

BESTIMMUNG
VON NO-SCALE KÄHLER POTENTIALEN

Mira Krämer
II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

DIPLOMARBEIT

September 2005

Gutachter der Diplomarbeit:
Zweitgutachter:

Prof. Dr. Jan Louis
Jun. Prof. Dr. Henning Samtleben

Abstract

In this diploma thesis the structure of No-Scale Kähler potentials is analysed, which provide a positive semidefinite scalar potential in the one-dimensional case and a vanishing scalar potential in the n -dimensional case. The theoretical framework is given by the $N = 1$ supergravity and we restrict this work to Kähler potentials, which depend only on the real part of a chiral superfield. In the one-dimensional case we obtain a Kähler potential, which is the negative logarithm of the real part of a chiral field. In the n -dimensional case we use a Legendre transformation to simplify the No-Scale condition. It is shown, that the Legendre transformed Kähler potential is the sum of a homogenous polynomial of first degree, the logarithm of such a polynomial and another function, which is determined by an additional condition. The formula for the inverse transformation is given, but the Kähler potential can only be determined, if the functions, on which the Legendre transformed Kähler potential depends, are specified.

Additionally we consider the special Kähler geometry in the $N = 2$ supergravity. In this case the Kähler potential appears in a special form and depends on a holomorphic prepotential. We determine this prepotential in one dimension for a vanishing scalar potential. It turns out that the prepotential has to be a polynomial of third degree and the coefficients must obey some constraints, which are given.

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wird die Struktur von No-Scale Kähler Potentialen untersucht, die im eindimensionalen Fall für ein positiv semidefinites skalares Potential und im n -dimensionalen Fall für ein verschwindendes skalares Potential sorgen. Den theoretischen Rahmen bildet die $N = 1$ Supergravitation und wir betrachten hier den Fall, dass das Kähler Potential vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt. Im eindimensionalen Fall erhalten wir ein Kähler Potential, das negativ logarithmisch vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt. Im n -dimensionalen Fall benutzen wir eine Legendre-Transformation, um die No-Scale Bedingung zu vereinfachen. Es zeigt sich, dass das legendretransformierte Kähler Potential von der Summe aus einem homogenen Polynom ersten Grades, dem Logarithmus eines homogenen Polynoms ersten Grades und einer weiteren Funktion, die durch eine zusätzliche Bedingung eingeschränkt ist, abhängt. Die Formel für die Rücktransformation wird angegeben, das Kähler Potential kann jedoch nur dann zurückgewonnen werden, wenn die Funktionen, von denen das legendretransformierte Kähler Potential abhängt, bekannt sind.

Weiterhin wird die Special Kähler Geometrie in der $N = 2$ Supergravitation betrachtet. In diesem Fall weist das Kähler Potential eine spezielle Form auf und hängt von einem holomorphen Präpotential ab. Dieses wird in einer Dimension bestimmt, wobei der Fall eines verschwindenden skalaren Potentials betrachtet wird. Es stellt sich heraus, dass das Präpotential ein Polynom dritten Grades sein muss, wobei die Koeffizienten einschränkenden Bedingungen genügen müssen.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Globale Supersymmetrie | 5 |
| 2.1 | Die Superalgebra | 5 |
| 2.2 | Multipletts | 6 |
| 2.2.1 | Das chirale Multiplett | 7 |
| 2.3 | Superraum | 7 |
| 2.4 | Superfelder | 8 |
| 2.4.1 | Eingeschränkte Superfelder | 9 |
| 2.4.2 | Skalare Superfelder | 9 |
| 2.5 | Supersymmetrische Wirkungen | 11 |
| 2.6 | Lagrangedichte für chirale Superfelder auf flacher Raumzeit | 12 |
| 2.7 | Brechung der Supersymmetrie | 13 |
| 2.8 | Einordnung in die Kähler Geometrie | 13 |
| 3 | Lokale Supersymmetrie | 19 |
| 3.1 | Allgemeine Relativitätstheorie | 19 |
| 3.2 | Supergravitation | 20 |
| 3.3 | Chirale Superfelder auf gekrümmter Raumzeit | 24 |
| 3.4 | Lagrangedichte chiraler Superfelder auf gekrümmter Raumzeit | 24 |
| 3.5 | Einordnung in die Kähler Geometrie | 26 |
| 3.5.1 | Invarianz unter Kähler Transformationen | 28 |
| 4 | Bestimmung des Kähler Potentials | 31 |
| 4.1 | Bedingung für positiv semidefinite skalare Potentiale | 31 |
| 4.2 | No-Scale Bedingung | 32 |
| 4.3 | Lösung für beliebige Kähler Potentiale $K(\phi, \bar{\phi})$ | 33 |
| 4.3.1 | Der eindimensionale Fall | 33 |
| 4.4 | Lösung für $K(\phi + \bar{\phi})$ | 34 |
| 4.4.1 | Legendre-Transformation | 34 |
| 4.4.2 | Lösung für $\mathcal{V} \geq 0$ in einer Dimension | 38 |
| 4.4.3 | Lösung für $\mathcal{V} = 0$ in n Dimensionen | 39 |
| 4.4.4 | Rücktransformation | 42 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Special Kähler Geometrie | 45 |
| 5.1 | Einführung | 45 |
| 5.2 | Bestimmung des Präpotentials in einer Dimension | 45 |
| 6 | Zusammenfassung und Ausblick | 49 |
| A | Konventionen und Rechenregeln | 51 |
| A.1 | Konventionen | 51 |
| A.2 | Heben und Senken der Indizes | 51 |
| A.3 | Grassmann-Parameter | 52 |
| B | Ergänzung zu Kapitel 5 | 53 |
| B.1 | Zweiter Lösungsweg im eindimensionalen Fall | 53 |
| C | Kähler Geometrie | 57 |
| C.1 | Die Kähler Struktur | 57 |
| C.2 | Krümmungstensoren und Christoffel-Symbole | 59 |
| D | Special Kähler Geometrie | 61 |
| E | Legendre-Transformation | 63 |

Kapitel 1

Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik mit der Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ liefert im Rahmen der Quantenfeldtheorie Vorhersagen, die von den Beschleunigerexperimenten in den bisher erreichten Energiebereichen sehr gut bestätigt worden sind. Es bestehen jedoch Zweifel, ob es auch bei höheren Energien seine Gültigkeit behält. So werden im Standardmodell zum Beispiel keine Gravitationswechselwirkungen berücksichtigt, was zur Folge hat, dass die Quantenfeldtheorie im Bereich der Planckskala zu Widersprüchen mit der Allgemeinen Relativitätstheorie führt. Ferner ist die Anzahl der freien Parameter im Standardmodell, die theoretisch nicht zugänglich sind, sondern nur experimentell bestimmt werden können, sehr hoch. Um diese zu reduzieren, bietet sich eine theoretische Erweiterung des Standardmodells an, dies kann beispielsweise durch die Supersymmetrie geschehen.

In der $N = 1$ Supersymmetrie, die in dieser Arbeit eine große Rolle spielt, wird jedem Fermion ein supersymmetrischer Partner, ein Boson, zugeordnet und umgekehrt. Somit wird die Anzahl der Elementarteilchen verdoppelt. Ein Blick in die Natur verrät jedoch schnell, dass keine supersymmetrische Aufteilung der Teilchen vorliegt. Laut Theorie sollte die gleiche Anzahl an Bosonen und Fermionen mit jeweils gleichen Massen zu beobachten sein. Da dies nicht der Fall ist, muss folglich die Supersymmetrie gebrochen sein. Dies kann grundsätzlich auf zwei Weisen realisiert werden: zum einen kann eine spontane Symmetriebrechung erfolgen, hier ist der Grundzustand nicht supersymmetrisch (siehe beispielsweise [1] und [2]). Zum anderen kann eine explizite Symmetriebrechung auftreten. In diesem Fall wird die supersymmetrische Wirkung um Terme erweitert, die unter SUSY-Transformationen nicht invariant sind und somit eine Brechung hervorrufen. Die Massenentartung wird in jedem Fall bei der Brechung aufgehoben. Die Differenz der im ungebrochenen Modell entarteten Massen entspricht dann der Größenordnung der Energieskala, bei der die Brechung auftritt [3]. Die Voraussetzungen für die spontane Brechung anhand globaler und lokaler Supersymmetrie sind an den notwendigen Stellen kurz zusammengefasst.

In der globalen Supersymmetrie werden die Raum-Zeit-Symmetrien der speziellen Relativitätstheorie zu einer Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen verallgemeinert. Wird die Gravitation berücksichtigt, so muss diese Verallgemeinerung für die Symmetrien der Allgemeinen Relativitätstheorie durchgeführt werden. Im letzteren Fall befindet man sich im theoretischen Rahmen der lokalen Supersymmetrie, der Supergravitation. In der vorliegen-

den Arbeit wird zunächst die globale Supersymmetrie eingeführt, um anschließend eine Zusammenfassung der Supergravitation vorzunehmen. Die Konzepte und Größen der globalen Supersymmetrie können durch eine geeignete Umformulierung auf gekrümmte Raumzeiten auf die Supergravitation übertragen werden.

In der globalen Supersymmetrie wird durch ein mathematisches Hilfsmittel aus der Poincaré-Algebra die Superalgebra gewonnen. Die einfachste irreduzible Darstellung der Superalgebra ist das chirale Multiplett, welches aus chiralen Feldern besteht. Aus diesen chiralen Feldern gehen die antichiralen Felder durch komplexe Konjugation hervor. Diese beiden Superfelder werden als skalare Superfelder zusammengefasst und in der Supergravitation auf gekrümmte Raumzeiten umformuliert. In diesem theoretischen Rahmen spannen sie dann eine Kähler Mannigfaltigkeit auf. Diese werden beispielsweise in [4], das unter anderem auf [5], [6] und [7] beruht, genauer erläutert. Da somit die Sprache der Kähler Geometrie eine wichtige Rolle spielt, befindet sich in Anhang C eine kurze Zusammenfassung der relevanten Größen.

Besonders interessant für diese Arbeit ist die lokale Version der Supersymmetrie, die bereits oben erwähnte Supergravitation. Leitet man hier auf gekrümmter Raumzeit die allgemeinste Lagrangedichte für chirale Superfelder her (siehe [8]), so taucht in dieser ein skalares Potential auf. Allgemein hängt das skalare Potential von einem Superpotential und einem Kähler Potential, beziehungsweise dessen Ableitungen, ab. In dieser Arbeit wird das Superpotential ab Abschnitt 3.5.1 zu eins geeicht und spielt somit keine Rolle mehr. Unter diesen Voraussetzungen wird dann in Kapitel 4 anhand der No-Scale Bedingung untersucht, welche allgemeine Form das Kähler Potential haben muss, damit der Wert des skalaren Potentials positiv semidefinit wird. Die Berechnung des Kähler Potentials für den Fall eines positiv semidefiniten skalaren Potentials ist deshalb sinnvoll, da der Vakuumerwartungswert des skalaren Potentials am globalen Minimum den Wert der kosmologischen Konstante bestimmt. Da neueste Messungen gezeigt haben [9], dass die kosmologische Konstante zwar sehr klein, aber positiv ist, muss dies folglich auch für den Vakuumerwartungswert des skalaren Potentials gelten. Befindet man sich im theoretischen Rahmen der globalen Supersymmetrie, ist diese Bedingung automatisch erfüllt wie in Abschnitt 2.6 deutlich wird. Im Falle der Supergravitation gilt dies jedoch nicht mehr und somit muss eine Bestimmung der Funktion, von der das skalare Potential abhängt, stattfinden. In [10] wurden Kähler Potentiale betrachtet, die allgemein von einem chiralen und einem antichiralen Superfeld abhängen. Für ein verschwindendes skalares Potential in einer Dimension stellt sich dort heraus, dass das Kähler Potential negativ logarithmisch von der Summe aus einer holomorphen Funktion und ihrer komplex konjugierten Funktion abhängt. Wir nehmen in Kapitel 4 jedoch die Einschränkung vor, dass das Kähler Potential nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt. Es zeigt sich für ein verschwindendes skalares Potential, dass das Kähler Potential im eindimensionalen Fall im Wesentlichen nur der negative Logarithmus vom Realteil des chiralen Feldes ist. Im n -dimensionalen Fall betrachten wir ebenfalls Kähler Potentiale, die nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängen und für ein verschwindendes skalares Potential sorgen. Hier zeigt sich, dass sie von mehreren Funktionen, unter anderem zwei homogenen Polynomen ersten Grades, abhängt.

Liegt eine positive kosmologische Konstante, und somit auch ein positives skalares Potential vor, spricht man von einem de Sitter-Raum. Bei einer verschwindenden kosmologischen

Konstante und somit auch bei einem verschwindenden skalaren Potential spricht man von einem Minkowskiraum. Die genauen Zusammenhänge werden in Abschnitt 3.1 dargestellt und können beispielsweise auch in [11] nachgelesen werden.

