}{\partial C^i \partial C^j}\bigg| \left((\partial_m C^j)(\partial^m C^i) + i(\eta^i\sigma^m\partial_m\bar{\eta}^j + \bar{\eta}^i\bar{\sigma}^m\partial_m\eta^j) - v^{mi}v^j_m\right) \\
& -\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 K(L)}{\partial C^i \partial C^j \partial C^k}\bigg| \left(\frac{3}{2}\eta^k\sigma^m\bar{\eta}^i v^j_m\right) - \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 K(L)}{\partial C^i \partial C^j \partial C^k \partial C^l}\bigg| \left(\frac{3}{2}\eta^i\eta^j\bar{\eta}^k\bar{\eta}^l\right) \ ,
\end{aligned}
\tag{5.1.10}
$$

wobei über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist.

5.2 Verallgemeinerung des Massenterms

Wir möchten uns nun der massiven Theorie zuwenden. Wir betrachten also einen Satz $\{L^i\}$ linearer Multipletts,

$$
L^i = \frac{1}{2}\left(D^a\Phi^i_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{\Phi}^{i\dot{\alpha}}\right), \qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^i_\alpha = 0 \ , \qquad i = 1, \dots, n_L \ , \tag{5.2.1}
$$

von denen jedes invariant gegenüber den Eichtransformationen

$$
\begin{aligned}
\Phi^i_\alpha \longrightarrow & \Phi^i_\alpha - \frac{i}{2}Y^i_\alpha \\
\bar{\Phi}^i_{\dot{\alpha}} \longrightarrow & \bar{\Phi}^i_{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\bar{Y}^i_{\dot{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{5.2.2}
$$

mit

$$
Y^i_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda^i \tag{5.2.3}
$$

ist. Zur Konstruktion der Lagrangedichte möchten wir Terme der Gestalt

$$\Phi^{i\alpha}\Phi^j_\alpha$$

heranziehen. Wie wir wegen der Analogie zu den Überlegungen aus Abschnitt 3.2.2 bereits wissen, sind diese Terme, welche $B^{imn}B^j_{mn}$ enthalten, nicht eichinvariant. Um die Eichinvarianz zu sichern, sind wir gezwungen, den Stückelberg-Mechanismus anzuwenden und ein Kompensationsfeld einzuführen, das die Feldstärke des Vektor-Superfeldes ist. Wir möchten für die folgenden Betrachtungen zulassen, dass die Anzahl der Vektormultipletts n_V von der Anzahl der linearen Multipletts n_L verschieden sein darf.[1] Anders ausgedrückt werden wir die beiden Arten von Superfeldern mit einer i.a. nicht quadratischen Matrix aneinanderkoppeln. Im Folgenden werden wir die Konstruktion der eichinvarianten Terme sowohl auf der Ebene der Komponentenfelder als auch auf der Ebene der Superfelder durchführen.

Möchten wir die Eichinvarianz im allgemeinen Fall einer beliebigen Anzahl von linearen und Vektor-Superfeldern erhalten, so müssen wir B_{mn} umdefinieren und zu

$$B^A_{mn} = m^A{}_i B^{i\prime}_{mn} + \left(\partial_n v^A_m - \partial_m v^A_n\right) \tag{5.2.5}$$

mit den Transformationen

$$B^{i\prime}_{mn} \to B^{i\prime}_{mn} + \partial_m \Lambda^i_n - \partial_n \Lambda^i_m, \qquad v^A_n \to v^A_n + m^A{}_j \Lambda^j_n \tag{5.2.6}$$

übergehen. Dabei ist

$$m \in M(n_V \times n_L)\ .$$

Hier und im Folgenden fordern wir von der Matrix m, dass

$$m^A{}_j \in \mathbb{R}\ . \tag{5.2.7}$$

$B^{i\prime}_{mn}$ ist der antisymmetrische Tensor aus dem chiralen Spinorsuperfeld. Die Eichinvarianz des so definierten B^i_{mn} ist sofort ersichtlich:

$$\begin{aligned} B^A_{mn} &= m^A{}_i B^{i\prime}_{mn} + \left(\partial_n v^A_m - \partial_m v^A_n\right) \\ \longrightarrow\ & m^A{}_i \left(B^{i\prime}_{mn} + \partial_m \Lambda^i_n - \partial_n \Lambda^i_m\right) + \partial_n \left(v^A_m + m^A{}_j \Lambda^j_m\right) - \partial_m \left(v^A_n + m^A{}_j \Lambda^j_n\right)\right) \\ &= m^A{}_i B^{i\prime}_{mn} + \left(\partial_n v^A_m - \partial_m v^A_n\right)\ . \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Die obigen Betrachtungen möchten wir nun auf der Ebene der Superfelder durchführen. Zunächst sei festzustellen, dass die Invarianz von (5.2.5) unter (5.2.6) der Invarianz von

$$2im^A{}_j \Phi^j_\beta - W^A_\beta \tag{5.2.9}$$

unter

$$\begin{aligned} \Phi^i_\beta &\longrightarrow \Phi^i_\beta + \frac{i}{8}\bar{D}^2 D_\beta \Lambda^i \\ W^A_\beta &\longrightarrow W^A_\beta - \frac{1}{4} m^A{}_j \bar{D}^2 D_\beta \Lambda^j \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

[1] Um den Massenterm eichinvariant zu machen, sind wir gezwungen für jedes lineare Multiplett mindestens ein Vektormultiplett einzuführen, so dass als notwendige Bedingung für das Funktionieren des Stückelberg-Mechanismus

$$n_V \geq n_L \tag{5.2.4}$$

gelten muss. Immer dann, wenn wir davon sprechen, n_V und n_L seien beliebig, setzen wir (5.2.4) voraus.

entspricht. Eine Lorentz- und eichinvariante Lagrangedichte wird also durch

$$\mathcal{L}_m = f_{AB} \int d^2\theta \left(2im^A{}_i \Phi^{i\beta} - W^{A\beta}\right) \left(2im^B{}_j \Phi^j_\beta - W^B_\beta\right) + \text{h.c.} \tag{5.2.11}$$

gegeben sein, wobei f_{AB} eine in ihren Indizes symmetrische Kopplungsmatrix ist. In einer solchen Lagrangedichte treten die Terme $\Phi^i\Phi^j$, $\Phi^i W^A$ und $W^A W^B$ auf. Wir suchen nach anderen Kombinationen dieser Terme, die zu einer Lorentz- und eichinvarianten Lagrangedichte führen. Wir machen den Ansatz:

$$h_{ij}\Phi^i\Phi^j + \alpha_{Ai}W^A\Phi^i + b_{AB}W^AW^B + \text{h.c.} \tag{5.2.12}$$

Die Kopplungsmatrizen h_{ij} und b_{AB} müssen symmetrisch in ihren Indizes sein. Dies gilt nicht mehr für α_{Ai}, die i.a. auch nicht quadratisch sein wird. Ferner lassen wir zu, dass alle drei Kopplungsmatrizen komplex sind.

Damit (5.2.12) eine eichinvariante Lagrangedichte ist, muss bei

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$$

$\delta\mathcal{L}$ entweder verschwinden oder höchstens gleich einer totalen Ableitung sein. Mit (5.2.3) werden die Eichtransformationen (5.2.10) zu

$$\begin{aligned} \Phi^i_\beta &\longrightarrow \Phi^i_\beta - \frac{i}{2}Y^i_\beta \\ W^A_\beta &\longrightarrow W^A_\beta + m^A{}_j Y^j_\beta \ . \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Diese führen wir an (5.2.12) aus. Unter Vernachlässigung in Y quadratischer Terme erhalten wir:

$$\begin{aligned} &h_{ij}(\Phi^i - \frac{i}{2}Y^i)(\Phi^j - \frac{i}{2}Y^j) + \alpha_{Ai}(\Phi^i - \frac{i}{2}Y^i)(W^A + m^A{}_jY^j) \\ &\quad + b_{AB}(W^A + m^A{}_jY^j)(W^B + m^B{}_iY^i) + \text{h.c.} \\ &= h_{ij}\Phi^i\Phi^j + \alpha_{Ai}W^A\Phi^i + b_{AB}W^AW^B - \frac{i}{2}h_{ij}\Phi^iY^j - \frac{i}{2}h_{ij}\Phi^jY^i + \alpha_{Ai}m^A{}_j\Phi^iY^j \\ &\quad - \frac{i}{2}\alpha_{Ai}W^AY^i + b_{AB}m^B{}_iW^AY^i + b_{AB}m^A{}_iW^BY^i + \text{h.c.} \end{aligned}$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf $\delta\mathcal{L}$. Unter Ausnutzung der Symmetrie von h_{ij} und b_{AB} wird

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_m &= -ih_{ij}\Phi^iY^j + \alpha_{Ai}m^A{}_j\Phi^iY^j - \frac{i}{2}\alpha_{Ai}W^AY^i + b_{AB}(m^B{}_iW^AY^i + m^A{}_jW^BY^j) + \text{h.c.} \\ &= (-ih_{ij} + \alpha_{Ai}m^A{}_j)\Phi^iY^j + (-\frac{i}{2}\alpha_{Ai} + 2b_{AB}m^B{}_i)W^AY^i + \text{h.c.} \ . \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Falls $\delta\mathcal{L} = 0$ sein soll, muss

$$\begin{aligned} -ih_{ij} + \alpha_{Ai}m^A{}_j &= 0 \\ -\frac{i}{2}\alpha_{Ai} + 2b_{AB}m^B{}_i &= 0 \ . \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Wir möchten jetzt die gewonnenen Lösungen in unseren Ansatz für $\mathcal{L}$ einsetzen. Aus (5.2.15) erhalten wir:

$$\alpha_{Ai} = -4ib_{AB}m^B{}_i \qquad h_{ij} = -i\alpha_{Ai}m^A{}_j = -4b_{AB}m^B{}_i m^A{}_j \ . \tag{5.2.16}$$

Eingesetzt in (5.2.12) ergibt dies:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^0_m &= -4b_{AB}m^B{}_i m^A{}_j \Phi^i\Phi^j - 4ib_{AB}m^B{}_i W^A\Phi^i + b_{AB}W^AW^B \\
&= b_{AB}\left(-4b_{AB}m^B{}_i m^A{}_j\Phi^i\Phi^j - 4im^B{}_i\Phi^iW^A + W^AW^B\right) \\
&= b_{AB}\left(-4b_{AB}m^B{}_i m^A{}_j\Phi^i\Phi^j - 2im^B{}_i\Phi^iW^A - 2im^A{}_j\Phi^jW^B + W^AW^B\right) \\
&= b_{AB}\left(2im^A{}_i\Phi^i - W^A\right)\left(2im^B{}_j\Phi^j - W^B\right) \ .
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Die Indizes innerhalb der einzelnen Terme durften wir wegen der Symmetrie von b_{AB} vertauschen.

Wir suchen nun nach der Bedingung dafür, dass $\delta\mathcal{L} = total$. Wie man durch Betrachtung der möglichen komplexen Linearkombinationen erkennen kann, ist die einzige Kombination der Terme aus (5.2.12), die auf eine totale Ableitung führt

$$\begin{aligned}
W^AY^j|_{\theta\theta} - \bar{W}^A\bar{Y}^j|_{\bar\theta\bar\theta} &= -\frac{i}{2}\varepsilon^{mnkl}F^A_{mn}F^{(e)j}_{kl} - i\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar\lambda^{(e)j} - i\lambda^{(e)j}\sigma^m\partial_m\bar\lambda^A \\
&\quad -i\partial_m\lambda^{(e)j}\sigma^m\bar\lambda^A - i\partial_m\lambda^A\sigma^m\bar\lambda^{(e)j} \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon^{mnkl}F^A_{mn}F^{(e)j}_{kl} - \partial_m\left(i\lambda^A\sigma^m\bar\lambda^{(e)j} + i\lambda^{(e)j}\sigma^m\bar\lambda^A\right) \ ,
\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

wobei die Produktregel angewandt wurde. Damit $\delta\mathcal{L}$ gleich der Superfeldkombination (5.2.18) ist, muss einerseits wieder

$$-ih_{ij} + \alpha_{Aj}m^A{}_j = 0 \tag{5.2.19}$$

sein. Zum anderen aber muss

$$\left(-\frac{i}{2}\alpha_{Ai} + 2b_{AB}m^B{}_i\right)W^AY^i + \left(\frac{i}{2}\bar\alpha_{Ai} + 2\bar{b}_{AB}m^B{}_i\right)\bar{W}^A\bar{Y}^i$$

eine totale Ableitung ergeben. Um diese zu erhalten, spalten wir α_{Ai} und b_{AB} in ihren Real- und Imaginärteil auf und ordnen anschließend um:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{i}{2}(\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai} + i\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}) + 2(\mathrm{Re}\,b_{AB} + i\mathrm{Im}\,b_{AB})m^B{}_i\right)W^AY^i \\
&\qquad + \left(\frac{i}{2}(\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai} - i\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}) + 2(\mathrm{Re}\,b_{AB} - i\mathrm{Im}\,b_{AB})m^B{}_i\right)\bar{W}^A\bar{Y}^i \\
&= \left(-\frac{i}{2}\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai} + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai} + 2\mathrm{Re}\,b_{AB}m^B{}_i + 2i\mathrm{Im}\,b_{AB}m^B{}_i\right)W^AY^i \\
&\qquad + \left(\frac{i}{2}\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai} + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai} + 2\mathrm{Re}\,b_{AB}m^B{}_i - 2i\mathrm{Im}\,b_{AB}m^B{}_i\right)\bar{W}^A\bar{Y}^i \\
&= \left(-\frac{i}{2}\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai} + 2i\mathrm{Im}\,b_{AB}m^B{}_i\right)(W^AY^i - \bar{W}^A\bar{Y}^i)
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}+2\mathrm{Re}\,b_{AB}m^B{}_i\right)\left(W^AY^i+\bar{W}^A\bar{Y}^i\right)\ . \tag{5.2.20}$$

Wir sehen sofort, dass

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}&=4\mathrm{Re}\,b_{AB}m^B{}_i\\ -\frac{i}{2}\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai}+2i\mathrm{Im}\,b_{AB}m^B{}_i&=const.\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

sein müssen. Gegenüber dem Fall $\delta\mathcal{L}=0$ ist nur die letzte Gleichung, die besagt, dass wir $\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai}$ und $\mathrm{Im}\,b_{AB}$ als zwei verschiedene Konstanten wählen dürfen, neu.

Wir fassen die Bedingungen dafür, dass $\delta\mathcal{L}=total$, (5.2.19) und (5.2.21), zusammen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,h_{ij}&=\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}m^A{}_j\\ -\mathrm{Im}\,h_{ij}&=\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai}m^A{}_j\\ -\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}&=4\mathrm{Re}\,b_{AB}m^B{}_i\\ -\frac{i}{2}\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai}+2i\mathrm{Im}\,b_{AB}m^B{}_i&=const.\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

Dieses Ergebnis wollen wir nun in die Lagrangedichte einarbeiten. Wir setzen:

$$\mathrm{Re}\alpha_{Ai}=\frac{1}{2}e_{Ai},\qquad \mathrm{Im}b_{AB}=c_{AB}$$

$$\mathrm{Re}\ \ b_{AB}=0=\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}=\mathrm{Re}\,h_{ij}\ .$$

Damit wird

$$\mathrm{Im}h_{ij}=-\frac{1}{2}e_{Ai}m^A{}_j\ .$$

Dies setzen wir in (5.2.12) ein:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m^{tot}&=\left(\mathrm{Re}\,h_{ij}+i\mathrm{Im}\,h_{ij}\right)\Phi^i\Phi^j+\left(\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai}+i\mathrm{Im}\,\alpha_{Ai}\right)W^A\Phi^i+\left(\mathrm{Re}\,b_{AB}+i\mathrm{Im}\,b_{AB}\right)W^AW^B+\text{h.c.}\\ &=i\mathrm{Im}\,h_{ij}\Phi^i\Phi^j+\mathrm{Re}\,\alpha_{Ai}W^A\Phi^i+i\mathrm{Im}\,b_{AB}W^AW^B+\text{h.c.}\\ &=-\frac{i}{2}e_{Ai}m^A{}_j\Phi^i\Phi^j+\frac{1}{2}e_{Ai}W^A\Phi^i+ic_{AB}W^AW^B\\ &\qquad+\frac{i}{2}e_{Ai}m^A{}_j\bar{\Phi}^i\bar{\Phi}^j+\frac{1}{2}e_{Ai}\bar{W}^A\bar{\Phi}^i-ic_{AB}\bar{W}^A\bar{W}^B\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Der Term $-ic_{AB}(W^AW^B-\bar{W}^A\bar{W}^B)$ entspricht einer totalen Ableitung und kann daher aus der Wirkung ausintegriert werden. Es bleibt :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m^{tot}&=-\frac{i}{2}e_{Ai}m^A{}_j\Phi^i\Phi^j+\frac{1}{2}e_{Ai}W^A\Phi^i+\text{h.c.}\\ &=\frac{1}{2}e_{Ai}\Phi^i\left(W^A-im^A{}_j\Phi^j\right)+\text{h.c.}\ .\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Als letztes führen wir die Bezeichnung

$$f_{AB}=4b_{AB}$$

ein und kombinieren (5.2.17) und (5.2.24), womit wir für den Massenterm der Lagrangedichte das Endergebnis

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{4}\int d^2\theta \left\{ f_{AB}(2im^A{}_i\Phi^i - W^A)(2im^B{}_j\Phi^j - W^B) + 2e_{Ai}\Phi^i \left(W^A - im^A{}_j\Phi^j\right)\right\} + \text{h.c.} \tag{5.2.25}$$

erhalten. Wir bemerken die formale Ähnlichkeit von (5.2.25) mit dem eindimensionalen Fall (3.2.13), von dem sich (5.2.25) nur durch einen zusätzlichen Index unterscheidet. Dieser zusätzliche Index hat aber zur Folge, dass es sich bei den Kopplungsfunktionen nun um (z. T. nichtquadratische) Matrizen handelt.