Anschließend leiten wir in Kapitel 5 im Rahmen der Special Kähler Geometrie (siehe beispielsweise [12]) die explizite Form des Kähler Potentials, das im eindimensionalen Fall für ein verschwindendes skalares Potential sorgt, her. Die physikalische Grundlage bildet hier die $N = 2$ Supergravitation. In diesem theoretischen Rahmen hängt das Kähler Potential in einer bestimmten Form [13] von einer holomorphen Funktion, dem Präpotential, ab. Da dieses Präpotential bisher jedoch nicht explizit bestimmt wurde, benutzen wir das eindimensionale Ergebnis für das Kähler Potential aus dem vorherigen Kapitel und leiten die Form des Präpotentials her. Es zeigt sich, dass das Präpotential ein Polynom dritten Grades sein muss, um für ein verschwindendes skalares Potential sorgen zu können. An die Koeffizienten dieses Polynoms müssen jedoch einschränkende Bedingungen gestellt werden.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- In **Kapitel 2** werden die Grundlagen der globalen Supersymmetrie zusammengefasst. Hier wird die Superalgebra mit ihren irreduziblen Darstellungen, den Multipletts, eingeführt und genauer erläutert. Ferner werden der Superraum sowie skalare Superfelder erklärt und die allgemeinste renormierbare Lagrangedichte für diese aufgestellt. Eine erste Einordnung in die Kähler Geometrie findet in diesem Kapitel statt. In dieser Sprache wird dann die allgemeinste Lagrangedichte auf flacher Raumzeit aufgestellt. Diese theoretischen Grundlagen sind beispielsweise auch in [8] und [14] zu finden.
- In **Kapitel 3** werden nach einer kurzen Zusammenfassung der Allgemeinen Relativitätstheorie die Grundlagen der Supergravitation kurz dargestellt. Der Schwerpunkt liegt hier auf der Erstellung der allgemeinsten Lagrangedichte auf gekrümmter Raumzeit. Diese ist jedoch nicht mehr renormierbar. Das in dieser Arbeit sehr wichtige skalare Potential wird am Ende des Kapitels in der Form vorgestellt, mit der im weiteren gearbeitet wird. Ferner wird auch hier das bis dahin Gezeigte in die Sprache der Kähler Geometrie übersetzt und die Invarianz der Lagrangedichte und ihrer Bausteine unter Kähler Transformationen wird gezeigt. Auch diese theoretischen Grundlagen werden in [8] behandelt.
- **Kapitel 4** befasst sich mit der Bestimmung des Kähler Potentials. Hier wird die sogenannte No-Scale Bedingung eingeführt und die eigentliche Aufgabenstellung erläutert. Zunächst wird ein Ergebnis aus [10] nachgerechnet, um daran später mit dem n -dimensionalen Fall anzuknüpfen. Dieses bestimmt die Form des Kähler Potentials, das von einem chiralen und einem antichiralen Superfeld abhängt, für den Fall eines verschwindenden skalaren Potentials. Anschließend werden nur noch Kähler Potentiale betrachtet, die vom Realteil eines chiralen Feldes abhängen. Für diese wird im eindimensionalen Fall die Gestalt des Kähler Potentials für ein positiv semidefinites skalares Potential bestimmt und im n -dimensionalen Fall für ein verschwindendes skalares Potential. Da die No-Scale Bedingung im n -dimensionalen Fall Schwierigkeiten mit sich

bringt, werden wir eine Legendre-Transformation unternehmen, um diese zu vereinfachen. Es zeigt sich, dass das legendretransformierte Kähler Potential die Summe aus einem homogenen Polynom ersten Grades, dem Logarithmus eines anderen homogenen Polynoms ersten Grades und einer mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktion mit gewissen Eigenschaften ist.

- Anschließend werden in **Kapitel 5**, nach einer Einführung in die Special Kähler Geometrie, Kähler Potentiale bestimmt, die in einer Dimension für ein verschwindendes skalares Potential sorgen. Die Kähler Potentiale, die hier zum Einsatz kommen, genügen der Special Kähler Geometrie und weisen somit eine spezielle Form auf, die in [13] bestimmt wurde. Das Besondere ist, dass das Kähler Potential in diesem Fall von einer holomorphen Funktion, dem Präpotential, abhängt und weiterhin der No-Scale Bedingung gehorchen muss. Anhand der No-Scale Bedingung wird in diesem Kapitel die Form des Präpotentials für ein verschwindendes skalares Potential bestimmt. Es zeigt sich, dass im eindimensionalen Fall nur ein Polynom dritten Grades für das Präpotential in Frage kommt. Dabei stellt sich heraus, dass die Koeffizienten dieses Polynoms einschränkende Bedingungen erfüllen müssen.
- **Kapitel 6** zeigt eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse und gibt einen Ausblick.

Kapitel 2

Globale Supersymmetrie

2.1 Die Superalgebra

Grundsätzlich unterscheidet man in konventionellen Quantenfeldtheorien zwei verschiedene Arten von Symmetrien, die voneinander unabhängig sind: die Symmetrien der Raumzeit, welche aus der Poincaré-Gruppe und ihren Darstellungen hervorgehen, sowie innere Symmetrien.

Hier taucht nun erneut das bereits in der Einleitung erwähnte Problem des Standardmodells auf – es lässt sich nicht mit der Gravitation, genauer mit der Allgemeinen Relativitätstheorie, vereinen, da die genannten Symmetriegruppen vollkommen unabhängig voneinander sind. Um dieses Problem zu lösen, strebt man eine Vereinheitlichung der beiden Symmetriegruppen an. Coleman und Mandula nahmen diese Herausforderung an und brachten ein Theorem hervor [15], welches zeigt, dass sich die einzig möglichen Symmetrien durch ein direktes Produkt aus der Poincaré-Gruppe und verschiedenen inneren Symmetriegruppen darstellen lassen. Dies geschieht allerdings unter einigen allgemeinen Annahmen. Haag, Lopuszanski und Sohnius konnten in [16] zeigen, dass die Restriktionen nicht notwendig sind, wenn man neben Kommutatoren auch Antikommutatoren zulässt. Dies ist aus physikalischer Sicht wichtig, da so auch fermionische Freiheitsgrade berücksichtigt werden können. Man gelangt mittels der \mathbb{Z}_2 -Graduierung von der Poincaré-Algebra zur Poincaré-Superalgebra, die neben Kommutatoren auch Antikommutatoren zulässt. Diese Superalgebra hat für $N = 1$ folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m P_m, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ [P_m, Q_\alpha] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \\ [P_m, P_n] &= 0, \\ [M_{mn}, Q_\alpha] &= \frac{1}{2}(\sigma_{mn})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \\ [M_{mn}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_{mn})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Die griechischen Indizes $(\alpha, \beta, \dots, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ kennzeichnen zweikomponentige Weyl-Spinoren und nehmen die Werte 1 und 2 an. Größen mit lateinischen Indizes stehen für Lorentz-Vierervektoren, somit laufen (m, n, \dots) je von Null bis drei. Die lateinischen Großbuchstaben (A, B, \dots) nehmen Werte von eins bis $N \geq 1$ an.

Man führt nun antikommutierende Parameter θ^α , sogenannte Grassmann-Variablen, ein, um die gradierte Superalgebra vollständig durch Kommutatoren beschreiben zu können. Sie erfüllen folgende Forderungen: sie sollen mit den ungeraden Elementen der Superalgebra antikommutieren und mit den geraden Elementen kommutieren. Somit gilt

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\theta^\alpha, Q_\beta\} = [P_m, \theta^\alpha] = 0. \quad (2.1.2)$$

2.2 Multipletts

Die Teilchenmultipletts sind die irreduziblen Darstellungen der Superalgebra und lassen sich anhand der Eigenwerte der Casimiroperatoren klassifizieren. Ein Casimiroperator zeichnet sich dadurch aus, dass er mit allen Generatoren einer Gruppe vertauscht, im Falle der Superalgebra muss er dies folglich mit P^m , Q und M^{mn} tun. Man findet zwei Operatoren, die diese Bedingung erfüllen: P^2 und C^2 , wobei $P^2 = P_m P^m$ und $C^2 = C_{mn} C^{mn}$, mit $C^{mn} := Y^m P^n - Y^n P^m$ und $Y^m := W^m - \frac{1}{4} Q \sigma^m \bar{Q}$ gilt. Hier ist $W^m = \frac{1}{2} \epsilon_{mnkl} P^n M^{kl}$ der Pauli-Lubanski-Vektor, dessen Quadrat neben P^2 ein Casimiroperator der Poincaré-Gruppe ist. Der Eigenwert von P^2 lautet $-m^2$ und der von C^2 ist $2m^4 j(j+1)$. Man erhält demnach für jedes Zahlenpaar (m, j) eine irreduzible Darstellung, bzw. ein Multiplett der Superalgebra, wobei die Teilchen innerhalb eines Multipletts dieselbe Masse haben. Interessant sind zwei Fälle: die massive und die masselose Darstellung. Im Folgenden wird das massive Multiplett betrachtet, welches erlaubt, alle Untersuchungen im Ruhesystem durchzuführen. Da hier $P^m = (-m, 0, 0, 0)$ gilt, lautet die Superalgebra:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2m \delta_{\alpha\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

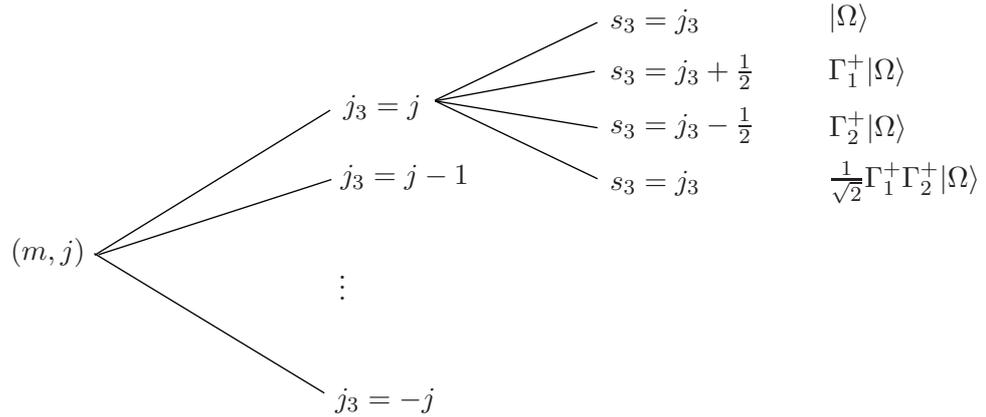
Als nächstes führt man einen Vernichtungs- und einen Erzeugungsoperator ein:

$$\Gamma_\alpha := \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_\alpha \quad \text{und} \quad \Gamma_{\dot{\alpha}}^+ := \frac{1}{\sqrt{2m}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}. \quad (2.2.2)$$

Mit ihrer Hilfe lässt sich nun (2.2.1) umschreiben, sodass man die fundamentalen Anti-vertauschungsrelationen für Fermioperatoren erhält. Nach der Einführung eines Clifford-Vakuums $|\Omega\rangle$, das durch $\Gamma_\alpha |\Omega\rangle = 0$ definiert ist, können vier Zustände mit den Operatoren $\{\mathbb{1}, \Gamma_1^+, \Gamma_2^+, \Gamma_1^+ \Gamma_2^+\}$ erzeugt werden:

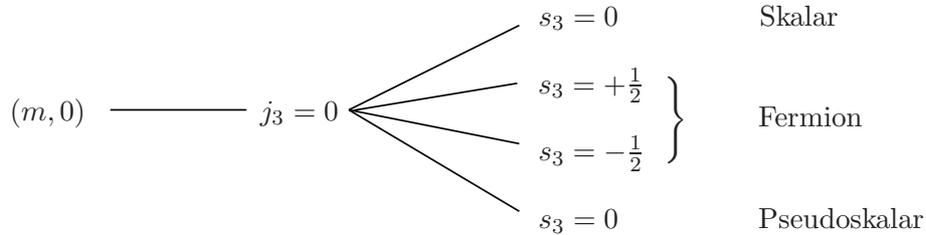
$$|\Omega\rangle, \quad \Gamma_1^+ |\Omega\rangle, \quad \Gamma_2^+ |\Omega\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_1^+ \Gamma_2^+ |\Omega\rangle. \quad (2.2.3)$$

Man kann zeigen, dass für jeden der vier Zustände die Anwendung der Fermioperatoren die Quantenzahl j_3 invariant lässt [14]. Zudem gehören alle vier Zustände dem gleichen Eigenwert j_3 an, sodass eine Darstellung (m, j) genau $(2j + 1)$ Unterräume enthält. Jeder dieser Unterräume enthält nun wiederum Eigenzustände des Spinoperators S_3 mit den Eigenwerten $s_3 = j_3, j_3 + \frac{1}{2}, j_3 - \frac{1}{2}, j_3$. Der Eigenwert j_3 durchläuft die Werte $j, j - 1, j - 2, \dots, -j$. Mit diesen Informationen kann nun das Supermultiplett angegeben werden:



2.2.1 Das chirale Multiplett

Die einfachste Darstellung der Superalgebra erhält man für $j = 0$. Diese wird auch als chirales Multiplett bezeichnet. Das Clifford-Vakuum ist nun ein bosonischer Zustand.



Hier wird deutlich, dass zu diesem Multiplett ein Fermion, ein skalares und ein pseudoskalares Teilchen gehört. Die letzten beiden zeichnen sich durch den Spin 0 aus. Das chirale Multiplett beschreibt Materiefelder und wird in dieser Arbeit eine Rolle spielen.

2.3 Superraum

Nun wird ein Formalismus vorgestellt, der supersymmetrische Modelle besonders elegant beschreibt. Die Komponenten eines Multipletts sollen hier als Felder dargestellt werden, um anschließend für diese eine supersymmetrische Wirkung zu finden.

Zu diesem Zweck wird der Superraum eingeführt. Er stellt eine Erweiterung des vierdimensionalen Minkowskiraumes um fermionische Koordinaten dar. Diese fermionischen Koordinaten wurden bereits in Abschnitt 2.1 eingeführt, es handelt sich hierbei um die Grassmann-

Variablen θ^α .

Nun wird die Gruppe der Symmetrietransformationen konstruiert. Die Generatoren P^m erzeugen eine Translation im Minkowskiraum, während die Q und \bar{Q} eine Verschiebung im Superraum hervorrufen. Lässt man die Lorentzdrehungen außer Acht, so lautet ein allgemeines Gruppenelement G der Poincaré-Supergruppe:

$$G(x^m, \theta, \bar{\theta}) = \exp \{i(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q} - x^m P_m)\}. \quad (2.3.1)$$

Diese Transformationen sind bezüglich der Gruppenmultiplikation (2.3.2) abgeschlossen und bilden somit eine Gruppe (siehe auch [8]). Dies kann leicht überprüft werden, indem das Produkt zweier Elemente (2.3.1) mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel berechnet wird. Aufgrund der Vertauschungsrelationen (2.1.1) verschwinden alle Zwei- und Mehrfachkommutatoren, sodass schließlich nur die ersten beiden Terme der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel berechnet werden müssen. Somit lautet das Produkt zweier Gruppenelemente:

$$G(a^m, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}) = G(x^m + a^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \quad (2.3.2)$$

Dies ist eine Verschiebung im $(x^m, \theta, \bar{\theta})$ -Parameterraum. Betrachtet man kleine Parameter und vernachlässigt die Raumzeit-Translationen, so lässt sich die Exponentialfunktion (2.3.1) entwickeln und man erhält die sogenannte infinitesimale SUSY-Transformation:

$$\delta_\xi := i(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}). \quad (2.3.3)$$

2.4 Superfelder

Ein Superfeld ist eine auf dem Superraum definierte Funktion sowie eine reduzible Darstellung der Superalgebra. Es steht somit für ein komplettes Multiplett und gibt seinen Inhalt frei, wenn man eine Potenzreihenentwicklung nach θ und $\bar{\theta}$ durchführt. Aufgrund der Eigenschaften der Grassmann-Parameter (siehe Anhang A.3) ist die Entwicklung endlich:

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\ & + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Die Funktionen $f, \phi, \bar{\chi}, m, n, v_m, \bar{\lambda}, \psi$ und d heißen Komponentenfelder. Das Superfeld kann sich beispielsweise unter Lorentztransformationen wie ein Lorentzskalar oder auch wie ein Weyl-Spinor verhalten. Für Einzelheiten sei auf [14] verwiesen.

Wird nun das Gruppenelement (2.3.1) auf das Superfeld angewendet, so findet man eine unitäre Darstellung, durch die $G(x, \theta, \bar{\theta})$ im Superraum realisiert wird. Mit Hilfe dieser unitären Darstellung lässt sich eine explizite Darstellung der SUSY-Generatoren finden:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_m &= -i\partial_m, \\
Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m, \\
\bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\tilde{\sigma}_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\theta^\alpha\partial_m.
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Bei der Verschiebung im Superraum wurde stillschweigend die Linksmultiplikation ausgeführt. Wird jedoch die Rechtsmultiplikation betrachtet, so erhält man anstatt der Differentialoperatoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ die zugehörigen kovarianten Ableitungen \mathcal{D} und $\bar{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m, \\
\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Bei den kovarianten Ableitungen gelten die üblichen Regeln zum Heben und Senken der Indizes, diese sind im Anhang A.2 kurz dargestellt. Ferner antikommutieren sie mit den SUSY-Generatoren, sind unter SUSY-Transformationen invariant und erfüllen folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m, \\
\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} &= \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Rechenregeln sowie weitere Eigenschaften der kovarianten Ableitungen befinden sich in [8].

2.4.1 Eingeschränkte Superfelder

Superfelder bilden eine lineare, reduzible Darstellung der Superalgebra. Da die Multipletts jedoch durch eine irreduzible Darstellung realisiert sind, muss ein Weg gefunden werden, um von den reduziblen zu den irreduziblen Darstellungen zu gelangen. Mit Hilfe von Zwangsbedingungen, die an das Superfeld gestellt werden, gelangt man zu den gewünschten irreduziblen Darstellungen. Die Einführung eines Superfeldes verlagert somit das anfängliche Problem vom Auffinden einer supersymmetrischen Darstellung zum Finden geeigneter Zwangsbedingungen. Diese müssen kovariant, also invariant unter SUSY-Transformationen sein. Man unterscheidet nun zwischen zwei grundsätzlichen Arten von Superfeldern: dem skalaren und dem Vektor-Superfeld. Das skalare Superfeld ist komplex, beinhaltet chirale sowie antichirale Felder und beschreibt Materiefelder. Das Vektor-Superfeld hingegen ist reell und beschreibt Eichfelder. In dieser Arbeit interessieren wir uns nur für die chiralen Superfelder.

2.4.2 Skalare Superfelder

Chirale Felder sind durch folgende Bedingung charakterisiert:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\phi = 0. \tag{2.4.5}$$

Die chiralen Felder lassen sich besonders elegant in komplexen Superraum-Koordinaten ausdrücken. Die Koordinaten des komplexen und reellen Superraums sind über die Beziehungen $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, $\theta'_\alpha = \theta_\alpha$ und $\bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ miteinander verknüpft. Mit Hilfe dieser Zusammenhänge lassen sich nun die kovarianten Ableitungen in den komplexen Superraum übertragen. Sie lauten:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m}, \\ \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}.\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

Eine kurze Rechnung dazu befindet sich in [17].

Die Bedingung (2.4.5) wird von jeder Funktion gelöst, die

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\theta_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}y^m = 0\tag{2.4.7}$$

erfüllt. Somit ist jede Funktion, die nur von den komplexen bosonischen Koordinaten y und den fermionischen θ s abhängt, eine Lösung. Das allgemeinste chirale Superfeld erhält man folglich durch eine Taylorentwicklung, die wieder aufgrund der Eigenschaften der Grassmann-Variablen endlich ist und nur nach θ durchgeführt wird. Sie lautet

$$\phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\chi(y) + \theta\theta F(y).\tag{2.4.8}$$

Somit beinhaltet das chirale Superfeld

- 1 komplexes Skalarfeld A ,
- 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ ,
- 1 komplexes Skalarfeld F , welches als Hilfsfeld dient.

Mit Hilfe der oben genannten Koordinatentransformation lässt sich das chirale Feld nun in den reellen Superraum übertragen und lautet

$$\begin{aligned}\phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\chi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\chi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x).\end{aligned}\tag{2.4.9}$$

Vergleicht man diese Entwicklung mit (2.4.1), so können die Komponentenfelder anhand ihrer θ -Komponente identifiziert werden. Mit Hilfe der Transformationsregeln der Komponentenfelder aus (2.4.1) lassen sich dann ebenfalls die SUSY-Transformationen für die Komponenten des chiralen Superfeldes ablesen. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\chi, \\
\delta_\xi\chi &= i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F, \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi.
\end{aligned}
\tag{2.4.10}$$

Analog hierzu kann die allgemeine Darstellung im komplexen Superraum für das antichirale Superfeld $\bar{\phi}$ gefunden werden, welches durch hermitesche Konjugation aus dem chiralen hervorgeht. Hier lauten die bosonischen Koordinaten $\bar{y}^m = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, während die fermionischen Koordinaten wieder identisch zum reellen Superraum sind. Auch hier können die kovarianten Ableitungen im komplexen Superraum formuliert werden. Mit ihrer Hilfe und der Bedingung an das antichirale Superfeld

$$\mathcal{D}_\alpha\bar{\phi} = 0 \tag{2.4.11}$$

lässt sich die allgemeine Form des antichiralen Superfeldes im reellen Superraum angeben:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi} &= \bar{A}(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\bar{A}(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\bar{A}(x) \\
&+ \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(x).
\end{aligned}
\tag{2.4.12}$$

Abschließend soll noch bemerkt werden, dass das Produkt aus einem antichiralen und einem chiralen Feld kein chirales Superfeld mehr darstellt.

2.5 Supersymmetrische Wirkungen

Die höchste Komponente eines Superfeldes ist die $\theta\theta$ -, beziehungsweise die $\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponente, da alle Ausdrücke mit mehr als zwei θ s, beziehungsweise $\bar{\theta}$ s verschwinden. Eine Eigenschaft der höchsten Komponenten kann nun ausgenutzt werden, um die supersymmetrische Wirkung zu erstellen: die Supersymmetrie-Variation der höchsten Komponente transformiert sich unter SUSY-Transformationen wie eine Viererdivergenz. Dabei spielt es keine Rolle, ob ein einzelnes Superfeld betrachtet wird oder ob Superfelder durch Multiplikation und Addition erzeugt werden.

Das Raum-Zeit-Integral über diese Viererdivergenz wird nun nach dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral transformiert. Dieses wird Null, denn es kann immer in beliebig große Raumbereiche ausgedehnt werden, wo alle Felder verschwinden. Folglich ist das Raum-Zeit-Integral über die höchste Komponente von jedem Superfeld invariant unter SUSY-Transformationen. Die supersymmetrische Wirkung lautet somit:

$$S = \int d^4x \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{L}. \tag{2.5.1}$$

2.6 Lagrangedichte für chirale Superfelder auf flacher Raumzeit

In diesem Abschnitt soll eine supersymmetrische Lagrangedichte \mathcal{L} für chirale Felder ϕ_i vorgestellt werden, die die Wirkung S unter SUSY-Transformationen invariant lässt. Die allgemeinste supersymmetrische renormierbare Lagrangedichte, welche nur chirale Superfelder beinhaltet, lautet:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{pot}}, \quad (2.6.1)$$

wobei

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \bar{\phi}_i \phi_i |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{\text{pot}} = \left(\frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \lambda_i \phi_i \right) \Big|_{\theta\theta} + h.c. \quad (2.6.2)$$

gilt. Hier bezeichnet m_{ij} die Masse und g_{ijk} steht für die Kopplungskonstante. Beide Größen sind symmetrisch in ihren Indizes. Die vertikalen Striche kennzeichnen hier die jeweils höchsten Komponenten, die herausprojiziert werden sollen und 'h.c.' bedeutet hermitesch konjugiert. Diese Projektion kann auch mit Hilfe einer Integration über die Grassmann-Variablen erreicht werden, die im Anhang A.3 erläutert ist. In Integralschreibweise lautet somit die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \bar{\phi}_i \phi_i + \left[\int d^2\theta \left(\frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \lambda_i \phi_i \right) + h.c. \right]. \quad (2.6.3)$$

Die Lagrangedichte ist eine bosonische Funktion, da die höchsten Komponenten der hier betrachteten Superfelder ebenfalls bosonisch sind. Da ferner nach [8]

$$\int F(x, \theta, \bar{\theta}) d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4} \int \bar{D}\bar{D}F(x, \theta, \bar{\theta}) d^4x d^2\theta \quad (2.6.4)$$

gilt, kann (2.6.3) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta \left(-\frac{1}{8} \bar{D}\bar{D}\bar{\phi}_i \phi_i + \lambda_i \phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + h.c. \quad (2.6.5)$$

Nun werden die θ -Entwicklungen der chiralen Superfelder eingesetzt und anschließend die Hilfsfelder F_i mit Hilfe der Eulerschen Bewegungsgleichungen eliminiert. Die Lagrangedichte lautet dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\partial_m \bar{\chi}_i \bar{\sigma}^m \chi_i + \bar{A}_i \square A_i - \frac{1}{2} m_{ik} \chi_i \chi_k - \frac{1}{2} \bar{m}_{ik} \bar{\chi}_i \bar{\chi}_k \\ & - g_{ijk} \chi_i \chi_j A_k - \bar{g}_{ijk} \bar{\chi}_i \bar{\chi}_j \bar{A}_k - \mathcal{V}(A_i, \bar{A}_j). \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Das Potential \mathcal{V} ist hier von der Form

$$\mathcal{V} = \bar{F}_k F_k, \quad (2.6.7)$$

wobei F und \bar{F} Lösungen der Eulerschen Gleichungen darstellen und $F_k = \frac{\partial W}{\partial A^k}$ gilt. Die Funktion W ist holomorph und wird in Abschnitt 2.8 eingeführt. Anhand von (2.6.7) wird deutlich, dass das Potential positiv semidefinit ist. Absolute Minima des Potentials befinden sich bei $F_k = 0$ und erhalten die Supersymmetrie. Findet man jedoch zu $F_k = 0$ keine Lösung, so ist die Supersymmetrie spontan gebrochen (siehe beispielsweise [1]).

2.7 Brechung der Supersymmetrie

Da die Supersymmetrie für jedes Elementarteilchen einen supersymmetrischen Partner mit gleicher Masse fordert und dieses in der Natur nicht beobachtet wird, muss folglich die Supersymmetrie gebrochen sein. In diesem Abschnitt wird die spontane Brechung vorgestellt (siehe auch [18], [14]).

Der Hamiltonoperator eines supersymmetrischen Modells kann aus der Superalgebra (2.1.1) hergeleitet werden und lautet:

$$H = \frac{1}{4}(\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2 \bar{Q}_2). \quad (2.7.1)$$

Er besitzt ein positiv semidefinites Energiespektrum, wie man aus der Umformung zu $H = \frac{1}{4}(Q_1 + \bar{Q}_1)^2 + \frac{1}{4}(Q_2 + \bar{Q}_2)^2$ erkennen kann. Der Operator $(Q_i + \bar{Q}_i)$ ist hermitesch und besitzt somit reelle Eigenwerte. Da diese quadriert werden, weist H ein positiv semidefinites Energiespektrum auf.

Da der Erwartungswert des Hamiltonoperators bei Null sein Minimum besitzt, sind Zustände mit der Energie $E = 0$ Grundzustände. Ferner sind diese Grundzustände supersymmetrisch, denn aufgrund von

$$\langle 0|H|0\rangle = 0 \Rightarrow Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0 \quad (2.7.2)$$

sind sie unter SUSY-Transformationen invariant. Somit muss für einen supersymmetrischen Grundzustand $\mathcal{V} = 0$ gelten. Weist ein Grundzustand jedoch eine positive Energie auf, $\langle 0|H|0\rangle \neq 0$, wird er nicht mehr von den Superladungen annihilert: $Q|0\rangle \neq 0$. Die Supersymmetrie ist somit spontan gebrochen.

2.8 Einordnung in die Kähler Geometrie

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen Kähler Geometrie und dem bisher erläuterten chiralen Modell betrachtet werden. Eine kurze Einführung in die Kähler Geometrie befindet sich in Anhang C und eine ausführliche Erörterung ist zum Beispiel in [4], das

unter anderem auf [5], [6] und [7] beruht, zu finden.