5.3 Komponenteninhalt des Massenterms der Lagrangedichte

Im Folgenden geben wir die Komponentengestalt von (5.2.25) an. Die Kopplungsfunktion f_{AB} wollen wir dabei als eine allgemeine Funktion von n_C chiralen Superfeldern N^i ansetzen:

$$\begin{aligned} f_{AB} &= f_{AB}(N) && (5.3.1)\\ N^i &= A^i + \sqrt{2}\theta\chi^i + \theta\theta F^i\ . && (5.3.2)\end{aligned}$$

Wir befassen uns zunächst mit dem ersten Term aus (5.2.25). Diesen schreiben wir unter Ausnutzung der Symmetrie von f_{AB} um:

$$\begin{aligned} & f_{AB}(N) \quad (2im^A{}_i\Phi^i - W^A)(2im^B{}_j\Phi^j - W^B)\\ = \ & f_{AB}(N) \quad (-4m^A{}_i m^B{}_j\Phi^i\Phi^j - 2im^A{}_i\Phi^i W^B - 2im^B{}_j W^A\Phi^i + W^A W^B)\\ = \ & f_{AB}(N) \quad (-4m^A{}_i m^B{}_j\Phi^i\Phi^j - 4im^A{}_i\Phi^i W^B + W^A W^B) \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

und bezeichnen fortan

$$P^{AB}(\Phi, W) := -4m^A{}_i m^B{}_j\Phi^i\Phi^j - 4im^A{}_i\Phi^i W^B + W^A W^B\ . \tag{5.3.4}$$

$f_{AB}(N)$ können wir als Superfunktion im Superraum Taylor-entwickeln. Es gilt:

$$f_{AB}(N) = f_{AB}(A) + \sqrt{2}\theta\chi^i\partial_i f_{AB}(A) + \theta\theta\left(F^i\partial_i f_{AB}(A) - \frac{1}{2}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}(A)\right) \tag{5.3.5}$$

Dabei bezeichnet ∂_i die Ableitung nach A^i. Mit dieser Entwicklung können wir schreiben:

$$\begin{aligned}\left(f_{AB}(N)P^{AB}\right)\Big|_{\theta\theta} &= f_{AB}(A)P^{AB}\big|_{\theta\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_i f_{AB}(A)\chi^i P^{AB}\big|_{\theta}\\ &\quad + \left(F^i\partial_i f_{AB}(A) - \frac{1}{2}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}(A)\right)P^{AB}\big| \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Der Faktor $-\frac{1}{2}$ im zweiten Summanden gegenüber (5.3.5) rührt daher, dass wir einen Term der Art $(\theta\psi)(\theta\phi)$ in einen der Gestalt $(\theta\theta)(\psi\phi)$ umgeformt haben. Wir benötigen jetzt nur noch die Komponenten von P^{AB}. Die Komponentengestalt der einzelnen Superfeld-Produkte aus (5.3.4) lautet

$$\Phi^i\Phi^j = \theta\theta\left(\frac{1}{4}C^iC^j + \frac{1}{8}B^{imn}B^j_{mn} + \frac{i}{16}\varepsilon^{klmn}B^i_{kl}B^j_{mn}\right) \tag{5.3.7}$$

$$\begin{aligned}\Phi^iW^B &= \theta\left(\frac{i}{2}\lambda^BC^i + \frac{i}{4}\sigma^n\bar\sigma^m\lambda^BB^i_{mn}\right)\\ &\quad +\theta\theta\left(-\frac{1}{2}C^iD^B - i\eta^i\lambda^B + \frac{i}{4}B^{ikl}F^B_{kl} - \frac{1}{8}\varepsilon^{mnkl}B^i_{mn}F^B_{kl}\right)\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

$$\begin{aligned}W^AW^B &= -\lambda^A\lambda^B + \theta\left(-i\lambda^AD^B - i\lambda^BD^A - \frac{1}{2}(\sigma^n\bar\sigma^m)\lambda^AF^B_{mn} - \frac{1}{2}(\sigma^n\bar\sigma^m)\lambda^BF^A_{mn}\right)\\ &\quad +\theta\theta\left(D^AD^B - \frac{1}{2}F^{Amn}F^B_{mn} - \frac{i}{4}\varepsilon^{klmn}F^A_{kl}F^B_{mn} - i\lambda^A\sigma^k\partial_k\bar\lambda^B - i\lambda^B\sigma^k\partial_k\bar\lambda^A\right)\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

wobei mit

$$\Phi^i_\alpha = -\theta_\gamma\left(\frac{1}{2}\delta_\alpha{}^\gamma C^i + \frac{1}{4}(\sigma^m\bar\sigma^n)_\alpha{}^\gamma B^i_{mn}\right) + \theta\theta\eta^i_\alpha \tag{5.3.10}$$

gerechnet wurde. Dies setzen wir in (5.3.4) und erhalten nach dem Herausprojizieren der entsprechenden Komponenten:

$$\begin{aligned}P^{AB}\big|_{\theta\theta} &= -m^A{}_im^B{}_j\left(C^iC^j + \frac{1}{2}B^{imn}B^j_{mn} + \frac{i}{4}\varepsilon^{klmn}B^i_{kl}B^j_{mn}\right)\\ &\quad +m^A{}_i\left(2iC^iD^B - 4\eta^i\lambda^B + B^{ikl}F^B_{kl} + \frac{i}{2}\varepsilon^{mnkl}B^i_{mn}F^B_{kl}\right)\\ &\quad +D^AD^B - \frac{1}{2}F^{Amn}F^B_{mn} - \frac{i}{4}\varepsilon^{klmn}F^A_{kl}F^B_{mn} - i\lambda^A\sigma^k\partial_k\bar\lambda^B - i\lambda^B\sigma^k\partial_k\bar\lambda^A\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

$$\begin{aligned}P^{AB}\big|_{\theta} &= m^A{}_i\left(2\lambda^BC^i + (\sigma^n\bar\sigma^m)\lambda^BB^i_{mn}\right)\\ &\quad -i\lambda^AD^B - i\lambda^BD^A - \frac{1}{2}(\sigma^n\bar\sigma^m)\lambda^AF^B_{mn} - \frac{1}{2}(\sigma^n\bar\sigma^m)\lambda^BF^A_{mn}\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

$$P^{AB}\big| = -\lambda^A\lambda^B\ . \tag{5.3.13}$$

Dies setzen wir in (5.3.6) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\Big(f_{AB}(N)P^{AB}\Big)\Big|_{\theta\theta} = &f_{AB}\Big\{-m^A{}_im^B{}_j\left(\frac{1}{4}C^iC^j + \frac{1}{8}B^{imn}B^j_{mn} + \frac{i}{16}\varepsilon^{klmn}B^i_{kl}B^j_{mn}\right)\\ &\quad + m^A{}_i\left(\frac{i}{2}C^iD^B - \eta^i\lambda^B + \frac{1}{4}B^{ikl}F^B_{kl} + \frac{i}{8}\varepsilon^{mnkl}B^i_{mn}F^B_{kl}\right)\\ &\quad + \frac{1}{4}D^AD^B - \frac{1}{8}F^{Amn}F^B_{mn} - \frac{i}{16}\varepsilon^{klmn}F^A_{kl}F^B_{mn} - \frac{i}{2}\lambda^A\sigma^k\partial_k\bar\lambda^B\Big\}\\ &- \frac{1}{\sqrt2}\partial_kf_{AB}(A)\chi^k\Big\{m^A{}_i\left(\frac{1}{2}\lambda^BC^i + \frac{1}{4}(\sigma^n\bar\sigma^m)\lambda^BB^i_{mn}\right)\\ &\quad - \frac{i}{2}\lambda^AD^B - \frac{1}{4}(\sigma^n\bar\sigma^m)\lambda^AF^B_{mn}\Big\}\\ &- \left(\frac{1}{4}F^k\partial_kf_{AB}(A) - \frac{1}{8}\chi^k\chi^l\partial_k\partial_lf_{AB}(A)\right)\lambda^A\lambda^B\ .\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Wir wenden uns nun dem zweiten Term aus (5.2.25) zu:

$$\frac{1}{2}e_{Ai}\Phi^i\left(W^A - im^A{}_j\Phi^j\right)\Big|_{\theta\theta} = \frac{1}{2}e_{Ai}\Phi^i W^A\big|_{\theta\theta} - \frac{i}{2}e_{Ai}m^A{}_j\Phi^i\Phi^j\big|_{\theta\theta} \,. \tag{5.3.15}$$

Mit (5.3.7) und (5.3.8) können wir die Komponentengestalt direkt ablesen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e_{Ai}\Phi^i\left(W^A - im^A{}_j\Phi^j\right)\Big|_{\theta\theta} = e_{Ai}&\left(-\frac{1}{4}C^iD^A - \frac{i}{2}\eta^i\lambda^A + \frac{i}{8}B^{ikl}F^A_{kl} - \frac{1}{16}\varepsilon^{mnkl}B^i_{mn}F^A_{kl}\right)\\ &+e_{Ai}m^A{}_j\left(-\frac{i}{8}C^iC^j - \frac{i}{16}B^{imn}B^j_{mn} + \frac{1}{32}\varepsilon^{klmn}B^i_{kl}B^j_{mn}\right)\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

Gleichungen (5.3.14) und (5.3.16) ergeben zusammen mit ihrem hermitesch konjugierten die Lagrangedichte $\mathcal{L}_m$ in Komponenten. Spalten wir f_{AB} in seinen Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir unter Ausnutzung von Symmetrien:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathrm{m} = &-\frac{1}{4}\mathrm{Re}f_{AB}\check{F}^A_{mn}\check{F}^{B\,mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}f_{AB}\varepsilon^{klmn}\check{F}^A_{kl}\check{F}^B_{mn} - \frac{1}{16}\epsilon^{klmn}e_{Ai}B^i_{kl}(\check{F}^A_{mn} + F^A_{mn})\\ &+\frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}D^AD^B - \frac{1}{2}(e_{Ai} + 2\mathrm{Im}f_{AB}m^B{}_i)C^iD^A - \frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}m^A{}_im^B{}_jC^iC^j\\ &-\frac{i}{2}\,f_{AB}\lambda^A\sigma^k\partial_k\bar\lambda^B - \frac{i}{2}\,f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\sigma^k\partial_k\lambda^B\\ &-\frac{1}{2}(ie_{Ai} + 2f_{AB}m^B{}_i)\eta^i\lambda^A - \frac{1}{2}(-ie_{Ai} + 2f^*_{AB}m^B{}_i)\bar\eta^i\bar\lambda^A\\ &-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_kf_{AB}(m^A{}_iC^i - iD^A)\chi^k\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{k^*}f^*_{AB}(m^A{}_iC^i + iD^A)\bar\chi^k\bar\lambda^B\\ &-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_kf_{AB}\check{F}^A_{mn}\chi^k\sigma^{mn}\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{k^*}f^*_{AB}\check{F}^A_{mn}\bar\chi^k\bar\sigma^{mn}\bar\lambda^B\\ &-\frac{1}{4}F^k\partial_kf_{AB}\lambda^A\lambda^B - \frac{1}{4}F^{*k}\partial_{k*}f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B\\ &+\frac{1}{8}\chi^k\chi^l\partial_k\partial_lf_{AB}\lambda^A\lambda^B + \frac{1}{8}\bar\chi^k\bar\chi^l\partial_{k*}\partial_{l*}f^*_{AB}\bar\lambda^A\bar\lambda^B \,,\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

wobei

$$\check{F}^A_{mn} = F^A_{mn} - m^A{}_iB^i_{mn} \tag{5.3.18}$$

eingeführt wurde. Wir machen noch einmal darauf aufmerksam, dass wir es in (5.3.17) mit zwei verschiedenen partiellen Ableitungen zu tun haben. Bei den auf f_{AB} wirkenden handelt es sich um Ableitungen nach der 1-Komponente A^i des chiralen Multipletts N^i, die übrigen stellen Ableitungen nach den Viererkoordinaten dar.

Nun können wir die Hilfsfelder D^A mit Hilfe ihrer Bewegungsgleichungen eliminieren. Die Terme der Lagrangedichte, die D^A enthalten, sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^D_m = &+\frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}D^AD^B - \frac{1}{2}(e_{Ai} + 2\mathrm{Im}f_{AB}m^B{}_i)C^iD^A\\ &+\frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_kf_{AB}D^A\chi^k\lambda^B - \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_{k^*}f^*_{AB}D^A\bar\chi^k\bar\lambda^B \,.\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Wir benutzen die Euler-Lagrange-Gleichungen für D^A und erhalten:

$$D^A = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,f)^{-1AB}\left((e_{Bi} + 2\mathrm{Im}f_{BC}m^C{}_i)C^i - \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_kf_{BC}\chi^k\lambda^C + \partial_{k^*}f^*_{BC}\bar\chi^k\bar\lambda^C)\right) \,. \tag{5.3.20}$$

Setzen wir dies in (5.3.17) ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{m}} =& -\frac{1}{4}\mathrm{Re} f_{AB}\check{F}^A_{mn}\check{F}^{B\,mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im} f_{AB}\varepsilon^{klmn}\check{F}^A_{kl}\check{F}^B_{mn} - \frac{1}{16}\epsilon^{klmn}e_{Ai}B^i_{kl}(\check{F}^A_{mn} + F^A_{mn}) - V \\
& -\frac{1}{2}(ie_{Ai} + 2f_{AB}m^B{}_i)\eta^i\lambda^A - \frac{1}{2}(-ie_{Ai} + 2f^*_{AB}m^B{}_i)\bar{\eta}^i\bar{\lambda}^A \\
& -\frac{i}{2}\, f_{AB}\lambda^A\sigma^k\partial_k\bar{\lambda}^B - \frac{i}{2}\, f^*_{AB}\bar{\lambda}^A\bar{\sigma}^k\partial_k\lambda^B \\
& -\frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_k f_{AB}m^A{}_iC^i\chi^k\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_{k*} f^*_{AB}m^A{}_iC^i\bar{\chi}^k\bar{\lambda}^B \\
& +\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{Re}\, f)^{-1AB}\left(\partial_l f_{AG}\chi^l\lambda^G - \partial_{l*} f^*_{AG}\bar{\chi}^l\bar{\lambda}^G\right)\left(e_{Bi} + 2\mathrm{Im} f_{BC}m^C{}_i\right)C^i \\
& +\frac{1}{16}(\mathrm{Re}\, f)^{-1AB}\partial_k f_{BC}\left(\partial_l f_{AG}\chi^l\lambda^G - \partial_{l*} f^*_{AG}\bar{\chi}^l\bar{\lambda}^G\right)\chi^k\lambda^C \\
& +\frac{1}{16}(\mathrm{Re}\, f)^{-1AB}\partial_{k*} f^*_{BC}\left(\partial_{l*} f^*_{AG}\bar{\chi}^l\bar{\lambda}^G - \partial_l f_{AG}\chi^l\lambda^G\right)\bar{\chi}^k\bar{\lambda}^C \\
& -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_k f_{AB}\check{F}^A_{mn}\chi^k\sigma^{mn}\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{k^*} f^*_{AB}\check{F}^A_{mn}\bar{\chi}^k\bar{\sigma}^{mn}\bar{\lambda}^B \\
& -\frac{1}{4}F^k\partial_k f_{AB}\lambda^A\lambda^B - \frac{1}{4}F^{*k}\partial_{k*} f^*_{AB}\bar{\lambda}^A\bar{\lambda}^B \\
& +\frac{1}{8}\chi^k\chi^l\partial_k\partial_l f_{AB}\lambda^A\lambda^B + \frac{1}{8}\bar{\chi}^k\bar{\chi}^l\partial_{k*}\partial_{l*} f^*_{AB}\bar{\lambda}^A\bar{\lambda}^B \ ,
\end{aligned}
\tag{5.3.21}
$$

mit dem skalaren Potential

$$
V = \frac{1}{8}\left[(\mathrm{Re}\, f)^{-1AB}(e_{Ai} + 2\mathrm{Im} f_{AC}m^C{}_i)(e_{Bj} + 2\mathrm{Im} f_{BD}m^D{}_j) + 4\mathrm{Re}\, f_{AB}m^A{}_im^B{}_j\right]C^iC^j \ . \tag{5.3.22}
$$

Mit (5.3.18) lassen sich die in B^i quadratischen Terme der Lagrangedichte leicht auffinden

$$
\mathcal{L}^{B2}_m = -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\, f_{AB}m^A{}_im^B{}_jB^{i\,mn}B^j_{mn} + \frac{1}{8}\left(\mathrm{Im}\, f_{AB}m^A{}_im^B{}_j + \frac{1}{2}e_{Ai}m^A{}_j\right)\varepsilon^{klmn}B^i_{kl}B^j_{mn} \ . \tag{5.3.23}
$$

Wir sehen, dass der zweite Term keine Metrik enthält, d.h. topologisch ist. Die beiden Kopplungsmatrizen vor den quadratischen Termen werden als Massenmatrizen[2] bezeichnet

$$
\begin{aligned}
(M^2)_{ij} =&\ \mathrm{Re}\, f_{AB}m^A{}_im^B{}_j \\
(M^2_T)_{ij} =&\ \mathrm{Im}\, f_{AB}m^A{}_im^B{}_j + \frac{1}{2}e_{Ai}m^A{}_j
\end{aligned}
\tag{5.3.24}
$$

womit

$$
\mathcal{L}^{B2}_m = -\frac{1}{4}(M^2)_{ij}B^{i\,mn}B^j_{mn} + \frac{1}{8}(M^2_T)_{ij}\varepsilon^{klmn}B^i_{kl}B^j_{mn} \ . \tag{5.3.25}
$$

[2] Die Untersuchung ihrer Eigenschaften verschieben wir auf Anhang C.

5.4 Minima des skalaren Potentials

Wir möchten als nächstes nach Minima des skalaren Potentials in den physikalischen Feldern suchen. Wir führen die Rechnungen zunächst für den Fall von nur einem und anschließend für eine beliebige Anzahl n_L von linearen Multipletts durch. Im ersten Fall erhalten wir das skalare Potential aus (5.3.22), indem wir darin die Indizes $i = j = 1$ setzen. Das skalare Potential lautet dann:

$$\begin{aligned} V =& \frac{1}{8} \left\{ \left(e_A + 2\mathrm{Im} f_{AC} m^C \right) \mathrm{Re} f^{-1AB} \left(e_B + 2\mathrm{Im} f_{BD} m^D \right) + 4\mathrm{Re} f_{AB} m^A m^B \right\} C^2 \\ =& \frac{1}{8} \left(e_A - 2i f_{AC} m^C \right) \mathrm{Re}\, f^{-1AB} \left(e_B + 2i f^*_{BD} m^D \right) C^2 \ . \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Wir sehen, dass $V = V(C)$. Das wollen wir minimieren.

$$\frac{\partial V}{\partial C} = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{4} \left\{ \left(e_A + 2\mathrm{Im} f_{AC} m^C \right) \mathrm{Re} f^{-1AB} \left(e_B + 2\mathrm{Im} f_{BD} m^D \right) + 4\mathrm{Re} f_{AB} m^A m^B \right\} C = 0 \tag{5.4.2}$$

Die Gleichung ist trivial durch $C = 0$ gelöst. Aus der zweiten Ableitung nach C erhalten wir als Bedingung für ein Minimum

$$\frac{1}{4} \left\{ \left(e_A + 2\mathrm{Im} f_{AC} m^C \right) \mathrm{Re} f^{-1AB} \left(e_B + 2\mathrm{Im} f_{BD} m^D \right) + 4\mathrm{Re} f_{AB} m^A m^B \right\} > 0 \tag{5.4.3}$$

bzw.

$$\frac{1}{4} \left(e_A - 2i f_{AC} m^C \right) \mathrm{Re}\, f^{-1AB} \left(e_B + 2i f^*_{BD} m^D \right) > 0 \ . \tag{5.4.4}$$

Dies ist auf jeden Fall erfüllt: Da $\mathrm{Re}\, f_{AB}$ positiv definit ist, ist $\mathrm{Re}\, f^{-1AB}$ es auch. Die linke Seite von (5.4.4) ist hingegen nichts anderes als die Definition der Definitheit $< \xi, A\xi >$ mit einem speziellen Vektor ξ. Das skalare Potential (5.4.1) besitzt an der Stelle $C = 0$ also ein Minimum.