Die allgemeinste Lagrangedichte in einer flachen Raumzeit, die mit Hilfe der chiralen Superfelder ϕ^i , wobei $i = 1, \dots, n$, aufgebaut werden kann, ist nicht mehr renormierbar. Sie lautet:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\phi^i, \bar{\phi}^j) + \left[\int d^2\theta W(\phi^i) + h.c. \right], \quad (2.8.1)$$

wobei das Superfeld K das Kähler Potential und W das Superpotential darstellt. Das Kähler Potential ist eine reelle und das Superpotential eine holomorphe Funktion. Diese Superfelder lassen sich durch eine Potenzreihenentwicklung in ϕ^i darstellen:

$$\begin{aligned} K(\phi, \bar{\phi}) &= \sum c_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_M} \phi^{i_1} \dots \phi^{i_N} \bar{\phi}^{j_1} \dots \bar{\phi}^{j_M}, \\ W(\phi) &= \sum g_{i_1 \dots i_N} \phi^{i_1} \dots \phi^{i_N}. \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Um nun die Lagrangedichte in Komponenten auszudrücken, benötigt man die θ -Entwicklungen von K und W . Die θ -Entwicklung eines chiralen Feldes im komplexen Superraum wurde bereits in (2.4.8) angegeben. Hier wird aufgrund von (2.8.2) das Produkt von chiralen Feldern benötigt. Dieses stellt wiederum ein chirales Feld dar und lautet:

$$\begin{aligned} \phi_i \phi_j &= A_i(y) A_j(y) + \sqrt{2}\theta [\psi_i(y) A_j(y) + A_i(y) \psi_j(y)] \\ &\quad + \theta\theta [A_i(y) F_j(y) + A_j(y) F_i(y) - \psi_i(y) \psi_j(y)]. \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

$$\begin{aligned} \phi_i \phi_j \phi_k &= A_i(y) A_j(y) A_k(y) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta [\psi_i A_j A_k + \psi_j A_k A_i + \psi_k A_i A_j] \\ &\quad + \theta\theta [F_i A_j A_k + F_j A_k A_i + F_k A_i A_j \\ &\quad - \psi_i \psi_j A_k - \psi_j \psi_k A_i - \psi_k \psi_i A_j]. \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Mit Hilfe von (2.8.2), (2.8.3) und (2.8.4) lässt sich nun das Superpotential W angeben:

$$W(\phi) = W(A) + \sqrt{2}\theta \chi^i \frac{\partial W(A)}{\partial A^i} + \theta\theta \left\{ F^i \frac{\partial W(A)}{\partial A^i} - \frac{1}{2} \chi^i \chi^j \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A^i \partial A^j} \right\}. \quad (2.8.5)$$

Die Komponentenfelder des Superpotentials W befinden sich im komplexen Superraum und hängen somit von den komplexen Parametern y^m ab. Das konjugierte Superpotential hat eine analoge Entwicklung und lautet:

$$\bar{W}(\bar{\phi}) = \bar{W}(\bar{A}) + \sqrt{2}\bar{\theta} \bar{\chi}^i \frac{\partial \bar{W}(\bar{A})}{\partial \bar{A}^i} + \bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ \bar{F}^i \frac{\partial \bar{W}(\bar{A})}{\partial \bar{A}^i} - \frac{1}{2} \bar{\chi}^i \bar{\chi}^j \frac{\partial^2 \bar{W}(\bar{A})}{\partial \bar{A}^i \partial \bar{A}^j} \right\}. \quad (2.8.6)$$

Die Berechnung der θ -Entwicklung des Kähler Potentials $K(\phi, \bar{\phi})$ ist etwas aufwändiger, da hier das Produkt aus chiralen und antichiralen Feldern betrachtet werden muss. Dieses ist kein chirales Superfeld und lautet im reellen Superraum:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_i \phi_j &= \bar{A}_i(x) A_j(x) + \sqrt{2} \theta \psi_j(x) \bar{A}_i(x) \\
&+ \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi}_i(x) A_j(x) + \theta \theta \bar{A}_i(x) F_j(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{F}_i(x) A_j(x) \\
&+ \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} [i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{A}_i \partial_m A_j - \partial_m \bar{A}_i A_j) - 2 \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} \psi_{j\alpha}] \\
&+ \theta \theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{A}_i \partial_m \psi_j^\alpha - \partial_m \bar{A}_i \psi_j^\alpha) - \sqrt{2} F_j \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} \right] \\
&+ \bar{\theta} \bar{\theta} \theta^\alpha \left[-\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} \partial_m A_j - \partial_m \bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} A_j) + \sqrt{2} \bar{F}_i \psi_{j\alpha} \right] \\
&+ \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \left[\bar{F}_i F_j + \frac{1}{4} \bar{A}_i \square A_j + \frac{1}{4} \square \bar{A}_i A_j - \frac{1}{2} \partial_m \bar{A}_i \partial^m A_j \right. \\
&\left. + \frac{i}{2} \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_j - \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \partial_m \psi_j \right]. \tag{2.8.7}
\end{aligned}$$

Von dem Monom

$$K_{NM} = \phi^{i_1} \dots \phi^{i_N} \bar{\phi}^{j_1} \dots \bar{\phi}^{j_M} \tag{2.8.8}$$

findet man die $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponente, indem (2.8.7), (2.8.5) und (2.8.6) benutzt werden. Partielle Integration liefert dann

$$\begin{aligned}
K_{NM} &= \dots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ \left[F^k \frac{\partial}{\partial A^k} (A^{i_1} \dots A^{i_N}) - \frac{1}{2} \chi^k \chi^l \frac{\partial^2 (A^{i_1} \dots A^{i_N})}{\partial A^k \partial A^l} \right] \right. \\
&\times \left[\bar{F}^k \frac{\partial}{\partial \bar{A}^k} (\bar{A}^{j_1} \dots \bar{A}^{j_M}) - \frac{1}{2} \bar{\chi}^k \bar{\chi}^l \frac{\partial^2 (\bar{A}^{j_1} \dots \bar{A}^{j_M})}{\partial \bar{A}^k \partial \bar{A}^l} \right] \\
&\left. - \partial_m (A^{i_1} \dots A^{i_N}) \partial^m (\bar{A}^{j_1} \dots \bar{A}^{j_M}) - i \frac{\partial}{\partial \bar{A}^k} (\bar{A}^{j_1} \dots \bar{A}^{j_M}) \bar{\chi}^k \bar{\sigma}^m \partial_m \left(\chi^l \frac{\partial (A^{i_1} \dots A^{i_N})}{\partial A^l} \right) \right\}. \tag{2.8.9}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann durch die niedrigste Komponente des Superfeldes (2.8.8), die Ableitungen von $K_{NM}|$, dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
K_{NM} &= \dots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ \frac{\partial^2 K_{NM}|}{\partial A^i \partial \bar{A}^j} F^i \bar{F}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 K_{NM}|}{\partial A^i \partial \bar{A}^j \partial \bar{A}^k} F^i \bar{\chi}^j \bar{\chi}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 K_{NM}|}{\partial \bar{A}^i \partial A^j \partial A^k} \bar{F}^i \chi^j \chi^k \right. \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\partial^4 K_{NM}|}{\partial A^i \partial A^j \partial \bar{A}^k \partial \bar{A}^l} \chi^i \chi^j \bar{\chi}^k \bar{\chi}^l - \frac{\partial^2 K_{NM}|}{\partial A^i \partial \bar{A}^j} \partial_m A^i \partial^m \bar{A}^j \\
&\left. - i \frac{\partial^2 K_{NM}|}{\partial A^i \partial \bar{A}^j} \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m \partial_m \chi^i - i \frac{\partial^3 K_{NM}|}{\partial A^i \partial A^j \partial \bar{A}^k} \bar{\chi}^k \bar{\sigma}^m \chi^i \partial_m A^j \right\}. \tag{2.8.10}
\end{aligned}$$

Eine Vereinfachung dieses Ausdrucks findet statt, wenn die Sprache der Kähler Geometrie benutzt wird. Man nutzt den Zusammenhang zwischen der Metrik $g_{i\bar{j}}$ und dem Kähler Potential K aus:

$$\begin{aligned} g_{i\bar{j}} &= \frac{\partial}{\partial A^i} \frac{\partial}{\partial \bar{A}^j} K, \\ g_{i\bar{j},k} &= \frac{\partial}{\partial A^k} g_{i\bar{j}} = g_{m\bar{j}} \Gamma_{ik}^m, \\ g_{i\bar{j},\bar{k}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{A}^k} g_{i\bar{j}} = g_{i\bar{m}} \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{m}}, \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

wobei Γ_{ik}^m die Christoffel-Symbole darstellen.

Wird dies in (2.8.10) eingesetzt, so lautet das Kähler Potential:

$$\begin{aligned} K = \dots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} &\left\{ g_{i\bar{j}} F^i \bar{F}^j - \frac{1}{2} g_{i\bar{m}} \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{m}} F^i \bar{\chi}^j \bar{\chi}^k - \frac{1}{2} g_{m\bar{i}} \Gamma_{jk}^m \bar{F}^i \chi^j \chi^k \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} g_{i\bar{j},k\bar{l}} \chi^i \chi^k \bar{\chi}^j \bar{\chi}^l - g_{i\bar{j}} \partial_m A^i \partial^m \bar{A}^j - i g_{i\bar{j}} \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m \partial_m \chi^i - i g_{m\bar{k}} \Gamma_{ij}^m \bar{\chi}^k \bar{\sigma}^m \chi^i \partial_m A^j \right\}. \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

Nun kann auch die Lagrangedichte mit Hilfe der Komponentenfelder ausgedrückt werden. Zu diesem Zweck wird (2.8.5) und (2.8.12) in (2.8.1) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g_{i\bar{j}} F^i \bar{F}^j + \frac{1}{4} g_{i\bar{j},k\bar{l}} \chi^i \chi^k \bar{\chi}^j \bar{\chi}^l - F^i \left\{ \frac{1}{2} g_{i\bar{m}} \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{m}} \bar{\chi}^j \bar{\chi}^k - \frac{\partial W}{\partial A^i} \right\} \\ & - \bar{F}^i \left\{ \frac{1}{2} g_{m\bar{i}} \Gamma_{jk}^m \chi^j \chi^k - \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{A}^i} \right\} - g_{i\bar{j}} \partial_m A^i \partial^m \bar{A}^j - i g_{i\bar{j}} \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \chi^i \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial A^i \partial A^j} \chi^i \chi^j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{A}^i \partial \bar{A}^j} \bar{\chi}^i \bar{\chi}^j, \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

wobei $\mathcal{D}_m \chi^i = \partial_m \chi^i + \Gamma_{jk}^i \partial_m A^j \chi^k$ eine kovariante Ableitung bezüglich der Kähler Mannigfaltigkeit darstellt. Es handelt sich somit um einen Zusammenhang auf der Kähler Mannigfaltigkeit. Hier verhält sich χ^i wie ein kontravarianter Vektor unter einer analytischen Koordinatentransformation. Diese lautet:

$$a^i = a^i(a') \quad \text{und} \quad \bar{a}^i = \bar{a}^i(\bar{a}'), \quad (2.8.14)$$

wobei a^i und \bar{a}^i komplexe Koordinaten einer Kähler Mannigfaltigkeit sind. Da es sich bei dieser um eine analytische Riemannsche Mannigfaltigkeit handelt, kann sie in der beschriebenen Weise parametrisiert werden.

Um die Hilfsfelder F^i aus (2.8.13) zu eliminieren, werden wie bereits in Abschnitt 2.6

die Eulerschen Bewegungsgleichungen in (2.8.13) eingesetzt. Nach diesem Schritt lautet die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -g_{i\bar{j}}\partial_m A^i \partial^m \bar{A}^j - ig_{i\bar{j}}\bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \chi^i + \frac{1}{4}R_{i\bar{j}k\bar{l}}\chi^i \chi^k \bar{\chi}^j \bar{\chi}^l \\ & - \frac{1}{2}\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W \chi^i \chi^j - \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\bar{i}} \mathcal{D}_{\bar{j}} \bar{W} \bar{\chi}^i \bar{\chi}^j - g^{i\bar{j}}\mathcal{D}_i W \mathcal{D}_{\bar{j}} \bar{W}, \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

wobei folgende Abkürzungen benutzt wurden:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i W &= \frac{\partial W}{\partial A^i}, \\ \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W &= \frac{\partial^2 W}{\partial A^i \partial A^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial W}{\partial A^k}. \end{aligned} \quad (2.8.16)$$

Gleichung (2.8.15) stellt die allgemeinste supersymmetrische Kopplung von chiralen Multipletts in einer flachen Raumzeit dar. Diese Lagrangedichte ist eine supersymmetrische Version des Sigma-Modells, ausgedrückt in geometrischer Form. Jeder Term hat eine natürliche Interpretation in der Sprache der Kähler Geometrie: die skalaren Felder stellen die Koordinaten einer Kähler Mannigfaltigkeit dar, während die Fermionen als Tensoren im zugehörigen Tangentialraum aufgefasst werden können. Die benutzte Kähler Geometrie stellt sicher, dass das Ergebnis invariant unter Kähler Transformationen ist:

$$K(\phi, \bar{\phi}) \rightarrow K(\phi, \bar{\phi}) + F(\phi) + \bar{F}(\bar{\phi}). \quad (2.8.17)$$

Die Invarianz unter dieser Transformation wird im Folgenden noch eine Rolle spielen.

Kapitel 3

Lokale Supersymmetrie

In diesem Kapitel wird die lokale Version der Supersymmetrie, die Supergravitation, nach [8] zusammengefasst. Hier spielt die Gravitation eine Rolle, der bisher bei der globalen Supersymmetrie keine Beachtung geschenkt wurde. Da somit im folgenden Kapitel die gekrümmte Raumzeit von großer Bedeutung ist, erfolgt zunächst eine kurze Zusammenfassung der für uns wichtigen Begriffe der Allgemeinen Relativitätstheorie und der dynamischen Variablen der Supergravitation. Nach Einführung des Multipletts der Supergravitation werden chirale Superfelder auf gekrümmter Raumzeit eingeführt, um eine allgemeine Lagrangedichte und somit auch eine allgemeine Wirkung aufstellen zu können.

3.1 Allgemeine Relativitätstheorie

Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Gravitationswechselwirkung mit Hilfe der Differentialgeometrie (siehe zum Beispiel [19]). Auf diese Weise kann die Gravitation als ein geometrisches Phänomen verstanden werden: die 4-dimensionale Raumzeit wird aufgrund der Anwesenheit von Masse gekrümmt und kann in der Differentialgeometrie als Mannigfaltigkeit beschrieben werden. Ein wechselwirkungsfreies Teilchen bewegt sich auf dieser gekrümmten Mannigfaltigkeit auf einer Geodäte, einer minimalen Verbindung zwischen zwei Punkten. Diese verallgemeinert die Gerade des Euklidischen Raumes auf einem gekrümmten Raum.

Möchte man nun herausfinden, in welcher Art der Raum gekrümmt wird, so geben die Lösungen der Einsteinschen Gleichungen Aufschluss darüber. Diese werden in tensorieller Schreibweise angegeben, da so die Invarianz unter Koordinatentransformationen gegeben ist. Die Feldgleichungen lauten in allgemeiner Form (siehe z.B. [20]):

$$R_{mn} - \frac{1}{2}Rg_{mn} + \Lambda g_{mn} = \frac{8\pi\kappa}{c^4}T_{mn}. \quad (3.1.1)$$

Die linke Seite beschreibt die Krümmung des Raumes mit Hilfe der Ricci-Krümmung R_{mn} und der Skalarkrümmung R plus einen Zusatzterm, der die kosmologische Konstante Λ beinhaltet. Diese kosmologische Konstante wurde als erstes 1917 von Albert Einstein in seiner Veröffentlichung [21] eingeführt. Die rechte Seite beschreibt die Massenquellen mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors T_{mn} mit einem Vorfaktor bestehend aus der Lichtgeschwindigkeit c

und der Gravitationskonstanten κ . Als Lösung dieser Differentialgleichungen erhält man die Metrik g_{ml} , also ein Tensorfeld über der Raumzeit. Interessiert man sich nun beispielsweise für die Bahn eines Teilchens im Gravitationsfeld, so setzt man die Metrik in die Geodäten-gleichung ein und erhält als Lösung die gewünschte Bahnkurve.

Ferner bestimmt die Metrik die Geometrie des Raumes und umgekehrt, da sie die Christoffel-Symbole und folglich auch die Riemannkrümmung eindeutig festlegt. Aus dem Riemannschen Krümmungstensor lassen sich wiederum die Ricci-Krümmung durch Spurbildung und die Skalarkrümmung durch Kontraktion der Ricci-Krümmung mit Hilfe der Metrik gewinnen. Die Formeln zur Berechnung der Krümmungstensoren speziell für Kähler Mannigfaltigkeiten befinden sich im Anhang C, da diese in der vorliegenden Arbeit eine besondere Rolle spielen. Diese Lösungen spielen unter anderem in der Astrophysik und der Kosmologie eine große Rolle (siehe zum Beispiel [11]). Einige prominente Vertreter sind zum Beispiel das Robertson-Walker-Modell und der de Sitter-Raum. Letzterer stellt die einfachste nichtstatische Lösung mit kosmologischer Konstante dar und ist für diese Arbeit besonders interessant. Das de Sitter-Modell weist keine Singularitäten auf und beinhaltet somit weder einen Urknall noch einen Kollaps des Universums. Da das de Sitter-Modell ein leeres Universum beschreibt, kann es nur näherungsweise als ein realistisches Modell aufgefasst werden.

Im de Sitter-Modell weist die kosmologische Konstante sowie die Krümmung einen positiven Wert auf. Im Anti-de Sitter-Modell erhält man eine negative kosmologische Konstante sowie eine negativ gekrümmte Mannigfaltigkeit. Ist die Raumzeit flach, verschwindet nicht nur die Krümmung, sondern auch die kosmologische Konstante und man befindet sich in diesem Fall im Minkowskiraum. Diese drei Fälle stehen in engem Zusammenhang mit dem in diesem Kapitel herzuleitenden skalaren Potential.

3.2 Supergravitation

Der wesentliche Unterschied zur globalen Supersymmetrie besteht darin, dass die Transformations-Parameter ξ nun nicht mehr konstant sind, sondern von den Superraum-Koordinaten x, θ und $\bar{\theta}$ abhängen. Aufgrund der Koordinatenabhängigkeit spricht man auch von einer geeichten Version der globalen Supersymmetrie.

Da nun die Gravitation eine Rolle spielt, werden gekrümmte Raumzeiten betrachtet. Um die Metrik im flachen Raum auf einem gekrümmten Raum zu verallgemeinern, wird sie durch das Vielbein gemäß

$$g_{mn} = e_m^a e_n^b \eta_{ab} \quad (3.2.1)$$

ersetzt. Die Herkunft der Felder e_m^a wird weiter unten im Text erläutert. Lokale Supersymmetrie impliziert die Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen und kann somit auf natürliche Weise mit Hilfe von Differentialformen auf dem Superraum beschrieben werden. Die Elemente des Superraums werden mit $z^M \sim (x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}_{\bar{\mu}})$ bezeichnet. Die dynamischen Variablen, die im Folgenden verwendet werden, sind das Vielbein und der Zusammenhang. Diese beiden Superfelder beinhalten eine große Anzahl an Komponentenfeldern, von denen einige

mit Hilfe geeigneter kovarianter Zwangsbedingungen und andere mit der Koordinatentransformation $z^M \rightarrow z'^M = z^M - \xi^M(z)$ eliminiert werden können. Ziel ist es, eine Theorie mit einer minimalen Anzahl an Komponentenfeldern zu erhalten. Auch die Bianchi-Identitäten spielen hier eine wichtige Rolle, da sie die Anzahl der unabhängigen Superfelder, welche in den beiden dynamischen Variablen enthalten sind, zusätzlich reduzieren. Übrig bleiben nach der Reduktion ein komplexes chirales Superfeld R , ein hermitesches Vektor-Superfeld $G_{\alpha\dot{\beta}}$ und ein chirales Superfeld $W_{\alpha\beta\gamma}$, welches total symmetrisch in seinen Indizes ist.

Wichtige Größen auf einer Mannigfaltigkeit, wie Torsion und Krümmung, lassen sich durch die dynamischen Variablen ausdrücken. Per Konstruktion sind die genannten Größen Superfelder, deren Entwicklungskoeffizienten x -abhängige Komponentenfelder darstellen. Es stellt sich heraus, dass sich die Krümmung und die Torsion mit Hilfe der niedrigsten Komponenten von R , G und dem Vielbein darstellen lassen. Gleiches gilt für das Vielbein und den Zusammenhang. Somit handelt es sich bei den niedrigsten Komponenten von R , G und dem Vielbein um die physikalischen Freiheitsgrade der Supergravitation. Die übrigen Freiheitsgrade lassen sich wegeichen.

Im Folgenden wird eine Zusammenfassung über die oben genannten Größen gegeben. Ihr Ziel ist es, alle Felder vorzustellen, die für das Multiplett der Supergravitation von Bedeutung sind. Für weiterführende Details sei der interessierte Leser auf [8] verwiesen.

Die Vielbein-Formen $E^A = dz^M E_M^A(z)$ definieren ein lokales Bezugssystem und sind koordinatenunabhängig. Die Vielbein-Felder E_M^A stellen die Koeffizientenfunktionen der Vielbein-Formen dar und sind im Gegensatz zu diesen koordinatenabhängig. Im flachen Raum ist es möglich, das Vielbein in das globale Bezugssystem zu transformieren:

$$E^A = e^A. \quad (3.2.2)$$

In diesem Bezugssystem verschwindet der Zusammenhang φ , nicht jedoch die Torsion. Der Index A , sowie weitere Buchstaben vom Anfang des Alphabets, sind für die Strukturgruppe reserviert. Da die hier gewählte Strukturgruppe die Lorentzgruppe ist, ist das Bezugssystem, welches von den Vielbein-Feldern definiert wird, lokal lorentzkovariant:

$$\begin{aligned} \delta E^A &= E^B L_B^A(z), \\ \delta E_M^A &= E_M^B L_B^A(z). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Aus diesem Grund werden diese Indizes Lorentzindizes genannt. Die Erzeuger der Lorentzgruppe L_B^A besitzen drei irreduzible Komponenten: L_b^a , L_β^α und $L_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$, die mit Hilfe der σ -Matrizen ineinander überführt werden können.

Indizes, die aus der Mitte des Alphabets genommen werden, bezeichnen Einstein-Indizes und nehmen an Koordinatentransformationen teil.

Die oben genannte niedrigste Komponente des Vielbein soll hier angegeben werden, um später andere Größen mit ihrer Hilfe auszudrücken. Es handelt sich um die $\theta = \bar{\theta} = 0$ -Komponente, die wie folgt lautet:

$$E_M^A(z)|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \begin{pmatrix} e_m^a(x) & \frac{1}{2}\psi_m^\alpha(x) & \frac{1}{2}\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}(x) \\ 0 & \delta_\mu^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot{\mu}}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Die Felder e_m^a , ψ_m^α und $\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}$ können nicht weggeeeicht werden und beschreiben das Spin-2 Graviton und das Spin- $\frac{3}{2}$ Gravitino. Sie gehören somit zu den physikalischen Freiheitsgraden der Supergravitation.

Die zweite dynamische Variable der Theorie ist der Zusammenhang φ :

$$\varphi = dz^M \varphi_M, \quad \varphi_M = \varphi_{MA}{}^B. \quad (3.2.5)$$

Dieser transformiert sich wie folgt unter der Strukturgruppe:

$$\delta\varphi = \varphi L - L\varphi - dL. \quad (3.2.6)$$

Für seine niedrigste Komponente gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{mA}{}^B(z)|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \omega_{mA}{}^B(x), \\ \varphi_{\mu A}{}^B(z)|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \varphi_A^{\dot{\mu} B}(z)|_{\theta=\bar{\theta}=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Die Komponente ω des Zusammenhangs kann mit Hilfe von e , ψ und $\bar{\psi}$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \omega_{nml} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{i}{2} e_{la} (\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m) - \frac{i}{2} e_{ma} (\psi_n \sigma^a \bar{\psi}_l - \psi_l \sigma^a \bar{\psi}_n) \right. \\ \left. + \frac{i}{2} e_{na} (\psi_l \sigma^a \bar{\psi}_m - \psi_m \sigma^a \bar{\psi}_l) - e_{la} (\partial_n e_m^a - \partial_m e_n^a) \right. \\ \left. - e_{ma} (\partial_l e_n^a - \partial_n e_l^a) + e_{na} (\partial_m e_l^a - \partial_l e_m^a) \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Die kovariante Ableitung des Vielbeins wird Torsion genannt und es gilt:

$$\begin{aligned} T^A &= dE^A + E^B \varphi_B^A \\ &= \frac{1}{2} dz^M dz^N T_{NM}^A \\ &= \frac{1}{2} E^C E^B T_{BC}^A. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Ihre $\theta = \bar{\theta} = 0$ -Komponente lautet:

$$\begin{aligned}
T_{nm}{}^a| &= E_m{}^\beta E_{n\dot{\gamma}} T_{\beta}{}^{\dot{\gamma}\alpha}| + E_{m\dot{\beta}} E_n{}^\gamma T_{\gamma}{}^{\dot{\beta}\alpha}| \\
&= -\frac{i}{2}(\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m)
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

und

$$\begin{aligned}
T_{nm}{}^\alpha| &= E_m{}^b E_n{}^c T_{cb}{}^\alpha| + E_m{}^b E_n{}^\gamma T_{\gamma b}{}^\alpha| + E_m{}^\beta E_n{}^c T_{c\beta}{}^\alpha| \\
&\quad + E_m{}^b E_{n\dot{\gamma}} T_{b}{}^{\dot{\gamma}\alpha}| + E_{m\dot{\beta}} E_n{}^c T_c{}^{\dot{\beta}\alpha}|.
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Um die niedrigsten Komponenten von R , $G_{\alpha\dot{\beta}}$ und $W_{\alpha\beta\gamma}$ zu berechnen, benötigt man die einzelnen Torsionskomponenten in Gleichung (3.2.11). Diese sind in [8] zu finden und zeigen, dass zwar $W_{\alpha\beta\gamma}$ mit Hilfe von e , ψ und $\bar{\psi}$ ausgedrückt werden kann, nicht aber R und $G_{\alpha\dot{\beta}}$. Da die niedrigsten Komponenten von R und $G_{\alpha\dot{\beta}}$ nicht weggeeeicht werden können, müssen somit zwei neue Komponentenfelder eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
R(z)|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= -\frac{1}{6}M(x), \\
G_a(z)|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= -\frac{1}{3}b_a(x).
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Nun wurden alle wichtigen Größen eingeführt, die das Multiplett der Supergravitation beinhaltet. In $N = 1$ besteht das Supermultiplett aus einem Graviton mit Spin 2 und einem Gravitino mit Spin $\frac{3}{2}$. Das komplette Set dynamischer Felder des Supermultipletts lautet M , b , ψ und e . Sie sorgen für eine gleiche Anzahl an bosonischen und fermionischen Freiheitsgraden.

Eine für das Folgende wichtige Größe wurde jedoch noch nicht eingeführt: die Krümmung. Der Krümmungstensor wird über den Zusammenhang definiert:

$$R = d\varphi + \varphi\varphi. \tag{3.2.13}$$

Wie gewöhnlich handelt es sich dabei um eine 2-Form:

$$\begin{aligned}
R_A{}^B &= \frac{1}{2}dz^M dz^N R_{NMA}{}^B \\
&= \frac{1}{2}E^C E^D R_{DCA}{}^B \\
&= dz^M dz^N \partial_N \varphi_{MA}{}^B + dz^M \varphi_{MA}{}^C dz^N \varphi_{NC}{}^B,
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

wobei für die Koeffizientenfunktion $R_{NMA}{}^B$ gilt:

$$\begin{aligned}
R_{NMA}{}^B &= \partial_N \varphi_{MA}{}^B - (-)^{nm} \partial_M \varphi_{NA}{}^B + (-)^{n(m+a+c)} \varphi_{MA}{}^C \varphi_{NC}{}^B \\
&\quad - (-)^{m(a+c)} \varphi_{NA}{}^C \varphi_{MC}{}^B.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Die $\theta = \bar{\theta} = 0$ –Komponente von (3.2.15) lautet:

$$\begin{aligned} R_{nma}{}^b &= \partial_n \omega_{ma}{}^b - \partial_m \omega_{na}{}^b + \omega_{ma}{}^c \omega_{nc}{}^b - \omega_{na}{}^c \omega_{mc}{}^b \\ &\equiv \mathcal{R}_{nma}{}^b. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Gleichung (3.2.16) definiert die Riemann-Krümmung $\mathcal{R}_{nma}{}^b$ in Abhängigkeit des Zusammenhangs $\omega_{ma}{}^b$.

3.3 Chirale Superfelder auf gekrümmter Raumzeit

Analog zu Abschnitt 2.4.2 erfüllt das chirale Superfeld ϕ auf gekrümmter Raumzeit eine kovariante Bedingung:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \phi = 0. \quad (3.3.1)$$

Diese kovariante Ableitung stellt eine Verallgemeinerung des vorher eingeführten \mathcal{D} auf die gekrümmte Raumzeit dar und reduziert sich bei flacher Raumzeit wieder darauf.

Wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt wurde, beinhalten chirale Felder drei Komponentenfelder. Diese könnten wieder aus der Entwicklung nach θ und $\bar{\theta}$ gewonnen werden, doch dies ist hier unpraktisch, da eine Koordinatenabhängigkeit vorliegt. Somit werden die Komponenten eines chiralen Superfeldes auf gekrümmter Raumzeit wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A &= \phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \\ \chi_{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_{\alpha} \phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}, \\ F &= -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha} \phi|_{\theta=\bar{\theta}=0}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Um nun eine Entwicklung des chiralen Superfeldes ϕ zu bekommen, die die Komponentenfelder enthält, werden neue Variablen Θ benötigt:

$$\phi = A(x) + \sqrt{2} \Theta^{\alpha} \chi_{\alpha}(x) + \Theta^{\alpha} \Theta_{\alpha} F(x). \quad (3.3.3)$$

3.4 Lagrangedichte chiraler Superfelder auf gekrümmter Raumzeit

Die allgemeinste renormierbare Lagrangedichte im flachen Raum wurde bereits in Abschnitt 2.6 eingeführt. Dieser Ausdruck (2.6.3) soll nun auf den gekrümmten Raum erweitert werden. Da die Erweiterung von (2.6.3) sich wieder im Limes der verschwindenden Krümmung auf

selbiges reduziert, spricht man auch vom minimalen chiralen Modell der Supergravitation. Der erste Schritt auf dem Weg zu einer Lagrangedichte im gekrümmten Raum ist die invariante Wirkung des Multipletts der Supergravitation:

$$\mathcal{L}_{SG} = -\frac{6}{\kappa^2} \int d^2\Theta \mathcal{E} R + h.c. \quad (3.4.1)$$

Hier taucht zum ersten Mal die Kopplungskonstante der Gravitation auf, $\kappa^2 = 8\pi G_N$. Sie verschwindet auch gleich wieder, da sie im Folgenden immer gleich eins gesetzt wird. Weiterhin erscheint in (3.4.1) die chirale Dichte \mathcal{E} und die Superraum-Krümmung R . Ihre Θ -Entwicklungen werden benötigt und sollen aus diesem Grund nun angegeben werden:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E} &= e(1 + i\Theta\sigma^a\bar{\psi}_a - \Theta\Theta(\bar{M} + \bar{\psi}_a\bar{\sigma}^{ab}\bar{\psi}_b)), \\ R &= -\frac{1}{6}\left(M + \Theta(\sigma^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} - i\sigma^a\bar{\psi}_a M + i\psi_a b^a) + \Theta\Theta\left(-\frac{1}{2}\mathcal{R} + i\bar{\psi}^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} + \frac{2}{3}M\bar{M}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \frac{1}{3}b^a b_a - ie_a{}^m \mathcal{D}_m b^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}M - \frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\bar{\psi}_c b^c + \frac{1}{8}\varepsilon^{abcd}(\bar{\psi}_a\bar{\sigma}_b\psi_{cd} + \psi_a\sigma_b\bar{\psi}_{cd})\right)\right). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Setzt man (3.4.2) in (3.4.1) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SG} &= -\frac{1}{2}e\mathcal{R} - \frac{1}{3}e\bar{M}M + \frac{1}{3}eb^a b_a \\ &\quad + \frac{1}{2}e\varepsilon^{klmn}(\bar{\psi}_k\bar{\sigma}_l\tilde{\mathcal{D}}_m\psi_n - \psi_k\sigma_l\tilde{\mathcal{D}}_m\bar{\psi}_n), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

für die kovariante Ableitung $\tilde{\mathcal{D}}_m\psi_n$ gilt:

$$\tilde{\mathcal{D}}_n\psi_m^\alpha = \partial_n\psi_m^\alpha + \psi_m^\beta\omega_{n\beta}^\alpha. \quad (3.4.4)$$

In (3.4.3) befindet sich die Einsteinsche Wirkung für das Gravitationsfeld und die Rarita-Schwinger Wirkung für das Spin- $\frac{3}{2}$ Gravitino.

Nun wird zu (2.6.5) Gleichung (3.4.1) hinzugefügt und anschließend werden folgende Substitutionen vorgenommen:

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \Theta, \\ d^2\theta &\rightarrow d^2\Theta 2\mathcal{E}, \\ -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} &\rightarrow -\frac{1}{4}(\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8R). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Somit lautet die Lagrangedichte auf gekrümmter Raumzeit für das minimale chirale Modell:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^2\Theta 2\mathcal{E} \left(-3R - \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8R)\bar{\phi}_i\phi_i - \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8R)(c_i\phi_i + \bar{c}_i\bar{\phi}_i) \right. \\ &\quad \left. + d + \lambda_i\phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \right) + h.c. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Hier ist erwähnenswert, dass diese allgemeine Lagrangedichte nicht mehr renormierbar ist. Die hier neu auftauchenden c - und d -Terme verschwinden bei der Reduktion auf (2.6.3) im flachen Raum.

In Gleichung (3.4.6) befinden sich zwei unterschiedliche Arten von Termen: zum einen erscheinen dort solche, die den chiralen Projektor $(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - 8R)$ beinhalten und zum anderen erscheinen Terme ohne diesen. Beide stellen eine Verallgemeinerung auf gekrümmte Raumzeiten dar, wobei der erstgenannte Term für die chirale kinetische Energie und der zweite für das Superpotential steht. Die kinetische Energie im Superraum ist somit $\Omega(\phi, \bar{\phi}) = \bar{\phi}_i\phi_i + c_i\phi_i + \bar{c}_i\bar{\phi}_i - 3$ und das Superpotential $W(\phi) = d + \lambda_i\phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k$. Die Lagrangedichte kann folglich in einer sehr kompakten Form angegeben werden:

$$\mathcal{L} = \int d^2\Theta 2\mathcal{E} \left(-\frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - 8R)\Omega(\phi, \bar{\phi}) + W(\phi) \right) + h.c. \quad (3.4.7)$$

Die Komponentenschreibweise des gesamten Ausdrucks findet der interessierte Leser in [8]. Sie wird hier nicht vollständig benötigt und aus diesem Grund nur partiell angegeben. Ein für diese Arbeit sehr wichtiger Term, das skalare Potential \mathcal{V} , befindet sich jedoch in der Komponentenschreibweise der Lagrangedichte und soll hier hervorgehoben werden:

$$\mathcal{V}(A_i, \bar{A}_j) = \exp(K)[K^{i\bar{j}}(\mathcal{D}_i W)(\mathcal{D}_{\bar{j}} \bar{W}) - 3\bar{W}W]. \quad (3.4.8)$$

Hier wurden folgende Abkürzungen benutzt:

$$\mathcal{D}_i W := W_i + K_i W, \quad W_i := \frac{\partial W}{\partial A_i}, \quad K^{i\bar{j}} := K_{i\bar{j}}^{-1}. \quad (3.4.9)$$

Hier weist das Kähler Potential noch eine spezielle Form auf:

$$K(A, \bar{A}) = -3 \log(-\Omega/3), \quad \text{wobei} \quad \Omega(A, \bar{A}) = \bar{A}_i A_i + c_i(\bar{A}_i + A_i) - 3 \quad (3.4.10)$$

gilt. Im nächsten Abschnitt wird sich dies ändern und es werden allgemeine Kähler Potentiale betrachtet.

Das skalare Potential, dessen Erwartungswert im Falle lokaler Supersymmetrie nicht automatisch positiv semidefinit ist, im Gegensatz zur globalen Supersymmetrie: anhand von (2.6.7) wurde deutlich, dass dort das skalare Potential immer positiv semidefinit ist. Dies hat zur Folge, dass der Zusammenhang zwischen skalarem Potential und Supersymmetriebrechung subtiler als zuvor ist. Anhand von (3.4.8) wird deutlich, dass die Supersymmetrie spontan gebrochen werden kann, auch wenn die Vakuumenergie Null ist.

3.5 Einordnung in die Kähler Geometrie

In der $N = 1$ Supergravitation fordert die lokale Supersymmetrie, dass die skalaren Felder eine Kähler Mannigfaltigkeit aufspannen. Aus diesem Grund findet in diesem Abschnitt eine

Einordnung in die Kähler Geometrie statt. Ein kurze Zusammenfassung derselben befindet sich im Anhang C und eine ausführliche Betrachtung ist in [4], das unter anderem auf [5], [6] und [7] beruht, zu finden.

Die oben gefundene Lagrangedichte (2.8.15) soll auf eine gekrümmte Raumzeit verallgemeinert werden. Der wesentliche Unterschied zu Abschnitt 3.4 besteht darin, dass das Kähler Potential und das Superpotential beliebige Funktionen von $(\phi, \bar{\phi})$ bzw. (ϕ) sind. Es gilt jedoch weiterhin die Einschränkung, dass K eine reelle Funktion ist. In Anlehnung an Abschnitt 3.4 nimmt hier die Lagrangedichte folgende Gestalt an:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^2\Theta 2\mathcal{E} \left[\frac{3}{8} (\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8R) \exp \left\{ -\frac{\kappa^2}{3} K(\phi, \bar{\phi}) \right\} + \kappa^2 W(\phi) \right] + h.c. \quad (3.5.1)$$

Die hier auftauchende Exponentialfunktion ist durch (3.4.10) motiviert, da dort $K(A, \bar{A}) = -3 \log(-\Omega/3)$ gefunden wurde. $\Omega(A, \bar{A})$ ist die in Abschnitt 3.4 eingeführte kinetische Energie des Superraums.

Analog zu der Vorgehensweise in Abschnitt 3.4 kann die allgemeine Lagrangedichte in Abhängigkeit des Kähler Potentials und seiner Ableitungen gefunden werden. Die Hilfsfelder wurden bereits wieder mit Hilfe der Eulerschen Bewegungsgleichungen eliminiert.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} e\mathcal{R} - eg_{i\bar{j}} \partial_m A^i \partial^m \bar{A}^j - ieg_{i\bar{j}} \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \chi^i + e\varepsilon^{klmn} \bar{\psi}_k \bar{\sigma}_l \tilde{\mathcal{D}}_m \psi_n \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{2} eg_{i\bar{j}} \partial_n \bar{A}^j \chi^i \sigma^m \bar{\sigma}^n \psi_m - \frac{1}{2} \sqrt{2} eg_{i\bar{j}} \partial_n A^i \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m \sigma^n \bar{\psi}_m \\ & + \frac{1}{4} eg_{i\bar{j}} [i\varepsilon^{klmn} \psi_k \sigma_l \bar{\psi}_m + \psi_m \sigma^n \bar{\psi}^m] \chi^i \sigma_n \bar{\chi}^j - \frac{1}{8} e [g_{i\bar{j}} g_{k\bar{l}} - 2R_{i\bar{j}k\bar{l}}] \chi^i \chi^k \bar{\chi}^j \bar{\chi}^l \\ & - e \exp(K/2) \left\{ \bar{W} \psi_a \sigma^{ab} \psi_b + W \bar{\psi}_a \bar{\sigma}^{ab} \bar{\psi}_b + \frac{i}{2} \sqrt{2} \mathcal{D}_i W \chi^i \sigma^a \bar{\psi}_a + \frac{i}{2} \sqrt{2} \bar{\mathcal{D}}_{\bar{i}} \bar{W} \bar{\chi}^{\bar{i}} \bar{\sigma}^a \psi_a \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W \chi^i \chi^j + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}_{\bar{i}} \bar{\mathcal{D}}_{\bar{j}} \bar{W} \bar{\chi}^{\bar{i}} \bar{\chi}^{\bar{j}} \right\} - e \exp\{K\} [g^{i\bar{j}} (\mathcal{D}_i W) (\bar{\mathcal{D}}_{\bar{j}} \bar{W}) - 3\bar{W}W]. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Die hier auftretenden kovarianten Ableitungen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m \chi^i &= \partial_m \chi^i + \chi^i \omega_m + \Gamma_{jk}^i \partial_m A^j \chi^k - \frac{1}{4} (K_j \partial_m A^j - K_{\bar{j}} \partial_m \bar{A}^{\bar{j}}) \chi^i, \\ \tilde{\mathcal{D}}_m \psi_n &= \partial_m \psi_n + \psi_n \omega_m + \frac{1}{4} (K_j \partial_m A^j - K_{\bar{j}} \partial_m \bar{A}^{\bar{j}}) \psi_n, \\ \mathcal{D}_i W &= W_i + K_i W, \\ \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j W &= W_{ij} + K_{ij} W + K_i \mathcal{D}_j W + K_j \mathcal{D}_i W - K_i K_j W - \Gamma_{ij}^k \mathcal{D}_k W. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Diese kovarianten Ableitungen enthalten unter anderem einen $U(1)$ Zusammenhang, der proportional zu $\text{Im}(K_j \partial_m A^j)$ ist [8].

Hier wurde die Definition der Christoffel-Symbole (C.2.1) benutzt. Ferner wurde die Definition der Riemann-Krümmung (C.2.3) eingesetzt, um zu Ergebnis (3.5.2) zu gelangen.

3.5.1 Invarianz unter Kähler Transformationen

Die Invarianz der allgemeinen Lagrangedichte (3.5.2) auf gekrümmter Raumzeit unter Supertransformationen ist gesichert, da sie von einem Superraum-Formalismus abgeleitet wurde. Die Frage nach einer Invarianz unter Kähler Transformationen bleibt jedoch noch offen. Um dies zu überprüfen, wird die schon oben erwähnte Kähler Transformation betrachtet:

$$K(A, \bar{A}) \rightarrow K(A, \bar{A}) + F(A) + \bar{F}(\bar{A}) \quad (3.5.4)$$

und in (3.5.2) eingesetzt. Es stellt sich heraus, dass die Metrik, die Christoffel Symbole und die Krümmungsterme allesamt invariant sind. Dies gilt jedoch nicht für die folgenden kovarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m \chi^i &\rightarrow \mathcal{D}_m \chi^i - \frac{i}{2} \partial_m (\text{Im } F) \chi^i, \\ \tilde{\mathcal{D}}_m \psi_n &\rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_m \psi_n + \frac{i}{2} \partial_m (\text{Im } F) \psi_n. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Damit auch diese Terme invariant werden, muss eine lokale Weyl-Rotation der Spinorfelder durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \chi^i &\rightarrow \exp \left\{ + \frac{i}{2} (\text{Im } F) \right\} \chi^i, \\ \psi_n &\rightarrow \exp \left\{ - \frac{i}{2} (\text{Im } F) \right\} \psi_n. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Kombiniert man nun diese beiden Transformationen, so sind die kinetischen Terme in (3.5.2) invariant. Diese Kähler-Weyl-Invarianz stellt sicher, dass die kinetischen Terme bei Neudefinition der Felder, die Kähler Transformationen des Kähler Potentials nach sich ziehen, unverändert bleiben.

Die Terme in (3.5.2), die das Superpotential beinhalten, sind nicht automatisch invariant unter Kähler-Weyl Transformationen. Hier muss separat transformiert werden. Wie zum Beispiel bei dem skalaren Potential (3.4.8). Dieses ist nur dann invariant, wenn

$$W \rightarrow \exp\{-F\} W \quad (3.5.7)$$

und daraus folgend

$$\mathcal{D}_i W \rightarrow \exp\{-F\} \mathcal{D}_i W \quad (3.5.8)$$

benutzt wird.

Unter den genannten Transformationen ist die gesamte Lagrangedichte (3.5.2) invariant. Wird (3.5.6) und (3.5.7) von der mathematischen Seite betrachtet, so wird deutlich, dass

die Spinoren und das Superpotential keine gewöhnlichen Funktionen, sondern holomorphe Schnitte in einem geeigneten komplexen Geradenbündel über einer Kähler Mannigfaltigkeit sind. Wenn eine nicht-triviale Kähler Mannigfaltigkeit vorliegt, ist die Kähler-Weyl Invarianz für die Lagrangedichte notwendig, um global wohldefiniert zu sein.