Wir kommen nun zum verallgemeinerten Fall und betrachten also das skalare Potential in der Form (5.3.22). Die Ableitung nach C_k ergibt

$$\frac{\partial V}{\partial C^k} = \left[\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A{}_k m^B{}_j + \frac{1}{4} (\mathrm{Re}\, f)^{-1AB} (e_{Ak} + 2\mathrm{Im} f_{AC} m^C{}_k)(e_{Bj} + 2\mathrm{Im} f_{BD} m^D{}_j) \right] C^j \ . \tag{5.4.5}$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial V}{\partial C^k} = 0 \ , \qquad k = 1, \ldots, n_L \tag{5.4.6}$$

entspricht einem linearen Gleichungssystem von n_L Gleichungen mit n_L Unbekannten. Da die C^i als linear unabhängig angenommen werden dürfen, gibt es nur die triviale Lösung $C^k = 0$. Durch zweites Ableiten nach den Feldern erhalten wir die Hessesche Matrix von V:

$$(HessV)_{ij} = (\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j + \frac{1}{4} (\mathrm{Re}\, f)^{-1AB} (e_{Ai} + 2\mathrm{Im} f_{AC} m^C{}_i)(e_{Bj} + 2\mathrm{Im} f_{BD} m^D{}_j)) \tag{5.4.7}$$

Wir wollen zeigen, dass diese positiv definit ist. Hierzu betrachten wir die folgenden beiden Sätze [27, 28]:

1. Eine positiv definite, symmetrische Matrix A kann stets als ein Produkt einer nichtsingulären Matrix G mit ihrer Transponierten G^T dargestellt werden

$$A \text{ symmetrisch, positiv definit} \quad \Rightarrow \quad A = GG^T \ . \tag{5.4.8}$$

2. Sei $A \in M(m \times n)$ und
$$B = A^T A \ ,$$
wobei A^T die Transponierte von A ist. Dann ist B positiv semidefinit. Ist ferner der Rang von A
$$Rg(A) = n \ ,$$
so ist B positiv definit.

In der Form (5.4.7) ist die Hessesche Matrix $(HessV)_{ij}$ eine Summe zweier Matrizen. Beide Summanden haben formal die Gestalt

$$F_{AB} U^A{}_i U^B{}_j \tag{5.4.9}$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten $n_V \times n_V$ Matrix F und einer $n_V \times n_L$ Matrix U. Wir wenden uns der ersten Matrix aus (5.4.7),

$$\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j \ ,$$

zu. Da $\mathrm{Re}\, f_{AB}$ positiv definit ist, können wir es nach (5.4.8) schreiben als $\mathrm{Re}\, f_{AB} = G_{AC} G_{BC}$ mit einer nichtsingulären Matrix G. Damit gilt

$$\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j \ = \ G_{AC} G_{BC} m^A{}_i m^B{}_j = A_{Ci} A_{Cj} =: B_{ij} \ , \tag{5.4.10}$$

wobei wir $A_{Ci} = G_{AC} m^A{}_i$ abgekürzt haben. Nach 2. wird die so definierte Matrix B positiv definit sein, sobald der Rang von A

$$Rg(A) = n_L \ . \tag{5.4.11}$$

Mit der Abschätzung

$$Rg(C) + Rg(D) - n \leq Rg(CD) \leq min\{Rg(C), Rg(D)\} \tag{5.4.12}$$

für $C \in M(m \times n)$ und $D \in M(n \times r)$, folgt sofort, dass unter der Voraussetzung, dass der Rang von $m^A{}_i$ maximal, d.h.

$$Rg(m^A{}_i) = n_L \tag{5.4.13}$$

ist, die Bedingung (5.4.11) erfüllt ist. Damit ist gezeigt worden, dass $\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j$ positiv definit ist.[3] Die gleiche Argumentation können wir nun für die zweite Matrix aus (5.4.7),

$$(\mathrm{Re}\, f)^{-1AB} (e_{Ai} + 2\mathrm{Im} f_{AC} m^C{}_i)(e_{Bj} + 2\mathrm{Im} f_{BD} m^D{}_j) \ , \tag{5.4.14}$$

durchführen, mit dem Unterschied, dass es nun genügt, dass (5.4.14) positiv semidefinit ist. Da $(\mathrm{Re}\, f)^{-1AB}$ positiv definit ist, folgt dies sofort aus den oben angeführten Sätzen. Damit ist gezeigt worden, dass $(HessV)_{ij}$ positiv definit ist. An der Stelle

$$C^i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_L$$

besitzt das skalare Potential (5.3.22) also ein Minimum.

[3] Die hier diskutierte Matrix entspricht der in (5.3.24) definierten Massenmatrix $(M^2)_{ij}$. Diese sollte als solche positiv definit sein.

Kapitel 6

Dualitätstransformationen

Wir sagen, dass zwei Theorien zueinander dual sind, wenn sie sich aus derselben Lagrangedichte herleiten lassen. Diese bezeichnet man als „first-order Lagrangedichte". Sie ist eine Funktion der betreffenden Superfelder[1] und man erhält die zueinander dualen Theorien durch Wiedereinsetzen der aus ihr resultierenden Bewegungsgleichungen. In anderen Worten: Wir variieren nach einem Superfeld, bestimmen durch Nullsetzen der Variation seine Bewegungsgleichungen und setzen diese in die first-order Lagrangedichte ein. Das Ergebnis ist die Lagrangedichte für das andere Superfeld. So ist das masselose lineare Multiplett dual zum chiralen Multiplett. Diese Dualität besteht auch auf der Ebene der Komponentenfelder. Dort wird das masselose antisymmetrische Tensorfeld zum skalaren Feld dual sein.

In diesem Kapitel studieren wir die dualen Formulierungen des antisymmetrischen Tensors in Theorien mit mehreren linearen Multipletts.

6.1 Masseloser Fall

Im Folgenden stellen wir eine first-order Lagrangedichte auf und zeigen, dass im masselosen Fall eine Theorie mit n_L linearen und n_V Vektormultipletts dual zu einer Theorie mit n_L chiralen und n_V Vektormultipletts ist. Wir geben die Komponentengestalt der dualen Lagrangedichte an und zeigen die Gleichheit der kinetischen Terme sowie der skalaren Potentiale aus beiden Theorien.

6.1.1 First-order Lagrangedichte

Um die Dualität zwischen einer Theorie mit n_L linearen und n_V Vektormultipletts und einer mit n_L chiralen und n_V Vektormultipletts zu zeigen, müssen wir eine first-order Lagrangedichte aufstellen, aus der sich beide Theorien herleiten lassen. Wir wollen zeigen, dass

$$\mathcal{L}_{first} = -\int d^4\theta\big(K(V^{0i}) + e_{Ai}V^{0i}V^A + \delta_{ik}V^{0i}(S^k + \bar{S}^k)\big) + \frac{1}{4}\Big(\int d^2\theta f_{AB}W^AW^B + \text{ h.c.}\Big) \tag{6.1.1}$$

[1] In den von uns in diesem Kapitel noch aufzustellenden first-order Lagrangedichten werden mit Ausnahme der chiralen Superfelder, Superfelder, die Zwangsbedingungen unterliegen, d.h. sog. „constrainte" Superfelder, wie es die linearen Multipletts sind, durch nicht constrainte Superfelder ersetzt werden.

mit

$$i = 1, \dots, n_L \qquad \text{und} \qquad A = 1, \dots, n_V$$

V^{0i}, n_L reelle (aber nicht lineare) Superfelder

S^k, n_L skalare Superfelder

V^A, n_V Vektorsuperfelder

die gesuchte first-order Lagrangedichte ist.

Wir führen zunächst die Variation nach den S^k aus:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{first}}{\delta S^k} = \frac{1}{4}\delta_{ik}\bar{D}^2 V^{0i} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{D}^2 V^{0k} = 0 \tag{6.1.2}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{first}}{\delta \bar{S}^k} = \frac{1}{4}\delta_{ik} D^2 V^{0i} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad D^2 V^{0k} = 0 \; . \tag{6.1.3}$$

Wir erhalten also

$$\bar{D}^2 V^{0k} = D^2 V^{0k} = 0, \qquad k = 1, \dots, n_L \; , \tag{6.1.4}$$

was uns n_L lineare Multipletts definiert:

$$V^{0k} = L^k \; . \tag{6.1.5}$$

Dies setzen wir in die first-order Lagrangedichte (6.1.1) ein. Das Integral

$$-\delta_{ik}\int d^4\theta L^i (S^k + \bar{S}^k)$$

wird aus der Wirkung hinausfallen, denn es ist:

$$\begin{aligned}
\delta_{ik}\int d^4\theta L^i (S^k + \bar{S}^k) &= \delta_{ik}\int d^4\theta L^i (\bar{D}^2\Sigma^k + D^2\bar{\Sigma}^k) \\
&= -(-1)^{\pi(L^i)}\delta_{ik}\int d^4\theta[(\bar{D}_{\dot\alpha}L^i)(\bar{D}^{\dot\alpha}\Sigma^k + (D^\alpha L^i)(D_\alpha\bar{\Sigma}^k)] \\
&= -\delta_{ik}\int d^4\theta[(\bar{D}_{\dot\alpha}L^i)(\bar{D}^{\dot\alpha}\Sigma^k + (D^\alpha L^i)(D_\alpha\bar{\Sigma}^k)] \\
&= (-1)^{\pi(\bar{D}_{\dot\alpha}L^i)}\delta_{ik}\int d^4\theta[(\bar{D}^2 L^i)\Sigma^k + (D^2 L^i)\bar{\Sigma}^k] \\
&= \delta_{ik}\int d^4\theta[\underbrace{(\bar{D}^2 L^i)}_{=0}\Sigma^k + \underbrace{(D^2 L^i)}_{=0}\bar{\Sigma}^k] = 0 \; ,
\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

wobei wir im ersten Schritt die chiralen Superfelder S^k und $\bar{S}^k$ durch allgemeine Superfelder ausgedrückt haben (vgl. Fußnote 6 auf Seite 24). Damit erhalten wir aus (6.1.1)

$$\mathcal{L} = -\int d^4\theta \left(K(L^i) + e_{Ai}L^i V^A\right) + \frac{1}{4}\left(\int d^2\theta f_{AB}W^A W^B + \text{ h.c.}\right) . \tag{6.1.7}$$

Dies ist genau die Wirkung für n_L lineare und n_V Vektormultipletts.

Als nächstes suchen wir die Bewegungsgleichungen für V^{0k}

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{first}}{\delta V^{0k}} = \partial_{V^{0k}} K(V^{0j}) + e_{Ak}V^A + S^k + \bar{S}^k \stackrel{!}{=} 0 \; . \tag{6.1.8}$$

Aus

$$\partial_{V^{0k}} K(V^{0j}) + e_{Ak}V^A + S^k + \bar{S}^k = 0 \tag{6.1.9}$$

gewinnen wir V^{0k} als eine Funktion h^k von $e_{Ak}V^A+S^k+\bar{S}^k$ sowie evtl. der anderen V^{0i}, $\quad i \neq k$. Die genaue Gestalt von h^k wird von der Gestalt von $K(V^{0j})$ abhängen, die Auflösbarkeit von (6.1.9) nach V^{0k} vorausgesetzt. Daher schreiben wir

$$V^{0k} = h^k(V^{0i}, e_{Ak}V^A + S^k + \bar{S}^k) \ . \tag{6.1.10}$$

Dies setzen wir in die first-order Lagrangedichte (6.1.1) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\int d^4\theta\big(K(h^j) + e_{Ai}h^iV^A + \delta_{ik}h^i(S^k+\bar{S}^k)\big) + \frac{1}{4}\Big(\int d^2\theta f_{AB}W^AW^B + \text{ h.c.}\Big) \\ &= -\int d^4\theta\big(K(h^j) + (e_{Ai}V^A + \delta_{ik}(S^k+\bar{S}^k))h^i\big) + \frac{1}{4}\Big(\int d^2\theta f_{AB}W^AW^B + \text{ h.c.}\Big)\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Mit der Legendre-Transformierten $\hat{K}$ von K

$$\hat{K}(e_{Ai}V^A + \delta_{ik}(S^k+\bar{S}^k)) = K(h^j) + (e_{Ai}V^A + \delta_{ik}(S^k+\bar{S}^k)h^i \tag{6.1.12}$$

können wir dies auch schreiben als

$$\mathcal{L} = -\int d^4\theta\big(\hat{K}(e_{Ai}V^A + \delta_{ik}(S^k+\bar{S}^k)\big) + \frac{1}{4}\Big(\int d^2\theta f_{AB}W^AW^B + \text{ h.c.}\Big) \ . \tag{6.1.13}$$

Die Lagrangedichte (6.1.13) ist gerade diejenige für n_V Vektormultipletts und n_L chirale Multipletts.

Wir fragen uns noch, wie die Eichtransformationen von S^k und $\bar{S}^k$ aussehen müssen, damit (6.1.13) eichinvariant bleibt. Das zweite Integral in (6.1.13) bleibt invariant unter

$$V^A \longrightarrow V^A + \Sigma^A + \bar{\Sigma}^A \ , \tag{6.1.14}$$

wobei die Σ^A n_V chirale Superfelder sind. Wir definieren die Eichtransformationen von S^k und $\bar{S}^k$ zu

$$S^k \longrightarrow S^k - e_{Ak}\Sigma^A, \qquad \bar{S}^k \longrightarrow \bar{S}^k - e_{Ak}\bar{\Sigma}^A \ , \tag{6.1.15}$$

was das Argument von $\hat{K}$ eichinvariant macht.

6.1.2 Komponentengestalt der dualen Lagrangedichte

Wir wollen den Komponenteninhalt der dualen Lagrangedichte (6.1.13) angeben. Die darin auftauchenden Superfelder besitzen die folgenden Entwicklungen:

$$V^A = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v^a_m + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}^A - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda^A + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D^A \tag{6.1.16}$$

$$S^k = E^k + \sqrt{2}\theta\psi^k + \theta\theta F^k \tag{6.1.17}$$

$f_{AB}(N)$ hängt von n_C chiralen Multipletts N^i ab.

$$N^i = A^i + \sqrt{2}\theta\chi^i + \theta\theta F^i_N \tag{6.1.18}$$

$$f_{AB}(N) = f_{AB}(A) + \sqrt{2}\theta\chi^i\partial_i f_{AB} + \theta\theta\left(F^i_N\partial_i f_{AB} - \frac{1}{2}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\right) \tag{6.1.19}$$

Die Komponentenfelder der chiralen Multipletts (6.1.17) und (6.1.18) sind dabei als Funktionen von

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$$

zu verstehen.
Wir geben zunächst die Entwicklung von $\frac{1}{4}(\int d^4\theta f_{AB}(N)W^AW^B + \text{ h.c.})$, die wir bereits mit (2.7.7) gefunden haben, an:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\int d^4\theta f_{AB}(N)W^AW^B + \text{ h.c.}\right)\\
&\quad = -\frac{1}{4}\mathrm{Re}f_{AB}F^{A\,mn}F^B_{mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\, f_{AB}\epsilon^{mnpr}F^A_{mn}F^B_{pr} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}f_{AB}D^AD^B\\
&\quad - \frac{i}{2}\left(f_{AB}\lambda^A\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}^B - f^*{}_{AB}\partial_m\lambda^A\sigma^m\bar{\lambda}^B\right) + \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB}D^A\chi^i\lambda^B - \frac{i}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*}f^*_{AB}D^A\bar{\chi}^i\bar{\lambda}^B\\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_i f_{AB}F^A_{mn}\chi^i\sigma^{mn}\lambda^B - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\partial_{i^*}f^*_{AB}F^A_{mn}\bar{\chi}^i\bar{\sigma}^{mn}\bar{\lambda}^B\\
&\quad - \frac{1}{4}F^i_N\partial_i f_{AB}\lambda^A\lambda^B - \frac{1}{4}F^{*i}_N\partial_{i*}f^*_{AB}\bar{\lambda}^A\bar{\lambda}^B\\
&\quad + \frac{1}{8}\chi^i\chi^j\partial_i\partial_j f_{AB}\lambda^A\lambda^B + \frac{1}{8}\bar{\chi}^i\bar{\chi}^j\partial_{i*}\partial_{j*}f_{AB}\bar{\lambda}^A\bar{\lambda}^B\ .
\end{aligned}\tag{6.1.20}$$

Das erste Integral in (6.1.13) lautet

$$\begin{aligned}
&-\int d^4\theta \hat{K}(e_{Ai}V^A + S^i + \bar{S}^i)\\
&\quad = -\frac{1}{2}\hat{K}_i e_{Ai}D^A\\
&\qquad - \frac{1}{2}\hat{K}_{ij}\{-2\partial^m(\mathrm{Re}\,E_i)\partial_m(\mathrm{Re}\,E_j) - \frac{1}{2}(e_{Ai}v^{A\,m} + 2\partial^m(\mathrm{Im}\,E_i))(e_{Bj}v^{B\,m} + 2\partial^m(\mathrm{Im}\,E_j))\\
&\qquad\qquad + i\sqrt{2}e_{Ai}(\psi_j\lambda^A - \bar{\psi}_j\bar{\lambda}^A) - i(\psi_j\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i + \bar{\psi}_j\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_i) + 2F^iF^{*j}\}\\
&\qquad - \frac{1}{2}\hat{K}_{ijk}\{-\psi_i\sigma^m\bar{\psi}_j(e_{Ak}v^{A\,m} + 2\partial^m(\mathrm{Im}\,E_k)) - (\psi_i\psi_j)F^*_k - (\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j)F_k\}\\
&\qquad - \frac{1}{4}\hat{K}_{ijkl}\psi^i\psi^j\bar{\psi}^k\bar{\psi}^l
\end{aligned}\tag{6.1.21}$$

wobei $\hat{K}_i$ die partielle Ableitung von $\hat{K}$ nach $2\mathrm{Re}\,E_i$ bezeichnet. Die Entwicklungen (6.1.20) und (6.1.21) stellen zusammen die duale Lagrangedichte in Komponenten dar.

In (6.1.21) erkennen wir, dass die $(\mathrm{Im}\,E_k)$ immer zusammen mit einer Linearkombination der v^A auftauchen. Sie spielen die Rolle von n_L Goldstone-Bosonen und tragen die massiven Freiheitsgrade von n_L Linearkombination der v^A. Wir können sie durch eine geeignete Wahl der Eichtransformation (6.1.15) zum Verschwinden bringen. Aufgrund der entsprechenden Eichtransformation für die Vektorfelder (6.1.14) werden diese Freiheitsgrade in den v^A wieder auftauchen. Man sagt in diesem Zusammenhang, die v^A hätten die $(\mathrm{Im}\,E_k)$ „gegessen". Die entsprechende Eichung bezeichnet man als „unitäre Eichung".