Um (3.5.1) auf eine andere Form zu bringen, benötigt man sogenannte Super-Weyl Transformationen. Diese werden in [8] genauer ausgeführt. Hier wird die Eichfixierung $-6\Sigma = \log W$ benutzt und das Superpotential zu $W = 1$ geeicht. Dies ist allerdings nur dann erlaubt, wenn der Vakuumerwartungswert $\langle W \rangle$ ungleich null ist. Die Komponentendarstellung der Lagrangedichte (3.5.2) und auch das darin enthaltene skalare Potential werden somit vereinfacht. Das skalare Potential hat damit die endgültige Form erreicht, mit der im Folgenden gearbeitet wird:

$$\mathcal{V} = \exp\{K\}[g^{i\bar{j}}K_iK_{\bar{j}} - 3]. \quad (3.5.9)$$

Das skalare Potential \mathcal{V} ist extremal, wenn die Bedingung $\langle \partial\mathcal{V}/\partial A^i \rangle = 0$ erfüllt ist. Die Supersymmetrie wird hier spontan gebrochen, wenn $\langle D_i W \rangle \neq 0$ gilt. Dies ist eine Folge der Supergravitations-Transformation für den Spinor χ^i , da

$$\langle \delta\chi^i \rangle \sim g^{i\bar{j}}\langle D_{\bar{j}}\bar{W} \rangle \neq 0 \quad (3.5.10)$$

gilt. In dem Fall der Symmetriebrechung wird χ^i durch eine Konstante ersetzt und spielt so die Rolle des Goldstone Fermions.

Da \mathcal{V} in der hier zu diskutierenden Form (3.5.9) nur noch vom Kähler Potential, beziehungsweise dessen Ableitungen abhängt, muss dieses entsprechend bestimmt werden, damit der Vakuumerwartungswert des skalaren Potentials positiv semidefinit ist. Dieser Aufgabe werden wir uns im folgenden Kapitel zuwenden. Im Falle eines positiven Vakuumerwartungswertes spricht man von einem de Sitter-Vakuum und im Falle von $\langle \mathcal{V} \rangle = 0$ von einem Minkowski-Vakuum. Im letztgenannten Fall dient die Gravitino Masse als Ordnungsparameter für die spontane Brechung der Supersymmetrie. Man interessiert sich besonders für den Fall $\langle \mathcal{V} \rangle > 0$, da dann auch die kosmologische Konstante Λ einen positiven Wert annimmt. Diese wird durch den Wert des skalaren Potentials am globalen Minimum bestimmt. Eine positive kosmologische Konstante stimmt mit neuesten kosmologischen Messungen überein, wie beispielsweise in [9] gezeigt wurde.

Ist der Vakuumerwartungswert des skalaren Potentials kleiner null, so spricht man von einem Anti-de Sitter-Vakuum. Da jedoch dieses eine negative kosmologische Konstante zur Folge hat, wird dieser Fall hier nicht betrachtet.

Kapitel 4

Bestimmung des Kähler Potentials

4.1 Bedingung für positiv semidefinite skalare Potentiale

In diesem Abschnitt werden kurz die Ergebnisse aus [22] mit der im Wesentlichen gleichen Notation zusammengefasst. Dies erleichtert dem interessierten Leser, Details nachzuschlagen. Diese Ergebnisse befassen sich mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung, um das skalare Potential positiv semidefinit werden zu lassen. Das skalare Potential \mathcal{V} lautet

$$\mathcal{V} = e^g [g^i (g^{-1})_i^j g_j - 3], \quad (4.1.1)$$

wobei für die Funktion

$$g = K(z, \bar{z}) + \log W(z) + \log \bar{W}(\bar{z}) \quad (4.1.2)$$

gilt. Da es sich bei (4.1.2) um eine Kähler Transformation handelt, bleibt die Geometrie erhalten und die Lagrangedichte invariant. Es handelt sich somit bei g um ein verallgemeinertes Kähler Potential, das in der Lagrangedichte das Kähler Potential K ersetzt. In der Veröffentlichung [22] wird nun eine kleine Manipulation vorgenommen, da das verallgemeinerte Potential g nicht geeignet ist, um Positivitätseigenschaften des skalaren Potentials zu diskutieren. Es wird eine Funktion ϕ eingeführt, die durch

$$g = -3 \log \phi \quad (4.1.3)$$

definiert ist. Diese Funktion definiert nun wiederum eine hermitesche Matrix $\varphi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}^j}$. Es stellt sich heraus, dass die notwendige und hinreichende Bedingung für ein positiv semidefinites skalares Potential

$$\det(-\varphi) \leq 0 \quad (4.1.4)$$

ist. Der Fall des Gleichheitszeichens sorgt für ein verschwindendes und der des Kleinerzeichens für ein positives skalares Potential. Für den Beweis dieses Ergebnisses sei der interessierte Leser auf [22] verwiesen.

4.2 No-Scale Bedingung

Nachdem nun die notwendige und hinreichende Bedingung für ein positiv semidefinites skalares Potential vorgestellt wurde, wollen wir in diesem Kapitel die explizite Form der Kähler Potentiale, die in einem Fall für ein verschwindendes und im anderen Fall für ein positives skalares Potential sorgen, untersuchen. Zuerst werden wir die Lösung des eindimensionalen Falls aus [10] nachrechnen, wobei hier von einem allgemeinen Kähler Potential ausgegangen wird, das nur von einem chiralen Superfeld abhängt. Wir beschränken uns anschließend im n -dimensionalen auf den Fall, dass das Kähler Potential nur vom Realteil des chiralen Superfeldes, also von $\frac{1}{2}(\phi^i + \bar{\phi}^i)$, abhängt.

Die Lagrangedichte, aus der das skalare Potential \mathcal{V} hervorgeht, wurde in Abschnitt 3.5 vorgestellt. In diesem Kapitel benutzen wir die Einschränkungen aus Abschnitt 3.5.1, somit gilt in diesem sowie im nächsten Kapitel immer für das Superpotential $W = 1$. Aus diesem Grund hängt das skalare Potential nur noch vom Kähler Potential, beziehungsweise dessen Ableitungen ab. Es ist uns bereits aus Abschnitt 3.5.1 bekannt und wird hier erneut angegeben, um die Problemstellung besser erläutern zu können:

$$\mathcal{V} = \exp\{K\}[g^{i\bar{j}}K_iK_{\bar{j}} - 3], \quad \text{mit } i, j = 1, \dots, n. \quad (4.2.1)$$

In (4.2.1) ist zu beachten, dass oben stehende Indizes das Inverse kennzeichnen.

Um nun einen positiv semidefiniten Wert für das skalare Potential zu erhalten, muss nur der Term innerhalb der eckigen Klammer betrachtet werden, da die Exponentialfunktion stets positive Werte annimmt. Diese Bedingung an den genannten Term ist die sogenannte No-Scale Bedingung und lautet wie folgt:

$$g^{i\bar{j}}K_iK_{\bar{j}} - 3 \geq 0. \quad (4.2.2)$$

Unsere Aufgabe in den nächsten Abschnitten besteht folglich darin, das Kähler Potential so zu finden, dass Bedingung (4.2.2) erfüllt ist. Zunächst wird in Abschnitt 4.3 für beliebige Kähler Potentiale $K(\phi, \bar{\phi})$ die Bedingung (4.2.2) in einer Dimension für $\mathcal{V} = 0$ gelöst. Dieses Ergebnis wurde bereits in [10] gefunden und wird hier nachgerechnet, um daran mit dem n -dimensionalen Fall anzuknüpfen. Um zu dieser Lösung zu gelangen, wird das skalare Potential (4.2.1) auf eine andere Form gebracht, mit deren Hilfe das Kähler Potential leichter berechnet werden kann.

In den darauf folgenden Abschnitten hängt das Kähler Potential nur noch vom Realteil des chiralen Superfeldes ab und dessen explizite Form wird anhand von (4.2.2) berechnet. Da es sich jedoch bei Bedingung (4.2.2) um eine nicht-lineare partielle Differentialungleichung zweiter Ordnung handelt und keine Standardverfahren zur Lösung derselben existieren, wird im Fall $K(\phi^i + \bar{\phi}^i)$ die Legendre-Transformation benutzt, um das Problem zu vereinfachen. Diese wurde zur Erinnerung in Anhang E kurz zusammengefasst. In Abschnitt 4.4.1 wird die Legendre-Transformation auf den hier vorliegenden Fall angewendet. Zur besseren Nachvollziehbarkeit wird die Bedingung zuerst im eindimensionalen Fall in Abschnitt 4.4.2 gelöst.

Dies geschieht mittels Integration für den Fall $\mathcal{V} \geq 0$. In Abschnitt 4.4.3 wird die legendretransformierte Bedingung (4.2.2) im n -dimensionalen Fall betrachtet und anhand dessen die explizite Form des Kähler Potentials für $\mathcal{V} = 0$ berechnet.

4.3 Lösung für beliebige Kähler Potentiale $K(\phi, \bar{\phi})$

4.3.1 Der eindimensionale Fall

Da wir uns hier im Eindimensionalen befinden, führen wir eine pragmatischere Notation ein. In diesem Kapitel verwenden wir folgende Abkürzungen:

$$K_\phi := \frac{\partial K}{\partial \phi}, \quad K_{\bar{\phi}} := \frac{\partial K}{\partial \bar{\phi}}, \quad \text{und} \quad g_{\phi\bar{\phi}} := \frac{\partial K}{\partial \phi \partial \bar{\phi}}. \quad (4.3.1)$$

Stehen die Indizes oben, so ist weiterhin das Inverse gemeint und $g_{\phi\bar{\phi}}$ stellt weiterhin die Kähler Metrik dar.

Wir haben das skalare Potential \mathcal{V} bisher nur in der Form (4.2.1) kennengelernt. Es kann jedoch zu

$$\mathcal{V} = 9e^{\frac{4}{3}K} g^{\phi\bar{\phi}} \partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K} \quad (4.3.2)$$

umgeformt werden. Diese Umformung wurde in [23], [24], [2] und [1] gefunden. Zur Überprüfung von (4.3.2) berechnen wir $\partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K}$ explizit:

$$\begin{aligned} \partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K} &= \partial_\phi \left(-\frac{1}{3} K_{\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{3} \right)^2 K_{\bar{\phi}} K_\phi e^{-\frac{1}{3}K} - \frac{1}{3} g_{\phi\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Nun multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $e^K g^{\phi\bar{\phi}}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} e^K g^{\phi\bar{\phi}} \partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K} &= e^K g^{\phi\bar{\phi}} \left(-\frac{1}{3} \right)^2 K_{\bar{\phi}} K_\phi e^{-\frac{1}{3}K} - e^K \frac{1}{3} g^{\phi\bar{\phi}} g_{\phi\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K} \\ &= \frac{1}{9} e^{-\frac{1}{3}K} e^K (g^{\phi\bar{\phi}} K_{\bar{\phi}} K_\phi - 3d). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Hier wurde benutzt, dass das inverse, abgeleitete Kähler Potential $g^{\phi\bar{\phi}}$, also die Kähler Metrik, multipliziert mit $g_{\phi\bar{\phi}}$ die Dimension d ergibt. Da hier der eindimensionale Fall betrachtet wird, ist $d = 1$. Der letzte Schritt zum neuen skalaren Potential besteht darin, die Faktoren $\frac{1}{9} e^{-\frac{1}{3}K}$ auf die andere Seite der Gleichung zu bringen. Diese stellen Vorfaktoren des gewohnten Ausdrucks (4.2.1) für \mathcal{V} dar. Ist dies geschehen, so erhalten wir (4.3.2) auf der linken Seite der Gleichung (4.3.4).

Nun setzen wir (4.3.2) gleich null, um herauszufinden, welche Kähler Potentiale für ein verschwindendes skalares Potential sorgen. Zu diesem Zweck betrachten wir nur noch

$$0 = \partial_\phi \partial_{\bar{\phi}} e^{-\frac{1}{3}K}, \quad (4.3.5)$$

da $9e^{\frac{4}{3}K} g^{\phi\bar{\phi}} \neq 0$ gilt. Der Grund liegt darin, dass die Exponentialfunktion nur positive Werte liefert und das invertierte, zweifach abgeleitete Kähler Potential $g^{\phi\bar{\phi}}$ von Null verschieden sein muss, da es sonst nicht definiert ist.

Gleichung (4.3.5) stellt eine zweidimensionale Laplace-Gleichung dar und wurde bereits in [10] gelöst. Die Lösung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung ist im Allgemeinen eine harmonische Funktion $u(x, y)$, mit $x, y \in \mathbb{R}$ (siehe zum Beispiel [25]). Wir substituieren zum besseren Verständnis

$$u := e^{-\frac{1}{3}K} \quad (4.3.6)$$

und benutzen Folgendes: man kann zeigen, dass jede reelle harmonische Funktion u auf einer einfach zusammenhängenden offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ der Realteil einer in G holomorphen Funktion f ist. Dieser Realteil, die Funktion u , lässt sich nun durch die Summe aus der holomorphen Funktion f und ihrem komplex konjugierten \bar{f} darstellen. Somit kann (4.3.6) zu

$$e^{-\frac{1}{3}K} = f(\phi) + \bar{f}(\bar{\phi}) \quad (4.3.7)$$

umgeschrieben und nach K aufgelöst werden. Folglich wird Gleichung (4.3.5) von Kähler Potentialen der Form

$$K = -3 \ln(f(\phi) + \bar{f}(\bar{\phi})) \quad (4.3.8)$$

erfüllt, wie auch in [10] herausgefunden wurde.