6.1.3 Kinetischer Term und skalares Potential

Wir möchten uns nun auf die bosonischen Terme der Lagrangedichte aus dem vorigen Abschnitt beschränken. In diesem Fall lauten die Bewegungsgleichungen für F^i und D^A

$$F^i = 0, \qquad D^A = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\, f)^{-1AC}\hat{K}_i e_{Ci}\ . \tag{6.1.22}$$

Wir wollen nun in die unitäre Eichung, in der $\mathrm{Im}\, E_k$ verschwindet, gehen und geben den bosonischen Teil der dualisierten Lagrangedichte an.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{bosonisch} = & - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f_{AB} D^A D^B \\
& - \frac{1}{2}\hat{K}_{ij}\left(-2\partial^m(\mathrm{Re}\, E_i)\partial_m(\mathrm{Re}\, E_j) - \frac{1}{2}e_{Ai}e_{Bj}v^{A\,m}v^{B\,m} + 2F^iF^{*j}\right) \\
& - \frac{1}{4}\mathrm{Re} f_{AB}F^{A\,mn}F^B_{mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\, f_{AB}\epsilon^{mnpr}F^A_{mn}F^B_{pr}\ .
\end{aligned} \tag{6.1.23}$$

Unter Ausnutzung der Bewegungsgleichungen (6.1.22) erhalten wir aus (6.1.23)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{bosonisch} = & - \frac{1}{4}\mathrm{Re} f_{AB}F^{A\,mn}F^B_{mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\, f_{AB}\epsilon^{mnpr}F^A_{mn}F^B_{pr} \\
& + \frac{1}{2}\hat{K}_{ij}\left(\partial^m(\mathrm{Re}\, E_i)\partial_m(\mathrm{Re}\, E_j) + \frac{1}{4}e_{Ai}e_{Bj}v^{A\,m}v^{B\,m}\right) - V
\end{aligned} \tag{6.1.24}$$

mit dem skalaren Potential

$$\begin{aligned}
V & = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f_{AB}D^AD^B \\
& = \frac{1}{8}\mathrm{Re}\, f_{AB}(\mathrm{Re}\, f)^{-1AC}\hat{K}_i e_{Ci}(\mathrm{Re}\, f)^{-1BD}\hat{K}_j e_{Dj} \\
& = \frac{1}{8}(\mathrm{Re}\, f)^{-1CD}e_{Ci}e_{Dj}\hat{K}_i\hat{K}_j\ .
\end{aligned} \tag{6.1.25}$$

Die skalaren Potentiale vor und nach der Dualisierung müssen übereinstimmen. Das skalare Potential vor der Dualisierung war durch (5.3.22) gegeben. Setzen wir hierin die Massen Null, so wird dies zu

$$V = \frac{1}{8}(\mathrm{Re}\, f)^{-1AB}e_{Ai}e_{Bj}C^iC^j\ . \tag{6.1.26}$$

Vergleichen wir (6.1.25) mit (6.1.26), so sehen wir, dass die skalaren Potentiale übereinstimmen, falls

$$\hat{K}_i = C^i\ . \tag{6.1.27}$$

Als nächstes wollen wir die kinetischen Terme der Theorien vor und nach der Dualisierung untersuchen. Sie lauten

$$\mathcal{L}_C = -\frac{1}{4}K_{ij}\partial^m C^i\partial_m C_j \tag{6.1.28}$$

$$\mathcal{L}_{2\mathrm{Re}\, E} = \hat{K}_{ij}\partial^m(\mathrm{Re}\, E_i)\partial_m(\mathrm{Re}\, E_j)\ . \tag{6.1.29}$$

Wir zeigen, dass mit (6.1.27) die kinetischen Terme übereinstimmen. Hierzu setzen wir (6.1.27) in (6.1.28) ein:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_C &= -\frac{1}{4}K_{ij}(C^r)\partial^m C^i \partial_m C^j j \\
&= -\frac{1}{4}K_{ij}(\hat{K}^r)\partial^m \hat{K}^i \partial_m \hat{K}^j \\
&= -\frac{1}{4}K_{ij}\hat{K}^{ik}\partial^m(2\mathrm{Re}\, E^k)\hat{K}^{jl}\partial_m(2\mathrm{Re}\, E^l) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \hat{K}^i}K_j \frac{\partial \hat{K}^i}{\partial(2\mathrm{Re}\, E^k)}\hat{K}_{jl}\partial^m(2\mathrm{Re}\, E^k)\partial_m(2\mathrm{Re}\, E^l) \\
&= -\frac{\partial K_j}{\partial(2\mathrm{Re}\, E^k)}\hat{K}_{jl}\partial^m(2\mathrm{Re}\, E^k)\partial_m(2\mathrm{Re}\, E^l) \\
&= \hat{K}_{kl}\partial^m(2\mathrm{Re}\, E^k)\partial_m(2\mathrm{Re}\, E^l) \\
&= \mathcal{L}_{2\mathrm{Re}\, E} \ .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\frac{\partial K_j}{\partial 2\mathrm{Re}\, E^k} = -\delta^j_k$ benutzt. Dass dies tatsächlich so ist, mache man sich wie folgt klar: K und $\hat{K}$ sind miteinander über die Legendre-Transformation (6.1.12) verknüpft. Mit $\hat{K}^i = h^i$ erhalten wir auf der Ebene der Komponentenfelder

$$K^j(\hat{K}^i) = K^j(C^i) = K^j(h^i)\Big| = -(e_{Aj}V^A + S_j + \bar{S}_j)\Big| = -2\mathrm{Re}\, E^j \tag{6.1.30}$$

und damit

$$\frac{\partial K_j}{\partial 2\mathrm{Re}\, E^k} = -\delta^j_k \ . \tag{6.1.31}$$

Wir haben also gezeigt, dass sowohl die kinetischen Terme als auch die skalaren Potentiale beider Theorien übereinstimmen.

6.2 Massiver Fall

In diesem Abschnitt wollen wir uns der massiven Theorie zuwenden. Wir werden eine first-order Lagrangedichte aufstellen und die Dualität von n_L massiven linearen Multipletts, die an n_V Vektormultipletts koppeln, zu n_L massiven und $n_V - n_L$ masselosen Vektormultipletts zeigen.

6.2.1 First-order Lagrangedichte

Im massiven Fall lautet die Lagrangedichte für n_L lineare Multipletts

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\int d^4\theta K(L^i) \\
&\quad +\frac{1}{4}\int d^2\theta \big\{ f_{AB}(2im^A{}_i\Phi^i - W^A)(2im^B{}_j\Phi^j - W^B) \\
&\qquad + 2e_{Ai}\Phi^i \left(W^A - im^A{}_j\Phi^j\right) \big\} + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Um zu einer first-order Lagrangedichte zu gelangen, gehen wir wie folgt vor:

1. Wir ersetzen in (6.2.1)

$$-K(L^i) \longrightarrow U(V^{0i} + S^i + \bar{S}^i) \ . \tag{6.2.2}$$

2. Wir addieren zu (6.2.1) den Term

$$-\int d^4\theta \delta_{ik}(V^{0i} + S^i + \bar{S}^i)(D^\alpha \Phi^k_\alpha + \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{\Phi}^{k\,\dot\alpha}) \ . \tag{6.2.3}$$

V^{0i} sind n_L Vektormultipletts; S^i und $\bar{S}^i$ sind n_L chirale Multipletts; Φ^k_α und $\bar{\Phi}^k_{\dot\alpha}$ sind n_L chirale Spinormultipletts. Wir wählen die Bezeichnung

$$\widetilde{V}^i := V^{0i} + S^i + \bar{S}^i \tag{6.2.4}$$

und gelangen damit zur first-order Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{first} \ &= \ \int d^4\theta \left\{ U(\widetilde{V}^i) - \delta_{ik}\widetilde{V}^i(D^\alpha \Phi^k_\alpha + \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{\Phi}^{k\,\dot\alpha}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4}\int d^2\theta \Big\{ f_{AB}(2im^A{}_i\Phi^i - W^A)(2im^B{}_j\Phi^j - W^B) \\ &\qquad + 2e_{Ai}\Phi^i \left(W^A - im^A{}_j\Phi^j \right) \Big\} + \text{h.c.} \ . \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Wir variieren (6.2.5) nach $\widetilde{V}^j$ und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_{\widetilde{V}^j} U(\widetilde{V}^i) - \delta_{kj}(D^\alpha \Phi^k_\alpha + \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{\Phi}^{k\,\dot\alpha}) = 0 \\ \partial_{\widetilde{V}^j} U(\widetilde{V}^i) = D^\alpha \Phi^j_\alpha + \bar{D}_{\dot\alpha}\bar{\Phi}^{j\,\dot\alpha} = 2L^j \ . \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Hieraus können wir $\widetilde{V}^j$ als Funktion von L^j und $\widetilde{V}^i$, $i \neq j$, gewinnen:

$$\widetilde{V}^j = h^j(\widetilde{V}^i, L^j) \ . \tag{6.2.7}$$

Setzen wir dies in die first-order Lagrangedichte (6.2.5) ein, so erhalten wir

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left\{ U(h^k) - 2h^i L^i \right\} + \mathcal{L}_m \tag{6.2.8}$$

mit (5.2.25) für $\mathcal{L}_m$. Der Integrand des kinetischen Terms ist gerade die Legendre-Transformierte von U. Wie möchten sie mit $K(L^i)$ bezeichnen:

$$-K(L^i) = U(h^i) - 2h^j L^j \ . \tag{6.2.9}$$

Setzen wir (6.2.9) in (6.2.8) ein, so erhalten wir gerade (6.2.1), die Lagrangedichte von n_L massiven linearen Multipletts.

Wir wollen nun (6.2.5) nach Φ^j variieren. Um die Berechnungen zu vereinfachen, führen wir zunächst einige Umformungen durch. Wir benutzen

$$-\int d^4\theta V^0(D\Phi + \bar{D}\bar{\Phi}) = \int d^2\theta \Phi W^0 + \text{h.c.} \tag{6.2.10}$$

und schreiben

$$-\delta_{ij}\int d^4\theta \widetilde{V}^i(D\Phi^j + \bar{D}\bar{\Phi}^j) = \delta_{ij}\int d^2\theta \Phi^j \widetilde{W}^i + \text{h.c.} \ . \tag{6.2.11}$$

Als nächstes formen wir den Massenterm um:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int d^2\theta\Big\{f_{AB}(2im^A{}_i\Phi^i - W^A)(2im^B{}_j\Phi^j - W^B) + 2e_{Ai}\Phi^i\left(W^A - im^A{}_j\Phi^j\right)\Big\} + \text{h.c.}\\
&= \frac{1}{4}\int d^2\theta\Big\{f_{AB}\left(W^AW^B - 2im^A{}_i\Phi^iW^B - 2im^B{}_jW^A\Phi^j - 4m^A{}_im^B{}_j\Phi^i\Phi^j\right)\\
&\qquad + 2e_{Ai}\Phi^iW^A - 2ie_{Ai}m^A{}_j\Phi^i\Phi^j\Big\} + \text{h.c.}\\
&= \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB}W^AW^B + \text{h.c.}\\
&\quad + \int d^2\theta\Big\{\left(\frac{e_{Ai}}{2} - if_{AB}m^B{}_i\right)\Phi^iW^A\\
&\qquad - \Big(\operatorname{Re} f_{AB}m^A{}_im^B{}_j + i(\operatorname{Im} f_{AB}m^A{}_im^B{}_j + \frac{1}{2}e_{Ai}m^A{}_j)\Big)\Phi^i\Phi^j\Big\} + \text{h.c.}\\
&= \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB}W^AW^B + \text{h.c.}\\
&\quad + \int d^2\theta\Big\{\left(\frac{e_{Ai}}{2} - if_{AB}m^B{}_i\right)\Phi^iW^A - \Big((M^2)_{ij} + i(M_T^2)_{ij}\Big)\Phi^i\Phi^j\Big\} + \text{h.c.}\ ,
\end{aligned}
\tag{6.2.12}
$$

wobei wir die Definitionen (5.3.24) der Massen eingesetzt haben. Um die Variation nun auszuführen, fassen wir alle Terme, die Φ^j enthalten, zusammen:

$$
\mathcal{L}^{\Phi}_{first} = \int d^2\theta\Big\{\Phi^i(\delta_{ij}\widetilde{W}^j + \frac{e_{Ai}}{2}W^A - if_{AB}m^B{}_iW^A) - \Big((M^2)_{ij} + i(M_T^2)_{ij}\Big)\Phi^i\Phi^j\Big\} \tag{6.2.13}
$$

Unter Benutzung von

$$
\frac{\delta\Phi^{i\,\alpha}(z')}{\delta\Phi^{j\,\beta}(z)} = -\frac{1}{4}\delta^i_j\delta^\alpha_\beta\bar{D}^2\delta^8(z-z') \tag{6.2.14}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}^{\Phi}_{first}}{\delta\Phi^{k\,\beta}} &= -\frac{1}{4}\int d^2\theta\Big\{\delta^i_k\delta^\alpha_\beta\bar{D}^2\delta^8(\delta_{ij}\widetilde{W}^j_\alpha + \frac{e_{Ai}}{2}W^A_\alpha - if_{AB}m^B{}_iW^A_\alpha)\\
&\qquad - \Big((M^2)_{ij} + i(M_T^2)_{ij}\Big)\varepsilon_{\alpha\gamma}\left(\delta^i_k\delta^\alpha_\beta\bar{D}^2\delta^8\Phi^{j\,\gamma} - \delta^j_k\delta^\gamma_\beta\bar{D}^2\delta^8\Phi^{i\,\alpha}\right)\Big\}\\
&= -\frac{1}{4}\int d^2\theta\Big\{(\widetilde{W}^k_\beta + \frac{e_{Ak}}{2}W^A_\beta - if_{AB}m^B{}_kW^A_\beta)\bar{D}^2\delta^8\\
&\qquad - 2\Big((M^2)_{kj} + i(M_T^2)_{kj}\Big)\Phi^{j\,\beta}\bar{D}^2\delta^8\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{6.2.15}
$$

Wegen $\bar{D}_{\dot\alpha}W_\beta = 0$ und $\bar{D}_{\dot\alpha}\Phi_\beta = 0$ können wir $\bar{D}^2$ auf den gesamten Ausdruck wirken lassen und mittels (A.3.4) zum Integral über den gesamten θ-$\bar\theta$-Raum übergehen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}^{\Phi}_{first}}{\delta\Phi^{k\,\beta}} &= -\frac{1}{4}\int d^2\theta\Big\{(\widetilde{W}^k_\beta + \frac{e_{Ak}}{2}W^A_\beta - if_{AB}m^B{}_kW^A_\beta) - 2\Big((M^2)_{kj} + i(M_T^2)_{kj}\Big)\Phi^{j\,\beta}\Big\}\delta^8\\
&\stackrel{!}{=} 0\ .
\end{aligned}
\tag{6.2.16}
$$

Hieraus gewinnen wir

$$
M_{kj}\Phi^j_\beta = \frac{1}{2}(\widetilde{W}^k_\beta + \frac{e_{Ak}}{2}W^A_\beta - if_{AB}m^B{}_kW^A_\beta) \tag{6.2.17}
$$

mit

$$M_{ij} := (M^2)_{ij} + i(M_T^2)_{ij} \ . \tag{6.2.18}$$

Um (6.2.17) nach Φ^i auflösen zu können, müssen wir fordern, dass

$$M_{ij} \quad \text{invertierbar} \tag{6.2.19}$$

ist. In diesem Fall lautet die Bewegungsgleichung für Φ^i

$$\Phi^i_\beta = \frac{1}{2} M^{-1}_{ik} (\widetilde{W}^k_\beta + \frac{e_{Ak}}{2} W^A_\beta - i f_{AB} m^B{}_k W^A_\beta) \ . \tag{6.2.20}$$

Dieses Ergebnis können wir in (6.2.5) einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \int d^4\theta U(\widetilde{V}^i) + \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB} W^A W^B + \text{h.c.} \\
& + \int d^2\theta \Big\{ \Phi^i \left(\delta_{ij} \widetilde{W}^j + \frac{e_{Ai}}{2} W^A - i f_{AB} m^B{}_i W^A \right) - M_{ij}\Phi^i\Phi^j \Big\} + \text{h.c.} \\
= & \int d^4\theta U(\widetilde{V}^i) + \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB} W^A W^B + \text{h.c.} \\
& + \int d^2\theta \Big\{ \frac{1}{2} M^{-1}_{ik} \left(\widetilde{W}^k + \frac{e_{Ck}}{2} W^C - i f_{CD} m^C{}_k W^D \right) \left(\widetilde{W}^i + \frac{e_{Ai}}{2} W^A - i f_{AB} m^B{}_i W^A \right) \\
& \qquad - \frac{1}{4} M_{ij} M^{-1}_{ik} M^{-1}_{jl} \left(\widetilde{W}^k + \frac{e_{Ck}}{2} W^C - i f_{CD} m^C{}_k W^D \right) \cdot \\
& \qquad\qquad \cdot \left(\widetilde{W}^l + \frac{e_{Al}}{2} W^A - i f_{AB} m^B{}_l W^A \right) \Big\} + \text{h.c.} \\
= & \int d^4\theta U(\widetilde{V}^i) + \frac{1}{4}\int d^2\theta f_{AB} W^A W^B + \text{h.c.} \\
& + \frac{1}{4}\int d^2\theta \Big\{ M^{-1}_{ik} \left(\widetilde{W}^k + \frac{e_{Ck}}{2} W^C - i f_{CD} m^C{}_k W^D \right) \left(\widetilde{W}^i + \frac{e_{Ai}}{2} W^A - i f_{AB} m^B{}_i W^A \right) \Big\} \\
& + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

Wir wollen zeigen, dass sich dieses Integral in der Standardform für n_L massive und n_V masselose Vektormultipletts schreiben lässt. Hierzu fassen wir zunächst die beiden $d^2\theta$ - Integrale zusammen und multiplizieren die Klammern im zweiten Integral aus

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \int d^4\theta U(\widetilde{V}^i) \\
& + \int d^2\theta f_{AB} W^A W^B + \text{h.c.} \\
& + \frac{1}{4}\int d^2\theta \Big\{ M^{-1}_{ik} \left(\widetilde{W}^k + \frac{e_{Ck}}{2} W^C - i f_{CD} m^C{}_k W^D \right) \left(\widetilde{W}^i + \frac{e_{Ai}}{2} W^A - i f_{AB} m^B{}_i W^A \right) \Big\} \\
= & \int d^4\theta U(\widetilde{V}^i) \\
& + \int d^2\theta \Big\{ \frac{1}{4} f_{AB} W^A W^B + \frac{1}{4} M^{-1}_{ik} \widetilde{W}^k \widetilde{W}^i \\
& \qquad + \frac{1}{4} M^{-1}_{ik} \left(\frac{e_{Ck}}{2} - i f_{CD} m^D{}_k \right) W^C \widetilde{W}^i + \frac{1}{4} M^{-1}_{ik} \left(\frac{e_{Ai}}{2} - i f_{AB} m^B{}_i \right) \widetilde{W}^k W^A \\
& \qquad + \frac{1}{4} M^{-1}_{ik} \left(\frac{e_{Ck}}{2} - i f_{CD} m^D{}_k \right) \left(\frac{e_{Ai}}{2} - i f_{AB} m^B{}_i \right) W^C W^A \Big\} + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

Als nächstes definieren wir

$$W^{\hat{A}} := \left(-\widetilde{W}^i, W^A\right), \qquad \hat{A} = (i, A) = (1, \ldots, n_L, n_L + 1, \ldots, n_L + n_V) \tag{6.2.23}$$

und führen die $(n_V + n_L) \times (n_V + n_L)$ - dimensionale Kopplungsmatrix $\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ ein

$$\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{ij} & \hat{f}_{iB} \\ \hat{f}_{Aj} & \hat{f}_{AB} \end{pmatrix} \tag{6.2.24}$$

$$\hat{f}_{ij} = (M)^{-1}_{ij} \tag{6.2.25}$$

$$\hat{f}_{iA} = (M)^{-1}_{ik} \left(-\frac{e_{Ak}}{2} + i f_{AD} m^D{}_k\right) \tag{6.2.26}$$

$$\hat{f}_{AB} = f_{AB} + (M)^{-1}_{ij} \left(-\frac{e_{Ai}}{2} + i f_{AD} m^D{}_i\right) \left(-\frac{e_{Bj}}{2} + i f_{BC} m^C{}_j\right) \ . \tag{6.2.27}$$

Damit erhalten wir für (6.2.21):

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta U(\widetilde{V}^i) + \frac{1}{4} \int d^2\theta \hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} W^{\hat{A}} W^{\hat{B}} + \text{h.c.} \ , \tag{6.2.28}$$

was der Lagrangedichte für n_L massive und n_V masselose Vektormultipletts entspricht.

Im Folgenden werden wir sehen, dass (6.2.28) nicht die zu (6.2.1) duale Theorie sein kann, da die Anzahl der Freiheitsgrade der beiden Theorien nicht übereinstimmt. Wir werden sehen, dass einige der Superfelder aus (6.2.23) nicht linear unabhängig sind und wir daher eine Nebenbedingung benötigen, die nur linear unabhängige Felder in der dualen Wirkung belässt. Bevor wir es tun, wollen wir die Komponentengestalt von (6.2.28) angeben.

6.2.2 Komponentengestalt der Lagrangedichte

Die Komponentengestalt von (6.2.28) lautet wie folgt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4}\text{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} F^{\hat{A}\,mn} F^{\hat{B}}_{mn} + \frac{1}{8}\text{Im}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} \varepsilon^{klmn} F^{\hat{A}}_{kl} F^{\hat{B}}_{mn} + \frac{1}{2}\text{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} D^{\hat{A}} D^{\hat{B}} \\
& + \frac{1}{2} U_i D^{0i} - \frac{1}{4} U_{ij} v^{0i\,m} v^{0j}_m - U_{ij} \partial^m (\text{Re}\,A_i) \partial_m (\text{Re}\,A_j) - U_{ij} F^i F^{*j} \\
& - \frac{i}{2} \left(\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}} \lambda^{\hat{A}} \sigma^k \partial_k \bar{\lambda}^{\hat{B}} + \hat{f}^*_{\hat{A}\hat{B}} \bar{\lambda}^{\hat{A}} \bar{\sigma}^k \partial_k \lambda^{\hat{B}} \right) \\
& + \frac{1}{2} U_{ij} \left\{ i\sqrt{2} (\psi_j \lambda^{0i} - \bar{\psi}_j \bar{\lambda}^{0i}) - i (\psi_j \sigma^m \partial_m \bar{\psi}_i + \bar{\psi}_j \bar{\sigma}^m \partial_m \psi_i) \right\} \\
& + \frac{1}{2} U_{ijk} \left\{ -\psi_i \sigma^m \bar{\psi}_j v^{0k}_m - (\psi_i \psi_j) F^*_k - (\bar{\psi}_i \bar{\psi}_j) F_k \right\} \\
& + \frac{1}{4} U_{ijkl} \psi_i \psi_j \bar{\psi}_k \bar{\psi}_l + \ldots
\end{aligned} \tag{6.2.29}$$

wobei zu $\partial_i \hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ proportionale Terme weggelassen worden sind. Die Gleichung (6.2.29) stellt die Komponentengestalt der Lagrangedichte off-shell dar. Bei der Behandlung des skalaren Potentials werden wir sehen, dass sich die Hilfsfelder aus (6.2.29) nicht ohne weiteres eliminieren lassen. Der Grund hierfür ist die bereits oben erwähnte lineare Abhängigkeit einiger $W^{\hat{A}}$.

6.2.3 Kopplungsmatrix und Freiheitsgrade

Wir wollen nun die on-shell Freiheitsgrade von (6.2.1) und (6.2.28) zählen. Wir beschränken uns dabei auf die bosonischen Freiheitsgrade:

<u>Vor der Dualisierung</u>

n_L massive lineare Multipletts	$4n_L$ FG
$n_V - n_L$ masselose Vektormultipletts	$2(n_V - n_L)$ FG
	$2(n_V + n_L)$ FG

<u>Nach der Dualisierung</u>

$n_V + n_L$ Vektormultipletts, davon	
n_V masselos	$2n_V$ FG
n_L massiv	$4n_L$ FG
	$(2n_V + 4n_L)$ FG

In (6.2.28) haben wir also $2n_L$ bosonische FG zuviel. Wir interpretieren es so, dass n_L Vektorfelder unphysikalisch sind. Es müssen n_L Linearkombinationen der Felder verschwinden. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass $\mathrm{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ vom Rang n_V sein, also einen n_L-fach entarteten Eigenwert Null haben muss. Wir zeigen, dass dies so ist, und die entsprechenden n_L Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {m^B}_k \end{pmatrix}_{k=1,\dots,n_L} \tag{6.2.30}$$

sind. Es ist

$$\begin{aligned} \hat{f}_{iB}{m^B}_k &= M^{-1}_{il}\left(-\frac{e_{Bl}}{2} + i f_{BD}{m^D}_l\right){m^B}_k \\ &= M^{-1}_{il}\left(i\mathrm{Re}\, f_{BD}{m^D}_l - \mathrm{Im}\, f_{BD}{m^D}_l - \frac{e_{Bl}}{2}\right){m^B}_k \\ &= iM^{-1}_{il}\left((M^2)_{lk} + i(M_T^2)_{lk}\right){m^B}_k \\ &= iM^{-1}_{il}M_{ll} = i\delta_{ik} \end{aligned} \tag{6.2.31}$$

sowie

$$\begin{aligned} \hat{f}_{AB}{m^B}_k &= \left(f_{AB} + M^{-1}_{ij}\left(-\frac{e_{Ai}}{2} + i f_{AD}{m^D}_i\right)\left(-\frac{e_{Bj}}{2} + i f_{BC}{m^C}_j\right)\right){m^B}_k \\ &= f_{AB}{m^B}_k + M^{-1}_{ij}\left(-\frac{e_{Ai}}{2} + i f_{AD}{m^D}_i\right)\left(i(M^2)_{jk} - (M_T^2)_{jk}\right){m^B}_k \\ &= f_{AB}{m^B}_k + iM^{-1}_{ij}M_{jk}\left(-\frac{e_{Ai}}{2} + i f_{AD}{m^D}_i\right) \\ &= f_{AB}{m^B}_k + \delta_{ik}\left(-f_{AD}{m^D}_i - i\frac{e_{Ai}}{2}\right) \\ &= -i\frac{e_{Ak}}{2}\ . \end{aligned} \tag{6.2.32}$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{ij} & \hat{f}_{iB} \\ \hat{f}_{Aj} & \hat{f}_{AB} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ {m^B}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta_{ik} \\ -\frac{i}{2}e_{Ak} \end{pmatrix}\ . \tag{6.2.33}$$

Spalten wir $\hat{f}_{AB}$ in seinen Real- und Imaginärteil auf, so bedeutet (6.2.33), dass die durch (6.2.30) gegebenen Vektoren die gesuchten n_L Eigenvektoren von $\mathrm{Re}\,\hat{f}_{AB}$ zum Eigenwert Null

sind.
Es gibt also n_L Kombinationen der $F^{\hat{A}}$, für die der kinetische Term verschwindet und der topologische gleich einer totalen Ableitung ist. Die Anzahl der *physikalischen* Freiheitsgrade ist damit vor und nach der Dualisierung gleich.

6.2.4 Transformation der Eichbedingung

Um zu (6.2.21) bzw. (6.2.28) zu gelangen, haben wir die Bewegungsgleichung (6.2.20) in die first-order Lagrangedichte (6.2.5) eingesetzt. Schauen wir uns (6.2.20) genauer an, so erkennen wir, dass das Feld Φ^i hier nicht in der WZ-Eichung steht, während es in die massive Theorie vor der Dualisierung (6.2.1) in eich-fixierter Form einging. Um die gleiche Anzahl von Freiheitsgraden zu gewährleisten, müssen wir eine Bedingung finden, die die WZ-Eichung von Φ^i nach der Dualisierung garantiert. Hierzu wollen wir (6.2.20) etwas umschreiben:

$$\Phi^i_\beta = \frac{1}{2}M^{-1}_{ik}(\widetilde{W}^k_\beta + \frac{e_{Ak}}{2}W^A_\beta - if_{AB}m^B{}_k W^A_\beta) \tag{6.2.34}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^i_\beta &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ik} + i\mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ik}\right)\left(\widetilde{W}^k + \frac{e_{Ak}}{2}W^A + \mathrm{Im}\,f_{AB}m^B{}_k W^A - i\mathrm{Re}\,f_{AB}m^B{}_k W^A\right)\\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ik}\Big\{-\widetilde{W}^k - \left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{AB}m^B{}_k\right)W^A\\
&\qquad + [\mathrm{Re}\,(M^{-1})]^{-1}_{kl}\mathrm{Im}\,(M^{-1})_{lj}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^B{}_j W^A\Big\}\\
&\quad +\frac{i}{2}\mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ik}\Big\{\widetilde{W}^k + \left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{AB}m^B{}_k\right)W^A\\
&\qquad - [\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{lj}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^B{}_j W^A\Big\}\ .
\end{aligned} \tag{6.2.35}$$

Mit (6.2.35) haben wir eine Aufspaltung der Vorfaktoren aus (6.2.34) in ihren Real- und Imaginärteil vorgenommen. Die erste Summe stellt den Realteil und die zweite den Imaginärteil dar. Die Eichtransformationen von Φ^i und W^A lauten:

$$\Phi^i_\beta \longrightarrow \Phi^i_\beta + \frac{i}{8}\bar{D}^2 D_\beta \Lambda^i \tag{6.2.36}$$

$$W^A_\beta \longrightarrow W^A_\beta - \frac{1}{4}m^A{}_j \bar{D}^2 D_\beta \Lambda^j\ . \tag{6.2.37}$$

Es ist leicht, sich zu überzeugen, dass das Einsetzen von (6.2.37) auf der rechten Seite von (6.2.35) tatsächlich auf (6.2.36) führt. Ferner sehen wir, dass der Eichterm in (6.2.36) einen rein imaginären Vorfaktor hat. Schließlich können wir (6.2.36) schreiben als

$$\Phi^i_\beta \longrightarrow \Phi^i_\beta + \frac{i}{8}\mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ik}[\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{kj}\bar{D}^2 D_\beta \Lambda^j \tag{6.2.38}$$

und die Eichparameter Λ^j so wählen, dass der Imaginärteil aus (6.2.35) für jedes i verschwindet. Das bedeutet:

$$\widetilde{W}^k + \left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{AB}m^B{}_k\right)W^A - [\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{lj}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^B{}_j W^A = 0 \tag{6.2.39}$$

bzw. für die Komponentenfelder D^k

$$D^k = -\left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{AB}m^B{}_k\right)D^A + [\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{lj}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^B{}_j D^A\ . \tag{6.2.40}$$

6.2.5 Skalares Potential

Der bosonische Teil der Lagrangedichte (6.2.29) lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bosonisch} &= -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}F^{\hat{A}\,mn}F^{\hat{B}}_{mn} + \frac{1}{8}\mathrm{Im}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}\varepsilon^{klmn}F^{\hat{A}}_{kl}F^{\hat{B}}_{mn} \\ &\quad -\frac{1}{4}U_{ij}v^{0i\,m}v^{0j}_{m} - U_{ij}\partial^m(\mathrm{Re}\,A_i)\partial_m(\mathrm{Re}\,A_j) - U_{ij}F^iF^{*j} - V\ , \end{aligned} \tag{6.2.41}$$

mit dem skalaren Potential

$$V = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}D^{\hat{A}}D^{\hat{B}} - \frac{1}{2}U_iD^{0i}\ . \tag{6.2.42}$$

Wir möchten die Kopplungsmatrix in (6.2.42) unter Benutzung von (6.2.24) - (6.2.27), sowie (6.2.23) für die Komponentenfelder D^A

$$D^{\hat{A}} := \left(-D^i, D^A\right), \qquad \hat{A} = (i, A) = (1,\ldots,n_L, n_L+1,\ldots,n_L+n_V) \tag{6.2.43}$$

explizit ausschreiben.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}D^{\hat{A}}D^{\hat{B}} &= \mathrm{Re}\,M^{-1}_{ij}D^iD^j - 2\mathrm{Re}\left\{M^{-1}_{ik}\left(-\frac{e_{Bk}}{2} + if_{BD}m^D{}_k\right)\right\}D^iD^B \\ &\quad +\mathrm{Re}\left\{M^{-1}_{ij}\left(-\frac{e_{Ai}}{2} + if_{AC}m^C{}_i\right)\left(-\frac{e_{Bj}}{2} + if_{BD}m^D{}_j\right)\right\}D^AD^B \\ &\quad +\mathrm{Re}\,f_{AB}D^AD^B\ . \end{aligned} \tag{6.2.44}$$

Wir benutzen

$$\mathrm{Re}\,\left\{M^{-1}_{ik}A_{kB}\right\} = \mathrm{Re}\,M^{-1}_{ik}\mathrm{Re}\,A_{kB} - \mathrm{Im}\,M^{-1}_{ik}\mathrm{Im}\,A_{kB} \tag{6.2.45}$$

$$\mathrm{Im}\,\left\{M^{-1}_{ik}A_{kB}\right\} = \mathrm{Re}\,M^{-1}_{ik}\mathrm{Im}\,A_{kB} + \mathrm{Im}\,M^{-1}_{ik}\mathrm{Re}\,A_{kB} \tag{6.2.46}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\left\{A_{Ci}M^{-1}_{ij}B_{jD}\right\} &= \mathrm{Re}\,\left\{A_{Ci}M^{-1}_{ij}\right\}\mathrm{Re}\,B_{jD} - \mathrm{Im}\,\left\{A_{Ci}M^{-1}_{ij}\right\}\mathrm{Im}\,B_{jD} \\ &= \mathrm{Re}\,A_{Ci}\mathrm{Re}\,M^{-1}_{ij}\mathrm{Re}\,B_{jD} - \mathrm{Im}\,A_{Ci}\mathrm{Im}\,M^{-1}_{ij}\mathrm{Re}\,B_{jD} \\ &\quad -\mathrm{Re}\,A_{Ci}\mathrm{Im}\,M^{-1}_{ij}\mathrm{Im}\,B_{jD} - \mathrm{Im}\,A_{Ci}\mathrm{Re}\,M^{-1}_{ij}\mathrm{Im}\,B_{jD} \end{aligned} \tag{6.2.47}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}D^{\hat{A}}D^{\hat{B}} = {}& \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}D^iD^j + \mathrm{Re}\,f_{AB}D^AD^B \\ & +2\Big(\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}\Big(\mathrm{Im}\,f_{BD}m^D{}_j + \frac{e_{Bj}}{2}\Big) + \mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ij}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_j\Big)D^iD^B \\ & +\Bigg(\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}\Big(- \mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_im^D{}_j + \mathrm{Im}\,f_{AC}\mathrm{Im}\,f_{BD}m^C{}_im^D{}_j \\ & \qquad + \mathrm{Im}\,f_{AC}m^C{}_i\frac{e_{Bj}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{BD}m^D{}_j\frac{e_{Ai}}{2} + \frac{e_{Ai}e_{Bj}}{4}\Big) \\ & \quad + \mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ij}\Big(\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Im}\,f_{BD}m^C{}_im^D{}_j + \mathrm{Re}\,f_{BD}\mathrm{Im}\,f_{AC}m^C{}_im^D{}_j \\ & \qquad + \mathrm{Re}\,f_{AC}m^C{}_i\frac{e_{Bj}}{2} + \mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_j\frac{e_{Ai}}{2}\Big)\Bigg)D^AD^B\ . \end{aligned} \tag{6.2.48}$$

Nach einer Umordnung der Terme lautet damit das skalare Potential:

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}D^{\hat{A}}D^{\hat{B}} - \frac{1}{2}U_i D^i \\
&= -\frac{1}{2}U_i D^i - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,f_{AB}D^A D^B \\
&\quad -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}\Big\{ \Big(D^i + \Big(\mathrm{Im}\,f_{AC}m^C{}_i + \frac{e_{Ai}}{2}\Big)D^A\Big)\Big(D^j + \Big(\mathrm{Im}\,f_{BD}m^D{}_j + \frac{e_{Bj}}{2}\Big)D^B\Big) \\
&\qquad\qquad - \mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_i m^D{}_j\Big\} \\
&\quad +\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ij}\Big\{2\mathrm{Re}\,f_{AC}m^C{}_i\Big(-D^j - \Big(\mathrm{Im}\,f_{BD}m^D{}_j + \frac{e_{Bj}}{2}\Big)D^B\Big)D^A\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{6.2.49}
$$

Hieraus lassen sich die Hilfsfelder zunächst nicht eliminieren. Wir wollen als nächstes die transformierte Eichbedingung (6.2.40) in (6.2.49) einsetzen. Damit erhält das skalare Potential die Gestalt

$$
\begin{aligned}
V =& -\frac{1}{2}U_k\Big\{-\Big(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{AB}m^B{}_k\Big) + [\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{lj}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^B{}_j\Big\}D^A \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}\Big\{[\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{jk}[\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{ir}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{rs}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_l m^D{}_s \\
&\qquad\qquad - \mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_i m^D{}_j\Big\}D^A D^B \\
& +\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ij}\Big\{-2[\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{jk}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{kl}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_i m^D{}_l\Big\}D^A D^B \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,f_{AB}D^A D^B \\
=& -\frac{1}{2}U_k\Big\{-\Big(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{AB}m^B{}_k\Big) + [\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{lj}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^B{}_j\Big\}D^A \\
& -\frac{1}{2}\Big\{\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}[\mathrm{Im}\,(M)^{-1}]^{-1}_{jk}[\mathrm{Im}\,(M)^{-1}]^{-1}_{ir}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{rs}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_l m^D{}_s \\
&\qquad + \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_i m^D{}_j + \mathrm{Re}\,f_{AB}\Big\}D^A D^B\ .
\end{aligned}
\tag{6.2.50}
$$

Dies führt uns auf die folgende Bewegungsgleichung für D:

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}[\mathrm{Im}\,(M)^{-1}]^{-1}_{jk}[\mathrm{Im}\,(M)^{-1}]^{-1}_{ir}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{rs}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_l m^D{}_s \\
&\qquad\qquad + \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_i m^D{}_j + \mathrm{Re}\,f_{AB}\Big\}D^B \\
&\quad = -\frac{1}{2}U_k\Big\{-\Big(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\,f_{AC}m^C{}_k\Big) + [\mathrm{Im}\,(M^{-1})]^{-1}_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{lj}\mathrm{Re}\,f_{AC}m^C{}_j\Big\}\ .
\end{aligned}
\tag{6.2.51}
$$

Um (6.2.51) nach D^B umformen zu können, müssen wir das Inverse der in geschweiften Klammern der ersten beiden Zeilen von (6.2.51) stehenden Matrix finden. In Anhang C demonstrieren wir, dass dieses Inverse durch

$$
\mathrm{Re}\,f^{-1EA} - \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{tu}m^E{}_t m^A{}_u
\tag{6.2.52}
$$

gegeben ist. Wir multiplizieren (6.2.51) mit (6.2.52) und erhalten

$$
\begin{aligned}
D^E &= \left(\mathrm{Re}\, f^{-1EA} - \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{tu} m^E{}_t m^A{}_u\right) \\
&\quad \times \left(-\frac{1}{2}U_k \left\{-\left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\, f_{AC} m^C{}_k\right) I^{-1}_{kl} R_{lj} \mathrm{Re}\, f_{AC} m^C{}_j\right\}\right) \\
&= -\frac{1}{2}U_k \Big\{ -\mathrm{Re}\, f^{-1EA}\left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\, f_{AC} m^C{}_k\right) + I^{-1}_{kl} R_{lj} m^E{}_j \\
&\qquad + R_{tk}\left(\frac{e_{Ak}}{2} m^A{}_u + \mathrm{Im}\, f_{AC} m^C{}_k m^A{}_u\right) m^E{}_t - I^{-1}_{kl} R_{lj} R_{tk} \mathrm{Re}\, f_{AC} m^C{}_j m^A{}_u m^E{}_t \Big\} \\
&= \frac{1}{2}U_k \mathrm{Re}\, f^{-1EA}\left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\, f_{AC} m^C{}_k\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}U_k \Big\{ I^{-1}_{kl} R_{lj} m^E{}_j + R_{tu}(M_T^2)_{ku} m^E{}_t - I^{-1}_{kl} R_{lj} R_{tk} (M^2)_{jk} m^E{}_t \Big\}\ . \qquad (6.2.53)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir die Definitionen der Massen (5.3.24) benutzt und, der besseren Übersicht wegen, von den Abkürzungen (C.2.3) sowie (C.2.4) für den Real- bzw. Imaginärteil von $(M^{-1})_{ij}$ Gebrauch gemacht. Ferner verschwindet aufgrund von (C.2.6) die zweite Klammer und wir erhalten als Bewegungsgleichung für D:

$$
D^E = \frac{1}{2}U_k \mathrm{Re}\, f^{-1EA}\left(\frac{e_{Ak}}{2} + \mathrm{Im}\, f_{AC} m^C{}_k\right) \qquad (6.2.54)
$$

Dies wollen wir in das skalare Potential (6.2.50) einsetzen. Das Ergebnis lautet:

$$
V = \frac{1}{32}\left\{\left(e_{Ai} + 2\mathrm{Im}\, f_{AC} m^C{}_i\right) \mathrm{Re}\, f^{-1AB}\left(e_{Bj} + 2\mathrm{Im}\, f_{BD} m^D{}_j\right) + 4\mathrm{Re}\, f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j\right\} U_i U_j \qquad (6.2.55)
$$

Wir sehen, dass die skalaren Potentiale vor der Dualisierung (5.3.22) und nach der Dualisierung (6.2.55) übereinstimmen, wenn

$$
C^i = \frac{1}{2}U^i\ . \qquad (6.2.56)
$$

Als nächstes wollen wir die kinetischen Terme vor und nach der Dualisierung vergleichen. Sie lauten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_C &= -\frac{1}{4}K_{ij}(\partial^m C^i)(\partial_m C^j) \qquad (6.2.57) \\
\mathcal{L}_{2\mathrm{Re}\, A} &= -U_{ij}(\partial^m \mathrm{Re}\, A_i)(\partial_m \mathrm{Re}\, A_j)\ . \qquad (6.2.58)
\end{aligned}
$$

Um die Gleichheit beider Ausdrücke zu zeigen, gehen wir analog vor wie im masselosen Fall. Wir bemerken zunächst, dass K und U miteinander über die Legendre-Transformation (6.2.9) zusammenhängen. Bezeichnet $2\mathrm{Re}\, A_i$ die niedrigste Komponente von U, so können wir auf der Ebene der Komponentenfelder schreiben:

$$
K_j = 4\mathrm{Re}\, A_j\ . \qquad (6.2.59)
$$

Nun setzen wir (6.2.56) in (6.2.57) ein:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_C &= -\frac{1}{4}K_{ij}(\partial^m C^i)(\partial_m C^j) = -\frac{1}{16}K_{ij}(\frac{1}{2}U^l)(\partial^m U^i)(\partial_m U^j) \\
&= -\frac{1}{4}K_{ij}(\frac{1}{2}U^l)U_{ir}U_{js}(\partial^m \mathrm{Re}\, A_r)(\partial_m \mathrm{Re}\, A_s) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial K_{ij}}{\partial 2\mathrm{Re}\, A_r}(\frac{1}{2}U^l)U_{js}(\partial^m \mathrm{Re}\, A_r)(\partial_m \mathrm{Re}\, A_s) \\
&= -U_{rs}(\partial^m \mathrm{Re}\, A_r)(\partial_m \mathrm{Re}\, A_s)\ . \qquad (6.2.60)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Gleichheit der kinetischen Terme in beiden Theorien gezeigt.
Als letztes geben wir die Komponentengestalt der Lagrangedichte nach Elimination der Hilfsfelder an:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}F^{\hat{A}\,mn}F^{\hat{B}}_{mn}+\frac{1}{8}\mathrm{Im}\,\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}\varepsilon^{klmn}F^{\hat{A}}_{kl}F^{\hat{B}}_{mn}-\frac{1}{4}U_{ij}v^{0i\,m}v^{0j}_{m} \\
& -U_{ij}\partial^m(\mathrm{Re}\,A_i)\partial_m(\mathrm{Re}\,A_j)-\frac{i}{2}\left(\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}\lambda^{\hat{A}}\sigma^k\partial_k\bar{\lambda}^{\hat{B}}+\hat{f}^*_{\hat{A}\hat{B}}\bar{\lambda}^{\hat{A}}\bar{\sigma}^k\partial_k\lambda^{\hat{B}}\right) \\
& +\frac{1}{2}U_{ij}\left\{i\sqrt{2}(\psi_j\lambda^{0i}-\bar{\psi}_j\bar{\lambda}^{0i})-i(\psi_j\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i+\bar{\psi}_j\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_i)\right\} \\
& -\frac{1}{2}U_{ijk}\psi_i\sigma^m\bar{\psi}_j v^{0k}_m+\frac{1}{4}\left(U_{ijkl}-U_{ijr}U^{-1}_{rs}U_{kls}\right)\psi_i\psi_j\bar{\psi}_k\bar{\psi}_l-V+\ldots
\end{aligned}
\tag{6.2.61}
$$

Zu $\partial_i\hat{f}_{\hat{A}\hat{B}}$ proportionale Terme wurden wiederum weggelassen.

6.3 Nichtabelscher Fall

Eine nichtabelsche first-order Lagrangedichte für antisymmetrische Tensoren mit Selbstwechselwirkung, die an weitere Formen koppeln, wurde in [12] aus der Formulierung massiver Freedman-Townsend-Modelle im $N=1$ Superraum gewonnen. Wir zeigen, dass das dortige Ergebnis im abelschen Grenzfall der first-order Lagrangedichte (6.2.5) entspricht. Supersymmetrische nichtabelsche Eichtheorie wird u.a. in [2, 16] behandelt. In Anhang D geben wir einen Überblick hierüber.

Wir betrachten die first-order Lagrangedichte

$$
\mathcal{L}_1=\int d^4xd^2\theta\{k_{ab}(Y^a-m^{aI}\Phi_I)(Y^b-m^{bJ}\Phi_J)+W^I\Phi_I+d^2\bar{\theta}f(V)\}+\text{c.c.} \tag{6.3.1}
$$

Dabei sind die Φ_I chirale Spinorsuperfelder, wobei $I=1,\ldots,n_L$. Y^a und W^I sind Feldstärken für die Vektorsuperfelder A^a bzw. V^I und sind wie folgt definiert

$$
Y^a_\alpha \;=\; -\frac{i}{4}\bar{D}^2[e^{-2iV\cdot T}D_\alpha(e^{iV\cdot T}A)]^a \tag{6.3.2}
$$

$$
W^I_\alpha T_I \;=\; -\frac{i}{4}\bar{D}^2(e^{-2iV\cdot T}D_\alpha e^{2iV\cdot T})\ . \tag{6.3.3}
$$

Die reellen Matrizen T_I bilden eine Darstellung einer (beliebigen) Lie-Algebra G mit Strukturkonstanten ${f_{IJ}}^K$, d.h.

$$
[T_I,T_J]={f_{IJ}}^K T_K\ ,\qquad {f_{[IJ}}^L{f_{K]L}}^M\ . \tag{6.3.4}
$$

Das Produkt $V\cdot T$ ist als V^IT_I zu verstehen, so dass die Exponentialfuktionen in (6.3.2) und (6.3.3) als Matrizen mit der Indexstruktur von T_I aufzufassen sind. Eine (adjungierte) Darstellung von G ist mit

$$
{T_I}^a{}_b=m^{aJ}{f_{JI}}^K n_{Kb} \tag{6.3.5}
$$

gewonnen. Dabei sind die m^{aI} konstante Massenparameter und $n_{Ia}=n_{Ia}(m)$ mit

$$
n_{Ia}m^{aJ}=\delta^I_J\ . \tag{6.3.6}
$$

Wir zeigen zunächst, dass sich (6.3.3) im abelschen Fall darstellungsunabhängig zur Feldstärke

$$
W^I_\alpha=\frac{1}{2}\bar{D}^2D_\alpha V^I \tag{6.3.7}
$$

reduziert. Wir setzen $g = 2i$ sowie $v = V \cdot T = V^I T_I$ und betrachten die Exponentialterme

$$\begin{aligned} e^{-gv} D_\alpha e^{gv} &= \left(1 - gv + \frac{1}{2}g^2v^2 - \frac{1}{3!}g^3v^3 + \ldots\right)\left(gD_\alpha v + \frac{1}{2}g^2 D_\alpha v^2 + \frac{1}{3!}g^3 D_\alpha v^3 + \ldots\right) \\ &= gD_\alpha v + \frac{1}{2}g^2 D_\alpha v^2 - g^2 v D_\alpha v + \frac{1}{3!}g^3 D_\alpha v^3 - \frac{1}{2}g^3 v D_\alpha v^2 + \frac{1}{2}g^3 v^2 D_\alpha v + \ldots \\ &= gD_\alpha v - \frac{1}{2}g^2[v, D_\alpha v] + \frac{1}{3!}g^3[v,[v,D_\alpha v]] + \ldots \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

wobei wir $D_\alpha v^2 = (D_\alpha v)v + v(D_\alpha v)$ im letzten Schritt benutzt haben. Wir setzen nun die zuvor definierten Abkürzungen ein und benutzen (6.3.4)

$$\begin{aligned} e^{-gv} D_\alpha e^{gv} &= 2iD_\alpha V^I T_I + 2[V^I T_I, D_\alpha V^J T_J] - \frac{4i}{3}[V^I T_I, [V^J T_J, D_\alpha V^K T_K]] + \ldots \\ &= 2iD_\alpha V^I T_I + 2V^I D_\alpha V^J [T_I, T_J] - \frac{4i}{3} V^I V^J D_\alpha V^K [T_I, [T_J, T_K]] + \ldots \\ &= \left\{2iD_\alpha V^K + 2V^I D_\alpha V^J f_{IJ}{}^K + O(f_{IJ}{}^K)^2\right\} T_K \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Dies geht für $f_{IJ}{}^K \longrightarrow 0$ gegen

$$2iD_\alpha V^I T_I$$

womit (6.3.7) bewiesen wäre.

Wir wenden uns nun (6.3.2) zu. Im abelschen Fall müssen V und A entkoppeln. Dies bedeutet, dass wir die Matrizen T^I Null zu setzen haben. Anders ausgedrückt entspricht dies der Wahl der adjungierten Darstellung (6.3.5). Im abelschen Fall wird (6.3.5) zur trivialen Darstellung und (6.3.2) trivialerweise zu

$$Y_\alpha^a = -\frac{i}{4}\bar{D}^2 D_\alpha A^a \ . \tag{6.3.10}$$

Als letztes bemerken wir, dass sich der zweite Term aus (6.3.1) umschreiben lässt, und zwar ist

$$\int d^2\theta W^I \Phi_I + \text{c. c.} = -\int d^4\theta V^I (D\Phi_I + \bar{D}\bar{\Phi}_I) \ . \tag{6.3.11}$$

Identifizieren wir $Y^a = \frac{1}{2i}W^a$ und $k_{ab} = -f_{ab}$, so können wir mit (6.3.7) und (6.3.10) aus der Lagrangedichte (6.3.1), bis auf den letzten Term von (6.2.5),

$$\frac{1}{2}\int d^2\theta e_{Ai}\Phi^i(W^A - im^A{}_j\Phi^j) \ ,$$

die first-order Lagrangedichte (6.2.5) reproduzieren. Ein solcher Term kann nur im abelschen Fall hinzuaddiert werden [12]. Im nichtabelschen Fall würde die Hinzunahme eines entsprechenden Termes die Eichinvarianz zerstören.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Wir haben uns in dieser Arbeit mit linearen Multipletts der $N = 1$ Supersymmetrie, insbesondere mit der Konstruktion einer Lorentz- und eichinvarianten Lagrangedichte, der Möglichkeit, Supersymmetrie und WZ-Eichung für das in dieser Lagrangedichte auftretende Spinormultiplett miteinander zu vereinbaren, sowie mit der Untersuchung von Dualitäten, beschäftigt.

Mit Hilfe des Stückelberg-Mechanismus konnten wir eine Lorentz- und eichinvariante Lagrangedichte für mehrere massive lineare Multipletts, die an eine beliebige Anzahl von Vektor- und chiralen Multipletts koppeln, aufstellen. Das Ergebnis stellt eine Verallgemeinerung der massiven Lagrangedichte aus [9] dar, welche sich auch aus der Kaluza-Klein-Kompaktifizierung von Type IIB String-Theorien auf Calabi-Yau-Orientifolds ergibt [8]. Es bleibt zu erwarten, dass sich auch die hier konstruierte Lagrangedichte auf ähnliche Weise aus der String-Theorie erhalten lässt. Wir haben die Komponentenform des kinetischen Terms der masselosen Theorie und die der massiven Lagrangedichte bestimmen können. Wir haben die Eigenschaften von skalarem Potential und Massenmatrizen untersucht.

Für das chirale Spinormultiplett haben wir uns mit dem Verhältnis von SUSY-Transformationen und WZ-Eichung auseinandergesetzt und eine Modifikation der SUSY-Transformationen gegeben, die das transformierte Feld in der WZ-Eichung erhält. Ferner haben wir erkannt, dass in der besprochenen Theorie Supersymmetrie über das Hilfsfeld D oder über das Skalarfeld C, das kein Hilfsfeld ist, gebrochen werden kann.

Wir haben die Dualitäten von antisymmetrischen Tensoren in Theorien mit mehreren linearen Multipletts untersucht. Wir haben first-order Lagrangedichten, aus denen sich die zuvor diskutierte masselose bzw. massive Theorie mehrerer linearer Multipletts ergibt, aufgestellt. Im ersten Fall sind die n_L masselosen linearen Multipletts dual zu n_L masselosen chiralen Multipletts. Im zweiten Fall konnten wir die Dualität von n_L massiven linearen Multipletts, die an n_V Vektor- und n_C chirale Multipletts koppeln, zu n_L massiven und $n_V - n_L$ masselosen Vektormultipletts sowie n_C chiralen Multipletts nachweisen.

Anhang A

Identitäten

A.1 Konventionen und Spinoralgebra

In dieser Arbeit halten wir uns an die Notation von [2]. Weitere nützliche Identitäten sind in [29] zu finden.

- Minkowskimetrik:

$$\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{A.1.1}$$

- ε-Symbole:

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1, \quad \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = \varepsilon_{\dot{2}\dot{1}} = 1 \tag{A.1.2}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha} = \delta^{\beta}_{\gamma}, \quad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} \tag{A.1.3}$$

$$\varepsilon_{0123} = -1 \tag{A.1.4}$$

- σ-Matrizen:

$$\sigma^m = (-\mathbb{1}, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^m = (-\mathbb{1}, -\sigma^i) \tag{A.1.5}$$

- γ-Matrizen:

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{A.1.6}$$

Die Spinoren sind zweikomponentige Weyl-Spinoren. Sie tragen gepunktete und ungepunktete Indizes vom Anfang des griechischen Alphabets.

- Hoch- und Hinunterschieben der Indizes:

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \Rightarrow \psi^1 = \psi_2,\ \psi^2 = -\psi_1 \tag{A.1.7}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}}, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi^{\dot{\beta}} \Rightarrow \bar{\psi}^{\dot{1}} = \bar{\psi}_{\dot{2}},\ \bar{\psi}^{\dot{2}} = -\bar{\psi}_{\dot{1}} \tag{A.1.8}$$

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^m_{\beta\dot{\beta}} \tag{A.1.9}$$

$$\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\beta} \tag{A.1.10}$$

- Spinorprodukte:

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi \tag{A.1.11}$$
$$\bar\psi\bar\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = -\bar\psi^{\dot\alpha}\bar\chi_{\dot\alpha} = \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\psi \tag{A.1.12}$$
$$\chi\sigma^n\bar\psi = -\bar\psi\bar\sigma^n\chi \tag{A.1.13}$$
$$\chi\sigma^m\bar\sigma^n\psi = -\psi\sigma^n\bar\sigma^m\chi \tag{A.1.14}$$
$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = \bar\psi\bar\chi = \bar\chi\bar\psi \tag{A.1.15}$$
$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta, \qquad \theta_\alpha\theta_\beta = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \tag{A.1.16}$$
$$\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta, \qquad \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta \tag{A.1.17}$$
$$\theta_\alpha\theta^\beta = -\tfrac{1}{2}\theta\theta\delta_\alpha^\beta, \qquad \theta^\alpha\theta_\beta = \tfrac{1}{2}\theta\theta\delta_\beta^\alpha \tag{A.1.18}$$
$$\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\bar\theta\bar\theta\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}, \qquad \bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} = -\tfrac{1}{2}\bar\theta\bar\theta\delta_{\dot\beta}^{\dot\alpha} \tag{A.1.19}$$

- Rechenregeln für σ-Matrizen:

$$(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta = \tfrac{1}{4}(\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{n\dot\alpha\beta} - \sigma^n_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{m\dot\alpha\beta}) \tag{A.1.20}$$
$$(\sigma^{0i})_\alpha{}^\beta = \tfrac{1}{2}(\sigma^i)_\alpha{}^\beta, \quad (\sigma^{ij})_\alpha{}^\beta = -\tfrac{1}{2}i\varepsilon^{ijk}(\sigma^k)_\alpha{}^\beta \tag{A.1.21}$$
$$(\bar\sigma^{mn})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \tfrac{1}{4}(\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\sigma^n_{\alpha\dot\beta} - \bar\sigma^{n\dot\alpha\alpha}\sigma^m_{\alpha\dot\beta}) \tag{A.1.22}$$
$$(\bar\sigma^{0i})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}(\bar\sigma^i)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}, \quad (\bar\sigma^{ij})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}i\varepsilon^{ijk}(\bar\sigma^k)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{A.1.23}$$
$$\bar\sigma^{m\dot\alpha\alpha}\sigma^n_{\alpha\dot\beta} = -\eta^{mn}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} + 2(\bar\sigma^{mn})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{A.1.24}$$
$$\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma^{n\dot\alpha\beta} = -\eta^{mn}\delta^\beta_\alpha + 2(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta \tag{A.1.25}$$
$$(\sigma^{mn})_\alpha{}^\alpha = (\bar\sigma^{mn})^{\dot\alpha}{}_{\dot\alpha} = 0 \tag{A.1.26}$$
$$\mathrm{tr}(\sigma^m\bar\sigma^n) = -2\eta^{mn} \tag{A.1.27}$$
$$\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\sigma_m^{\dot\beta\beta} = -2\delta^\beta_\alpha\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \tag{A.1.28}$$
$$(\sigma^m)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma_m)_{\beta\dot\beta} = -2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \tag{A.1.29}$$
$$\sigma^a\bar\sigma^b\sigma^c = \eta^{ac}\sigma^b - \eta^{bc}\sigma^a - \eta^{ab}\sigma^c + i\varepsilon^{abcd}\sigma_d \tag{A.1.30}$$
$$\bar\sigma^a\sigma^b\bar\sigma^c = \eta^{ac}\bar\sigma^b - \eta^{bc}\bar\sigma^a - \eta^{ab}\bar\sigma^c - i\varepsilon^{abcd}\bar\sigma_d \tag{A.1.31}$$
$$(\sigma^{mn})_\alpha{}^\beta\varepsilon_{\beta\gamma} = (\sigma^{mn})_\gamma{}^\beta\varepsilon_{\beta\alpha} \tag{A.1.32}$$
$$\varepsilon^{mnkl}\sigma_{kl} = -2i\sigma^{mn}, \quad \varepsilon^{mnkl}\bar\sigma_{kl} = 2i\bar\sigma^{mn} \tag{A.1.33}$$
$$\mathrm{tr}(\sigma^{mn}\sigma^{kl}) = -\frac{1}{2}(\eta^{mk}\eta^{nl} - \eta^{ml}\eta^{nk}) - \frac{i}{2}\varepsilon^{mnkl} \tag{A.1.34}$$
$$(\sigma^{mn}\sigma^r) = -\frac{1}{2}(\eta^{mr}\sigma^n - \eta^{nr}\sigma^m + i\varepsilon^{mnrs}\sigma_s) \tag{A.1.35}$$
$$(\bar\sigma^r\sigma^{mn}) = \frac{1}{2}(\eta^{rn}\bar\sigma^m - \eta^{rm}\bar\sigma^n - i\varepsilon^{rmns}\bar\sigma_s) \tag{A.1.36}$$

A.2 Bispinoren

$$F_{(\beta\alpha)} = +\frac{1}{2}(\sigma^{ba}\epsilon)_{\beta\alpha}F_{ba} \quad , \qquad F_{(\dot{\beta}\dot{\alpha})} = -\frac{1}{2}(\epsilon\bar{\sigma}^{ba})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}F_{ba} \ , \tag{A.2.1}$$

$$F_{ba} = (\bar{\sigma}_{ba}\epsilon)^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}F_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})} - (\epsilon\sigma_{ba})^{\beta\alpha}F_{(\alpha\beta)} \ , \tag{A.2.2}$$

$$F^{ba}F_{ba} = 2F_{(\beta\alpha)}F^{(\beta\alpha)} + 2F_{(\dot{\beta}\dot{\alpha})}F^{(\dot{\beta}\dot{\alpha})} \ , \tag{A.2.3}$$

$$*F^{dc} = \frac{1}{2}\epsilon^{dcba}F_{ba} \tag{A.2.4}$$

$$*F^{ba}F_{ba} = 2iF_{(\dot{\beta}\dot{\alpha})}F^{(\dot{\beta}\dot{\alpha})} - 2iF_{(\beta\alpha)}F^{(\beta\alpha)} \tag{A.2.5}$$

A.3 Integration über die Grassmannkoordinaten

Da jedes Superfeld sich in eine Reihe mit Grassmannparametern schreiben lässt [2, 5], reicht es, folgende Integrale zu erklären:

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \ , \qquad \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \tag{A.3.1}$$

Die Produktmaße sind definiert als

$$d^2\theta = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}d\theta_\alpha d\theta_\beta \ , \qquad \int d^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \ . \tag{A.3.2}$$

Die Integrale über die Produktmaße sind

$$\int d^2\theta \ \theta^2 = 1 \ , \qquad \int d^2\bar{\theta} \ \bar{\theta}^2 = 1 \ . \tag{A.3.3}$$

Die Integration über die θ-Parameter des Superraumes lässt sich auch stets mit Hilfe der kovarianten Ableitungen schreiben:

$$\begin{aligned} \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, v(x,\theta,\bar{\theta}) &= \left(-\frac{1}{4}\int d^2\theta\bar{\mathcal{D}}^2 v(x,\theta,\bar{\theta})\right)\Big|_{\bar{\theta}=0} = \left(\frac{1}{16}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2 v(x,\theta,\bar{\theta})\right)\Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \ , \\ \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\, v(x,\theta,\bar{\theta}) &= \left(-\frac{1}{4}\int d^2\bar{\theta}\mathcal{D}^2 v(x,\theta,\bar{\theta})\right)\Big|_{\theta=0} = \left(\frac{1}{16}\bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{D}^2 v(x,\theta,\bar{\theta})\right)\Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} \ , \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

wobei wir Terme, die gleich der totalen Ableitung sind, vernachlässigt haben. Für die partielle Integration zweier Superfelder v und w gilt ferner die Beziehung [5]:

$$\int d^4\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) w = -(-1)^{\pi(v)} \int d^4\theta v \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \ , \tag{A.3.5}$$

wobei

$$\pi(v) = \begin{cases} 0 \text{ wenn } v \text{ bosonisch} \\ 1 \text{ wenn } v \text{ fermionisch} \end{cases} \tag{A.3.6}$$

die sog. „Grassmann-Parität” ist.

A.4 Identitäten mit kovarianten Ableitungen

Die kovarianten Ableitungen sind in (2.3.11) definiert. Hier sind einige der Identitäten, die bei den Rechnungen mit Superfeldern häufig auftreten.

$$D_\alpha D_\beta = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta} D^2 \ , \qquad \bar{D}_{\dot\alpha} \bar{D}_{\dot\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \bar{D}^2 \ , \tag{A.4.1}$$

$$D_\alpha D_\beta D_\gamma = 0 \ , \qquad \bar{D}_{\dot\alpha} \bar{D}_{\dot\beta} \bar{D}_{\dot\gamma} = 0 \ , \tag{A.4.2}$$

$$[D^2, \bar{D}_{\dot\alpha}] = -4i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m D^\alpha \ , \qquad [\bar{D}^2, D_\alpha] = 4i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \bar{D}^{\dot\alpha} \ , \tag{A.4.3}$$

$$D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha = \bar{D}_{\dot\alpha} D^2 \bar{D}^{\dot\alpha} \ , \tag{A.4.4}$$

$$D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 - 2D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha = 16\Box \ , \tag{A.4.5}$$

$$D^2 \bar{D}_{\dot\alpha} D^2 = 0 \ , \qquad \bar{D}^2 D_\alpha \bar{D}^2 = 0 \ , \tag{A.4.6}$$

$$D^2\bar{D}^2 D^2 = 16 D^2 \Box \ , \qquad \bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 = 16\bar{D}^2\Box \ . \tag{A.4.7}$$

A.5 Variationsregeln für Superfelder

Wir fassen im Folgenden die Variationsregeln für Superfelder zusammen [5]. Wir betrachten dabei ein Funktional $S[V]$ von einem Superfeld V auf $\mathbb{R}^{4|4}$. Dann besagt das Prinzip der kleinsten (stationären) Wirkung, dass für beliebige Variationen δV

$$\delta S[V] = S[V+\delta V] - S[V] = \int d^8 \delta V(z) \frac{\delta S[V]}{\delta V(z)} \overset{!}{=} 0 \ . \tag{A.5.1}$$

Dabei ist $z = (x, \theta, \bar\theta) \in \mathbb{R}^{4|4}$. Gleichung (A.5.1) führt auf die Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta S[V]}{\delta V(z)} = 0 \ . \tag{A.5.2}$$

Die in dieser Bewegungsgleichung auftretende Ableitung hat (im Gegensatz zu Feldtheorien auf herkömmlicher Raum-Zeit) keine einheitliche Form. Vielmehr hängt sie von der Art des Betreffenden Superfeldes ab. Es gelten die folgenden Variationsregeln:

- Für Vektorsuperfelder:

$$\frac{\delta V(z')}{\delta V(z)} = \delta^8(z-z') \tag{A.5.3}$$

- Für chirale Skalarsuperfelder:

$$\frac{\delta\Phi(z')}{\delta\Phi(z)} = -\frac{1}{4}\bar{D}^2\delta^8(z-z') \tag{A.5.4}$$

$$\frac{\delta\bar\Phi(z')}{\delta\bar\Phi(z)} = -\frac{1}{4}D^2\delta^8(z-z') \tag{A.5.5}$$

- Für chirale Spinorsuperfelder:

$$\frac{\delta\Phi^\beta(z')}{\delta\Phi^\alpha(z)} = -\frac{1}{4}\delta_\alpha{}^\beta \bar{D}^2\delta^8(z-z') \tag{A.5.6}$$

Anhang B

Taylor-Entwicklung im Superraum

B.1 Allgemeines

Wir erinnern zunächst an die Taylor-Entwicklung von Funktionen im gewöhnlichen $\mathbb{R}^n$ [30]. Im Spezialfall nur einer Veränderlicher haben wir:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\ h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\ h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\ h^n + \ldots \tag{B.1.1}$$

Für den allgemeinen Fall von m Veränderlichen lautet die Entwicklung

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$
$$+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k + \ldots$$

Nun wollen wir uns der Taylor-Entwicklung im Superraum zuwenden [31] und betrachten hierzu eine Funktion U, die von mehreren Superfeldern $\Phi^i, i = 1, \ldots, N$, abhängt. Jedes dieser Superfelder können wir nun in einen Teil, der nur jene Terme aus der Potenzreihenentwicklung von Φ^i im Superraum enthält, die die antikommutierenden Grassmann-Parameter enthalten, und einen, der diese nicht enthält, aufteilen:

$$\varphi^i = \Phi^i \Big| \tag{B.1.2}$$

$$\Phi^i_S = \Phi^i - \varphi^i \tag{B.1.3}$$

φ^i bezeichnet man oft als den Körper und Φ^i_S als die Seele von Φ^i. Wir können nun $U(\Phi)$ im Superraum um die Stelle φ Taylor-entwickeln:

$$U(\Phi) = U(\varphi + \Phi_S) = U(\varphi) + \sum_i \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi^i}\Phi^i_S + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 U(\varphi)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j}\Phi^i_S\Phi^j_S + \tag{B.1.4}$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\frac{\partial^3 U(\varphi)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \partial \varphi^k}\Phi^i_S\Phi^j_S\Phi^k_S + \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^4 U(\varphi)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \partial \varphi^k \partial \varphi^l}\Phi^i_S\Phi^j_S\Phi^k_S\Phi^l_S\ . \tag{B.1.5}$$

Höhere Terme treten nicht mehr auf.
Da sich die 1-Komponente einer Funktion von Superfeldern ausschließlich aus den 1-Komponenten der einzelnen Superfelder zusammensetzen wird, gilt

$$\frac{\partial^n U(\varphi)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \ldots \partial \varphi^k} = \frac{\partial^n U(\Phi\ |)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \ldots \partial \varphi^k} = \frac{\partial^n U(\Phi)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j \ldots \partial \varphi^k}\Bigg| \tag{B.1.6}$$

und wir können die Taylor-Entwicklung für U auch wie folgt schreiben:

$$U(\Phi) = U(\varphi + \Phi_S) = U(\Phi)\Big| + \sum_i \frac{\partial U(\Phi)}{\partial \varphi^i}\Big| \Phi_S^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 U(\Phi)}{\partial\varphi^i \partial\varphi^j}\Big|\Phi_S^i\Phi_S^j +$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\frac{\partial^3 U(\Phi)}{\partial\varphi^i\partial\varphi^j\partial\varphi^k}\Big|\Phi_S^i\Phi_S^j\Phi_S^k + \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^4 U(\Phi)}{\partial\varphi^i\partial\varphi^j\partial\varphi^k\partial\varphi^l}\Big|\Phi_S^i\Phi_S^j\Phi_S^k\Phi_S^l \ . \qquad \text{(B.1.7)}$$

Im Folgenden wollen wir die Komponentengestalt einiger in dieser Arbeit verwendeter Funktionen angeben.

B.2 Spezielle Entwicklungen

Entwicklung von $U(e_{Ai}V^A + S_i + \bar{S}_i)$

Wir geben die Entwicklung einer allgemeinen Funktion $U(e_{Ai}V^A + S_i + \bar{S}_i)$ mit

$$V^A = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m^A + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}^A - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda^A + \frac{1}{2}i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D^A \ , \qquad \text{(B.2.1)}$$

$$S_i = E_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m E_i + \theta\theta F_i - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi_i\sigma^m\bar{\theta} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box E_i \ , \qquad \text{(B.2.2)}$$

$$\bar{S}_i = E_i^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m E_i^* + \bar{\theta}\bar{\theta}F_i^* + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box E_i^* \qquad \text{(B.2.3)}$$

an. Wir gehen von der Entwicklung in der Form (B.1.7) aus und erhalten für die Seele und den Körper des Arguments von U

$$\begin{aligned}
\Phi_S^i &= \sqrt{2}\theta\psi_i + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i + \theta\sigma^m\bar{\theta}\left(-e_{Ai}v_m^A - 2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_i)\right) + \bar{\theta}\bar{\theta}F_i^* + \theta\theta F_i \\
&\quad + \theta\theta\bar{\theta}\left(ie_{Ai}\bar{\lambda}^A + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_i\right) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(-ie_{Ai}\lambda^A + \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i\right) \\
&\quad + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\frac{1}{2}e_{Ai}D^A + \frac{1}{2}\Box\mathrm{Re}\,E_i\right) \ , \qquad \text{(B.2.4)} \\
\varphi^i &= E + E^* = 2\mathrm{Re}\,E \ . \qquad \text{(B.2.5)}
\end{aligned}$$

Wir sind nur an der $\theta^2\bar{\theta}^2$-Komponente von U interessiert, da nur diese nach der $d^4\theta$-Integration in der Lagrangedichte übrig bleiben wird. Wir geben diese Komponente der entsprechenden Produkte der Φ_S^i an:

$$\begin{aligned}
\Phi_S^i\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \frac{1}{2}e_{Ai}D^A + \frac{1}{2}\Box(\mathrm{Re}\,E_i) \qquad \text{(B.2.6)} \\
\Phi_S^i\Phi_S^j\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= -\frac{1}{2}\left(e_{Ai}v^{mA} + 2\partial^m(\mathrm{Im}\,E_i)\right)\left(e_{Bj}v_m^B + 2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_j)\right) \\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_j\psi_i + \psi_i\psi_j - \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_j\bar{\psi}_i) + F_iF_j^* + F_jF_i^* \\
&\quad - \frac{i}{2}\left(\psi_j\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i + \psi_i\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_j + \bar{\psi}_j\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_i + \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_j\right) \qquad \text{(B.2.7)} \\
\Phi_S^i\Phi_S^j\Phi_S^k\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= -\frac{1}{2}\psi_j\sigma^m\bar{\psi}_k\left(e_{Ai}v_m^A + 2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_i)\right) - \frac{1}{2}\psi_k\sigma^m\bar{\psi}_j\left(e_{Ai}v_m^A + 2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_i)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\psi_i\sigma^m\bar{\psi}_k\left(e_{Aj}v_m^A+2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_j)\right)-\frac{1}{2}\psi_k\sigma^m\bar{\psi}_i\left(e_{Aj}v_m^A+2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_j)\right)\\
&-\frac{1}{2}\psi_i\sigma^m\bar{\psi}_j\left(e_{Ak}v_m^A+2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_k)\right)-\frac{1}{2}\psi_j\sigma^m\bar{\psi}_i\left(e_{Ak}v_m^A+2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_k)\right)\\
&-(\psi_i\psi_j)F_k^*-(\psi_i\psi_k)F_j^*-(\psi_j\psi_i)F_k^*\\
&-(\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j)F_k-(\bar{\psi}_i\bar{\psi}_k)F_j-(\bar{\psi}_j\bar{\psi}_i)F_k
\end{aligned}
\tag{B.2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_S^i\Phi_S^j\Phi_S^k\Phi_S^l\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \psi_i\psi_j\bar{\psi}_k\bar{\psi}_l+\psi_i\psi_k\bar{\psi}_j\bar{\psi}_l+\psi_i\psi_l\bar{\psi}_j\bar{\psi}_k\\
&\quad+\psi_k\psi_l\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j+\psi_j\psi_l\bar{\psi}_i\bar{\psi}_k+\psi_j\psi_k\bar{\psi}_i\bar{\psi}_l
\end{aligned}
\tag{B.2.9}
$$

Eingesetzt in (B.1.7) erhalten wir unter Ausnutzung von Symmetrien das Endresultat

$$
\begin{aligned}
U(e_{Ai}V^A+S_i+\bar{S}_i)\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \frac{1}{2}U_i\,e_{Ai}D^A\\
&\quad+\frac{1}{2}U_{ij}\Big\{-2\partial^m(\mathrm{Re}\,E_i)\partial_m(\mathrm{Re}\,E_j)+i\sqrt{2}e_{Ai}(\psi_j\lambda^A-\bar{\psi}_j\bar{\lambda}^A)\\
&\qquad-\frac{1}{2}\left(e_{Ai}v^{Am}+2\partial^m(\mathrm{Im}\,E_i)\right)\left(e_{Bj}v_m^B+2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_j)\right)\\
&\qquad-i\left(\psi_j\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i+\bar{\psi}_j\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_i\right)+2F^iF^{*j}\Big\}\\
&\quad+\frac{1}{2}U_{ijk}\Big\{-\psi_i\sigma^m\bar{\psi}_j\left(e_{Ak}v_m^A+2\partial_m(\mathrm{Im}\,E_k)\right)\\
&\qquad-(\psi_i\psi_j)F_k^*-(\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j)F_k\Big\}\\
&\quad+\frac{1}{4}U_{ijkl}\,\psi_i\psi_j\bar{\psi}_k\bar{\psi}_l\;,
\end{aligned}
\tag{B.2.10}
$$

wobei U_j die partielle Ableitung nach $2(\mathrm{Re}\,E_j)$ bezeichnet und über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist.

Anhang C

Eigenschaften der Massenmatrizen

C.1 Symmetrieeigenschaften

Wir betrachten die in Abschnitt 5.3 eingeführten Massenmatrizen

$$(M^2)_{ij} = \operatorname{Re} f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j \tag{C.1.1}$$

$$(M_T^2)_{ij} = \operatorname{Im} f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j + \frac{1}{2} e_{Ai} m^A{}_j \tag{C.1.2}$$

wobei f_{AB} eine bezüglich ihrer Indizes symmetrische Funktion ist. Die Symmetrie von (M^2) folgt unmittelbar aus der Symmetrie von f_{AB}:

$$\begin{aligned}(M^2)_{ij} &= \operatorname{Re} f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j = \operatorname{Re} f_{AB} m^B{}_j m^A{}_i = \operatorname{Re} f_{BA} m^B{}_j m^A{}_i = \operatorname{Re} f_{AB} m^A{}_j m^B{}_i \\ &= (M^2)_{ji} \ .\end{aligned} \tag{C.1.3}$$

Was die Symmetrie von (M_T^2) betrifft, so machen wir die folgenden Beobachtungen: Der erste Term in (C.1.2) ist für sich symmetrisch. Den zweiten Term wollen wir in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil spalten:

$$e_{Ai} m^A{}_j = (e_A m^A)^{sym}_{ij} + (e_A m^A)^{anti}_{ij} \ . \tag{C.1.4}$$

Betrachten wir nun die Lagrangedichte (5.2.25),

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{4} \int d^2\theta \left\{ f_{AB}(2im^A{}_i \Phi^i - W^A)(2im^B{}_j \Phi^j - W^B) + 2e_{Ai}\Phi^i \left(W^A - im^A{}_j \Phi^j \right) \right\} + \text{h.c.} \ , \tag{C.1.5}$$

so wird wegen

$$e_{Ai} m^A{}_j \Phi^i \Phi^j = (e_A m^A)^{sym}_{ij} \Phi^i \Phi^j \tag{C.1.6}$$

nur der symmetrische Anteil von (C.1.4) dazu beitragen. Wir wollen nun die Eichtransformationen (5.2.10),

$$\begin{aligned}\Phi^i &\longrightarrow \Phi^i - \frac{i}{2} Y^i \\ W^A &\longrightarrow W^A + m^A{}_j Y^j,\end{aligned} \tag{C.1.7}$$

mit $Y^i = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D\Lambda^i$ an der obigen Lagrangedichte ausführen. Der erste Term der Lagrangedichte ist für sich eichinvariant. Der zweite führt uns auf eine totale Ableitung

$$\begin{aligned}2e_{Ai}\Phi^i\left(W^A - im^A{}_j\Phi^j\right) \longrightarrow\ & 2e_{Ai}(\Phi^i - \frac{i}{2}Y^i)[(W^A + m^A{}_k Y^k) - im^A{}_j(\Phi^j - \frac{i}{2}Y^j)] \\ =\ & 2e_{Ai}(\Phi^i - \frac{i}{2}Y^i)[W^A - im^A{}_j\Phi^j - \frac{1}{2}m^A{}_k Y^k)] \\ =\ & 2e_{Ai}\Phi^i(W^A - im^A{}_j\Phi^j) + e_{Ai}m^A{}_k\Phi^i Y^k - ie_{Ai}Y^i(W^A - im^A{}_j Y^j) \\ =\ & 2e_{Ai}\Phi^i(W^A - im^A{}_j\Phi^j) - ie_{Ai}Y^i W^A \\ & + e_{Ai}m^A{}_k(\Phi^i Y^k - \Phi^k Y^i)\end{aligned} \tag{C.1.8}$$

Der zweite Term aus (C.1.8) liefert zusammen mit seinem komplex konjugierten die totale Ableitung. Wir sehen, dass die Eichinvarianz gesichert ist, wenn wir $(M_T^2)_{ij}$ als den symmetrischen Anteil von (C.1.2)

$$(M_T^2)_{ij} = \quad \mathrm{Im}\, f_{AB} m^A{}_i m^B{}_j + \frac{1}{2}e_{A(i}m^A{}_{j)} \tag{C.1.9}$$

definieren, was mit der Beobachtung, dass nur dieser zur Lagrangedichte beiträgt, verträglich ist.

Wir schließen die folgenden Bemerkungen an: Während im Kontext der in dieser Arbeit durchgeführten Konstruktion der Lagrangedichte die Matrizen e_{Ai} und $m^A{}_j$ zunächst nur als Kopplungsmatrizen auftauchen, haben sie in der String-Theorie, aus der man das betrachtete Modell durch Kaluza-Klein-Kompaktifizierung erhalten muss, eine tiefere physikalische Bedeutung. Sie beschreiben dort sog. elektrische und magnetische Ladungen bei Anwesenheit von Hintergrundflüssen. Die Bedingung

$$e_{Ai}m^A{}_k - e_{Ak}m^A{}_i = 0 \tag{C.1.10}$$

ist in der String-Theorie als "'generalized tadpole condition" bekannt und taucht auch im Kontext der $N = 2$, $D = 4$ Supergravitation auf, wo sie als Folge der SUSY-Ward-Identität angesehen werden kann [32, 33, 34]. In der $N = 1$ Supersymmetrie scheint es eine solche allgemeine Bedingung nicht zu geben.

C.2 Inverse Matrizen

Wir wollen zunächst die komplexe Linearkombination (6.2.18) der Massenmatrizen betrachten.

$$M_{ij} := (M^2)_{ij} + i(M_T^2)_{ij} \tag{C.2.1}$$

Das Inverse existiert und es laute

$$(M^{-1})_{ij} = \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij} + i\mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ij} \tag{C.2.2}$$

Wir wollen die folgenden Bezeichnungen wählen:

$$R_{ij} := \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij} \tag{C.2.3}$$

$$I_{ij} := \mathrm{Im}\,(M^{-1})_{ij} \tag{C.2.4}$$

Die so definierten Matrizen unterliegen der folgenden Bedingung

$$\delta_{ik} = M^{-1}_{ij}M_{jk} = (R + iI)_{ij}\left(M^2 + iM_T^2\right)_{jk} = \left(RM^2 - IM_T^2\right)_{ik} + i\left(IM^2 + RM_T^2\right)_{ik} \tag{C.2.5}$$

Hieraus folgt

$$(RM^2)_{ik} = (IM_T^2)_{ik} + \delta_{ik} \qquad \text{und} \qquad (IM^2)_{ik} = -(RM_T^2)_{ik} \tag{C.2.6}$$

Wir betrachten nun die in (6.2.51) aufgetretene Matrix

$$\Big\{\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}[\mathrm{Im}\,(M)^{-1}]^{-1}_{jk}[\mathrm{Im}\,(M)^{-1}]^{-1}_{ir}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{kl}\mathrm{Re}\,(M^{-1})_{rs}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_l m^D{}_s \\ + \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{ij}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_i m^D{}_j + \mathrm{Re}\,f_{AB}\Big\} \tag{C.2.7}$$

und zeigen, dass ihr Inverses durch

$$\mathrm{Re}\,f^{-1EA} - \mathrm{Re}\,(M^{-1})_{tu}m^E{}_t m^A{}_u \tag{C.2.8}$$

gegeben ist, wie in Abschnitt 6.2.5 behauptet.

$$\begin{aligned}
&\big\{\mathrm{Re}\,f^{-1EA} - R_{tu}m^E{}_t m^A{}_u\big\} \\
&\times\Big\{R_{ij}I^{-1}_{jk}I^{-1}_{ir}R_{kl}R_{rs}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_l m^D{}_s + R_{ij}\mathrm{Re}\,f_{AC}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^C{}_i m^D{}_j + \mathrm{Re}\,f_{AB}\Big\} \\
&\quad = \delta^E_B + R_{ij}I^{-1}_{jk}I^{-1}_{ir}R_{kl}R_{rs}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_s m^E{}_l + R_{ij}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_j m^E{}_i \\
&\qquad - R_{ij}I^{-1}_{jk}I^{-1}_{ir}R_{kl}R_{rs}R_{tu}\mathrm{Re}\,f_{AC}m^A{}_u m^C{}_l\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_s m^E{}_t \\
&\qquad - R_{ij}R_{tu}\mathrm{Re}\,f_{AC}m^A{}_u m^C{}_i\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_j m^E{}_t - R_{tu}\mathrm{Re}\,f_{AB}m^A{}_u m^E{}_t \\
&\quad = \delta^E_B + R_{ij}I^{-1}_{jk}I^{-1}_{ir}R_{kl}R_{rs}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_s m^E{}_l - R_{ij}I^{-1}_{jk}I^{-1}_{ir}R_{kl}R_{rs}R_{tu}(M^2)_{ul}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_s m^E{}_t \\
&\qquad - R_{ij}R_{tu}(M^2)_{ui}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_j m^E{}_t \\
&\quad = \delta^E_B + R_{ij}I^{-1}_{jk}I^{-1}_{ir}R_{kl}R_{rs}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_s m^E{}_l \\
&\qquad - R_{ij}I^{-1}_{jk}I^{-1}_{ir}R_{tu}R_{rs}(I_{kl}(M_T^2)_{lu} + \delta_k u)\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_s m^E{}_t - R_{ij}R_{tu}(M^2)_{ui}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_j m^E{}_t \\
&\quad = \delta^E_B - R_{ij}I^{-1}_{ir}R_{tu}R_{rs}(M_T^2)_{ju}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_s m^E{}_t - R_{ij}R_{tu}(M^2)_{ui}\mathrm{Re}\,f_{BD}m^D{}_j m^E{}_t \\
&\quad = \delta^E_B
\end{aligned}$$

q.e.d.

Dabei haben wir von den Definitionen der Massen (C.1.1) und (C.1.2), sowie von (C.2.6) Gebrauch gemacht.

Anhang D

Nichtabelsche Supersymmetrie

Mit der Transformation (2.5.3) haben wir die supersymmetrische Erweiterung der $U(1)$-Eichtransformationen kennengelernt. Wir wollen nun die Verallgemeinerung der Supersymmetrie zu einer nichtabelschen Eichtheorie, d.h. eine supersymmetrische Yang-Mills-Theorie, vorstellen [2, 3, 16]. Wir betrachten ein chirales Superfeld Φ, das sich in einer (irreduziblen) Darstellung einer nicht-abelschen Gruppe G transformiert. Die Darstellung sei durch einen Satz von Matrizen t_a gegeben, d.h.

$$[t_a, t_b] = i f_{ab}{}^c t_c \ , \tag{D.1}$$

wobei $f_{ab}{}^c$ die total antisymmetrischen Strukturkonstanten von G sind. Unter einer Eichtransformation verhält sich Φ wie folgt

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \exp(-2igt_a\Lambda^a)\Phi \ , \tag{D.2}$$

mit chiralen Superfeldern Λ^a. Für das antichirale Superfeld $\bar{\Phi}$ gilt dann

$$\bar{\Phi} \longrightarrow \bar{\Phi}' = \bar{\Phi}\exp(2igt_a\bar{\Lambda}^a) \ . \tag{D.3}$$

Eine eichinvariante Kombination chiraler Superfelder ist dann

$$\bar{\Phi}\exp(2gt_aV^a)\Phi \ , \tag{D.4}$$

wobei die V^a Vektorsuperfelder sind. Die Eichinvarianz von (D.4) ist gesichert, wenn für die Vektorsuperfelder V^a gilt

$$\exp(V') = \exp(-i\bar{\Lambda})\exp(V)\exp(i\bar{\Lambda}) \ , \tag{D.5}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\Lambda = 2g\Lambda^a t_a \ , \qquad V = 2gV^a t_a \tag{D.6}$$

eingeführt haben. V' lässt sich stets in der Form $V' = 2gV'^a t_a$ schreiben. Eine eichinvariante Lagrangedichte für chirale Materiefelder ist mit

$$\mathcal{L}_\Phi = \int d^4\theta\, \bar{\Phi} e^V \Phi \tag{D.7}$$

gewonnen.

Für die Vektorsuperfelder V lassen sich Feldstärken konstruieren. Sie lauten

$$W_\alpha = \frac{1}{2g}\bar{D}\bar{D}e^{-V}D_\alpha e^V \tag{D.8}$$

und transformieren sich wie folgt:

$$W_\alpha \longrightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \ . \tag{D.9}$$

Eine eichinvariante Wirkung für die Vektorsuperfelder ist durch

$$\mathcal{L}_V = \frac{1}{64} \int d^2\theta \, \mathrm{Tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{ h.c.} \tag{D.10}$$

gegeben.

Literaturverzeichnis

[1] G. Altarelli, "Status of the Standard Model and beyond", Nucl.Instrum.Meth. A518 (2004) 1-8, `hep-ph/0306055`

[2] J. Wess, J. Bagger, "Supersymmetry and supergravity", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983

[3] S. Gates, M. Grisaru, M. Roček, W. Siegel, "Superspace: one thousand and one lessons in supersymmetry", Front.Phys. 58 (1983) 1, `hep-th/0108200`

[4] M. F. Sohnius, "Introducing Supersymmetry", Phys. Rept. 128 (1985) 39

[5] I. Buchbinder, S. Kuzenko, "Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity", Institute of Physics Publishing, London, 1995

[6] Eine Übersicht gibt:
M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, "Superstring Theory", Vol. 1 & 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

[7] G. Kane (Hsg), M. Shifman (Hsg), "The Supersymmetric World - The Beginnings of the Theory", World Scientific, Singapore, 2000

[8] T. Grimm, J. Louis, "The effective action of $N = 1$ Calabi-Yau orientifolds", Nucl.Phys. B699 (2004) 387-426, `hep-th/0403067`

[9] J. Louis, W. Schulgin, "Massive tensor multiplets in $N = 1$ supersymmetry", Fortsch.Phys. 53 (2005) 235-245, `hep-th/0410149`

W. Schulgin, "Massive lineare Multipletts in der $N = 1$ Supersymmetrie", Diplomarbeit, Universität Hamburg, 2004, `http://www.desy.de/uni-th/stringth/Works/arbeiten.html`

[10] E.C.G. Stückelberg, "Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte", Helv. Phys. Acta 11 (1938) 225

[11] H. Ruegg, M. Ruiz-Altaba, "The Stueckelberg Field", Int.J.Mod.Phys. A19 (2004) 3265-3348, `hep-th/0304245`

[12] U. Theis, "Masses and Dualities in Extended Freedman-Townsend Models", Phys.Lett. B609 (2005) 402-407, `hep-th/0412177`

[13] S. Coleman, J. Mandula, "All Possible Symmetries Of The S Matrix", Phys. Rev. 159 (1967) 1251

[14] R. Haag, J. Lopuszanski, M. Sohnius, "All possible generators of supersymmetries of the S-matrix", Nucl. Phys. B88 (1975) 257

[15] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, “Relativität, Gruppen, Teilchen”, Springer, New York, 1979

[16] D. Bailin, A. Love, “Supersymmetric gauge field theory and string theory”, IOP, Bristol, 1994

[17] N. Polonsky, “Supersymmetry: Structure and Phenomena”, Springer, Berlin, 2001

[18] B. Körs, P. Nath, “A Supersymmetric Stueckelberg $U(1)$ Extension of the MSSM”, JHEP 0412 (2004) 005, `hep-ph/0406167`

[19] W. Siegel, “Gauge Spinor Superfield as Scalar Multiplet”, Phys. Lett. 85B (1979) 333

[20] S.J. Gates, “Super p-Form Gauge Superfields”, Nucl. Phys. B184 (1981) 381

[21] S. M. Kuzenko, “On massive tensor multiplets”, JHEP 0501 (2005) 041, `hep-th/0412190`

[22] M. Henneaux, C. Teitelboim, “Quantization of Gauge Systems”, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992

[23] U. Lindström, M. Roček, “Scalar Tensor Duality and $N = 1, 2$ Non-Linear σ-Models”, Nucl. Phys. B222 (1983) 285

[24] J.-P. Derendinger, F. Quevedo, M. Quiros, “The linear multiplet and quantum four-dimensional string effective actions”, Nucl. Phys. B428 (1994) 282, `hep-th/9402007`

J.-P. Derendinger, “The linear multiplet and quantum string effective actions”, `hep-th/9412086`

[25] B. Binetruy, G. Girardi, R. Grimm, “Supergravity couplings: a geometric formulation”, Phys. Rept. 343 (2001) 255, `hep-th/0005225`

[26] P. P. Srivastava, “Supersymmetry, superfields and supergravity”, IOP, Bristol, 1986

[27] L. E. Fuller, “Basic Matrix Theory”, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962

[28] G. W. Stewart, “Introduction to Matrix Computations”, Academic Press, New York, 1973

[29] V.I. Borodulin, R.N. Rogalyov, S.R. Slabospitsky, “CORE 2.1 (COmpendium of RElations, Version 2.1)”, `hep-ph/9507456`

[30] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, “Taschenbuch der Mathematik”, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1999

[31] H. Kalka, G. Soff, “Supersymmetrie”, B. G. Teubner, Stuttgart, 1997

[32] R. D’Auria, S. Ferrara, M. Trigiante, S. Vaula, “$N = 1$ reduction of $N = 2$ supergravity in the presence of tensor multiplets ”, JHEP 0503 (2005) 052, `hep-th/0502219`

[33] R. D’Auria, L. Sommovigo, S. Vaula, “$N = 2$ Supergravity Lagrangian Coupled to Tensor Multiplets with Electric and Magnetic Fluxes”, JHEP 0411 (2004) 028, `hep-th/0409097`

[34] R. D’Auria, S. Ferrara, “Dyonic Masses from Conformal Field Strengths in D even Dimensions”, Phys.Lett. B606 (2005) 211-217, `hep-th/0410051`

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Herrn Prof. Jan Louis für die interessante Aufgabenstellung und die sehr engagierte Betreuung bedanken.

Für zahllose Diskussionen bin ich Waldemar Schulgin sehr zu Dank verpflichtet. Außerdem bedanke ich mich bei Olaf Hohm, Ferdinand Brennecke, Thomas Grimm und Christoph Lüdeling für hilfreiche Tipps und Gespräche. Olaf Hohm danke ich ferner für die konstruktive Kritik an dieser Arbeit und meiner Tante Gerlind Habicht für ihre Vorschläge zur besseren Lesbarkeit der Arbeit.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe sowie den Diplomanden und Doktoranden des II. Instituts danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Meinen Eltern und Marta sowie allen, die mich während meines Studiums unterstützt haben und hier nicht namentlich genannt werden, herzlichen Dank.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig angefertigt und nur die aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 24.02.2006

Jacek Swiebodzinski