4.4 Lösung für $K(\phi + \bar{\phi})$

4.4.1 Legendre-Transformation

In diesem Abschnitt befinden wir uns in n Dimensionen und betrachten am Ende den eindimensionalen Limes. Um Bedingung (4.2.2) umzuformen und anschließend lösen zu können, unternehmen wir eine Legendre-Transformation. Zur Erinnerung ist diese im Anhang E allgemein zusammengefasst. Das Kähler Potential K sei nun eine Funktion $K(\phi^1 + \bar{\phi}^1, \dots, \phi^n + \bar{\phi}^n)$ und die Variablen $(\phi^i + \bar{\phi}^i)$ stellen hier die aktiven Variablen dar. Die passiven Variablen sind durch den Imaginärteil des chiralen Feldes $(\phi^i - \bar{\phi}^i)$ gegeben und werden hier grundsätzlich weggelassen, da sie in den folgenden Rechnungen keine Rolle spielen. Um die Legendre-Transformation anwenden zu können, setzen wir voraus, dass K legendretransformierbar ist, das heißt, dass $\frac{\partial^2 K}{\partial(\phi^i + \bar{\phi}^i)^2} \neq 0$ gelten muss. Dies ist notwendig, da sonst die neuen Variablen L^i Konstanten wären. Die neuen Koordinaten L^i sind durch

$$L^i := \frac{\partial K}{\partial(\phi^i + \bar{\phi}^i)} \quad (4.4.1)$$

definiert. Das legendretransformierte Kähler Potential lautet dann $\tilde{K}(L^1, \dots, L^n)$ und wird durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$\tilde{K}(L^1, \dots, L^n) = K(\phi^1 + \bar{\phi}^1, \dots, \phi^n + \bar{\phi}^n) - \sum_{m=1}^n (\phi^m + \bar{\phi}^m) \frac{\partial K}{\partial(\phi^m + \bar{\phi}^m)}. \quad (4.4.2)$$

Nun bilden wir das totale (exakte) Differential von \tilde{K} :

$$d\tilde{K} = P(L^1, \dots, L^n)dL^1 + Q(L^1, \dots, L^n)dL^2 + \dots + W(L^1, \dots, L^n)dL^n. \quad (4.4.3)$$

Die Funktionen P, Q, \dots, W werden durch (4.4.2) spezifiziert. Hier ist zu beachten, dass dieses Differential nur dann total ist, wenn das Integral über $d\tilde{K}$ wegunabhängig ist. Dies ist erfüllt, da folgendes gilt:

$$d\tilde{K} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{K}}{\partial L^i} dL^i. \quad (4.4.4)$$

Um anschließend einen Koeffizientenvergleich machen zu können, bilden wir das totale Differential mit Hilfe von Gleichung (4.4.2). Hier lautet es:

$$\begin{aligned} d\tilde{K} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial K}{\partial(\phi^i + \bar{\phi}^i)} d(\phi^i + \bar{\phi}^i) - \sum_{i=1}^n (d(\phi^i + \bar{\phi}^i)L^i + (\phi^i + \bar{\phi}^i)dL^i) \\ &= \sum_{i=1}^n (L^i d(\phi^i + \bar{\phi}^i) - L^i d(\phi^i + \bar{\phi}^i) - (\phi^i + \bar{\phi}^i)dL^i) \\ &= - \sum_{i=1}^n (\phi^i + \bar{\phi}^i)dL^i. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Führen wir nun einen Koeffizientenvergleich von (4.4.4) und (4.4.5) durch, so stellen wir fest, dass folgende Relation gilt:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial L^i} = -(\phi^i + \bar{\phi}^i), \quad (4.4.6)$$

wobei ab jetzt folgende Abkürzungen benutzt werden:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial L^i} := \tilde{K}_i, \quad \frac{\partial \tilde{K}}{\partial L^j} := \tilde{K}_j, \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial L^i \partial L^j} := \tilde{K}_{ij}. \quad (4.4.7)$$

Somit erhält man für (4.4.2):

$$\tilde{K}(L^1, \dots, L^n) = K(\phi^1 + \bar{\phi}^1, \dots, \phi^n + \bar{\phi}^n) - \sum_{m=1}^n (\phi^m + \bar{\phi}^m) L^m. \quad (4.4.8)$$

Nun können wir die No-Scale Bedingung (4.2.2) für das legendretransformierte Kähler Potential formulieren und betrachten jeden der drei Terme einzeln. Der mittlere Term aus (4.2.2) läßt sich mit Hilfe der Legendre-Transformation zu

$$\begin{aligned} K_i &= \partial_{\phi^i} (\tilde{K} + \sum_{m=1}^n (\phi^m + \bar{\phi}^m) L^m) \\ &= \partial_{\phi^i} \tilde{K} + L^i + \sum_{m=1}^n (\phi^m + \bar{\phi}^m) \partial_{\phi^i} L^m \\ &= \partial_{\phi^i} \tilde{K} + L^i - \sum_{m=1}^n \partial_{L^m} \tilde{K} \partial_{\phi^i} L^m \\ &= \partial_{\phi^i} \tilde{K} + L^i - \partial_{\phi^i} \tilde{K} \\ &= L^i \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

umformen. In dieser Rechnung wurde in der dritten Zeile Gleichung (4.4.6) ausgenutzt. In der vorletzten Zeile kam die Kettenregel zur Anwendung. Hier gilt:

$$\partial_{\phi^i} \tilde{K} = \sum_{m=1}^n \partial_{L^m} \tilde{K} \partial_{\phi^i} L^m. \quad (4.4.10)$$

Analog zu (4.4.9) erhält man für den dritten Term aus (4.2.2)

$$K_{\bar{j}} = L^j. \quad (4.4.11)$$

Um den ersten Term aus Gleichung (4.2.2) zu berechnen, muss man bedenken, dass es sich hier um das Inverse von $g_{i\bar{j}}$ handelt. Zunächst benötigen wir somit $g_{i\bar{j}}$ selbst:

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial L^i}{\partial \bar{\phi}^j} \quad (4.4.12)$$

Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, wurde Gleichung (4.4.9) partiell nach $\bar{\phi}^j$ abgeleitet. Da die partiellen Ableitungen von $g_{i\bar{j}}$ nach dem Schwarzschen Lemma vertauschen, könnten wir auch (4.4.11) partiell nach ϕ^i ableiten, um $g_{i\bar{j}}$ zu erhalten. In diesem Fall bekommen wir für

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial L^j}{\partial \phi^i}. \quad (4.4.13)$$

Die Tatsache, dass K nur vom Realteil abhängt und (4.4.13) hat zur Folge, dass die Ableitungen

$$\frac{\partial L^i}{\partial \bar{\phi}^j} = \frac{\partial L^i}{\partial \phi^j} = \frac{\partial L^i}{\partial(\phi^j + \bar{\phi}^j)} \quad (4.4.14)$$

identisch sind. Um nun das Inverse von $g_{i\bar{j}}$ anzugeben, benutzen wir (4.4.12), (4.4.13), (4.4.14) und

$$\frac{\partial L^i}{\partial(\phi^j + \bar{\phi}^j)} \frac{\partial(\phi^j + \bar{\phi}^j)}{\partial L^k} = \delta_k^i. \quad (4.4.15)$$

Das Inverse von $g_{i\bar{j}}$ lautet somit

$$g^{i\bar{j}} = \frac{\partial(\phi^j + \bar{\phi}^j)}{\partial L^i}. \quad (4.4.16)$$

Dies muss noch durch das legendretransformierte Kähler Potential ausgedrückt werden. Zu diesem Zweck leiten wir Gleichung (4.4.6) partiell nach L^j ab und erhalten:

$$\frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial L^i \partial L^j} = -\frac{\partial(\phi^i + \bar{\phi}^i)}{\partial L^j}. \quad (4.4.17)$$

Aufgrund von (4.4.16) und (4.4.17) gilt somit

$$g_{i\bar{j}}^{-1} = -\tilde{K}_{i\bar{j}}. \quad (4.4.18)$$

Bemerkenswerter Weise sind demnach die Elemente der inversen Kähler Metrik gleich den negativen Elementen der legendretransformierten Kähler Metrik. Nun setzen wir (4.4.9), (4.4.11) und (4.4.18) in Bedingung (4.2.2) ein und erhalten:

$$K_i g^{i\bar{j}} K_{\bar{j}} = -L^i \tilde{K}_{ij} L^j \quad \text{mit } i, j = 1, \dots, n. \quad (4.4.19)$$

Somit lautet schließlich die legendretransformierte Bedingung (4.2.2):

$$L^i \tilde{K}_{ij} L^j \geq -3 \quad (4.4.20)$$

Betrachten wir nun den eindimensionalen Limes von (4.4.20) ($i = j = 1$) so lautet die legendretransformierte No-Scale Bedingung im eindimensionalen Fall für $K(\phi + \bar{\phi})$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial L^2} L^2 \geq -3. \quad (4.4.21)$$

4.4.2 Lösung für $\mathcal{V} \geq 0$ in einer Dimension

Um (4.4.21) zu lösen, bringen wir L^2 auf die andere Seite und integrieren anschließend zweimal über L . Nach der ersten Integration mit der Integrationskonstanten $c_1 \in \mathbb{R}$ erhalten wir:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial L} \geq \frac{3}{L} + c_1. \quad (4.4.22)$$

Nun muss eine weitere Integration nach L durchgeführt werden. Das Ergebnis dieser Integration lautet:

$$\tilde{K} \geq 3 \ln L + c_1 L + c_2, \quad (4.4.23)$$

wobei auch hier für die zweite Integrationskonstante $c_2 \in \mathbb{R}$ gilt. Wir müssen jetzt nur noch \tilde{K} zurücktransformieren, um das Kähler Potential zu erhalten.

Die Rücktransformation bei Legendre-Transformationen ist eindeutig (siehe beispielsweise [26]). Weiterhin muss $\frac{\partial^2 K}{\partial(\phi + \bar{\phi})^2} \neq 0$ gelten, da sonst die neue Koordinate L keine Variable, sondern eine Konstante ist. Dies setzen wir in unserem Fall voraus. Für die Rücktransformation wird nun die übliche Legendre-Transformation benutzt, die im Anhang E zur Erinnerung kurz zusammengefasst wurde. Das Kähler Potential lässt sich somit schreiben als:

$$K(\phi + \bar{\phi}) \equiv \tilde{K}(L) - \frac{\partial \tilde{K}}{\partial L} L. \quad (4.4.24)$$

Nun wird (4.4.23) in (4.4.24) eingesetzt:

$$\begin{aligned} K(\phi + \bar{\phi}) &\geq 3 \ln L + c_1 L + c_2 - \frac{3}{L} L - c_1 L \\ &\geq 3 \ln L + c_3, \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

wobei $c_3 := c_2 - 3$ ist.

Wir nutzen aus, dass $(\phi + \bar{\phi}) = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial L}$ gilt und setzen dies mit (4.4.22) gleich. Anschließend stellen wir es nach L um. Das Ergebnis dieser Rechnung lautet

$$L \geq -\frac{3}{(\phi + \bar{\phi}) + c_1} \quad (4.4.26)$$

und wird nun in (4.4.25) eingesetzt:

$$\begin{aligned} K(\phi + \bar{\phi}) &\geq 3 \ln \left(-\frac{3}{\phi + \bar{\phi} + c_1} \right) + c_3 \\ &\geq 3 \ln 3 - 3 \ln \left(-(\phi + \bar{\phi} + c_1) \right) + c_3. \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

An dieser Stelle wird deutlich, dass an das Argument des Logarithmus eine Einschränkung vorliegt, da dieser nur für positive Argumente definiert ist. Somit muss für

$$\phi + \bar{\phi} + c_1 < 0 \quad (4.4.28)$$

gelten. Mit dieser Einschränkung erhalten wir für das Kähler Potential im Falle eines verschwindenden skalaren Potentials:

$$K(\phi + \bar{\phi}) = -3 \ln(\phi + \bar{\phi} + c_1) + c_4, \quad (4.4.29)$$

wobei die Abkürzung $c_4 := 3 \ln 3 + c_3$ eingeführt wurde. Dieses Kähler Potential sorgt, wie beispielsweise in Kapitel 3 erwähnt, für eine verschwindende kosmologische Konstante und somit für eine flache Raumzeit, zum Beispiel den Minkowskiraum.

Ein positives skalares Potential wird von Kähler Potentialen der Form

$$K(\phi + \bar{\phi}) > -3 \ln(\phi + \bar{\phi} + c_1) + c_4 \quad (4.4.30)$$

herbeigeführt. Viele mögliche Lösungen sind denkbar, damit $K(\phi + \bar{\phi})$ Gleichung (4.4.30) erfüllt. Beispielsweise kann die rechte Seite mit einer Konstanten c multipliziert werden, wobei $c > 1$ gelten muss. Eine positive, reelle Funktion erfüllt den gleichen Zweck.

Natürlich kann auch etwas Positives addiert werden, dies kann eine Konstante oder eine Funktion sein. Somit ist die Klasse der Kähler Potentiale, die für ein positives skalares Potential und damit zum Beispiel für einen de Sitter-Raum sorgen, sehr groß.

4.4.3 Lösung für $\mathcal{V} = 0$ in n Dimensionen

Um die partielle Differentialgleichung (4.4.20) lösen zu können, machen wir den Ansatz

$$L^i \tilde{K}_i = 3 + f(L^1, \dots, L^n), \quad (4.4.31)$$

und stellen dabei an die Funktion $f(L^1, \dots, L^n)$ die Bedingung, mindestens einmal stetig differenzierbar zu sein. Um zu verifizieren, dass dieser Ansatz Bedingung (4.4.20) erfüllt,

bilden wir die partielle Ableitung nach L^j . Diese wird im Folgenden mit ∂_j abgekürzt, da keine Verwechslungsgefahr mit der Ableitung nach $\bar{\phi}_j$ besteht:

$$\begin{aligned}\partial_j(L^i \tilde{K}_i) &= \tilde{K}_j + L^i \tilde{K}_{ij} \\ &= \partial_j f(L^1, \dots, L^n).\end{aligned}\tag{4.4.32}$$

Im nächsten Schritt multiplizieren wir (4.4.32) mit L^j und erhalten

$$\begin{aligned}L^j \partial_j(L^i \tilde{K}_i) &= L^j \tilde{K}_j + L^i L^j \tilde{K}_{ij} \\ &= L^j \partial_j f(L^1, \dots, L^n).\end{aligned}\tag{4.4.33}$$

Nun bringen wir $L^j \tilde{K}_j$ auf die andere Seite der Gleichung und setzen anschließend Ansatz (4.4.31) für $L^j \tilde{K}_j$ ein:

$$\begin{aligned}L^i L^j \tilde{K}_{ij} &= L^j \partial_j f(L^1, \dots, L^n) - L^j \tilde{K}_j \\ &= L^j \partial_j f(L^1, \dots, L^n) - 3 - f(L^1, \dots, L^n).\end{aligned}\tag{4.4.34}$$

Da wir es nun geschafft haben, die linke Seite von (4.4.20) zu reproduzieren, können wir Gleichung (4.4.34) und (4.4.20) unter Verwendung des Gleichheitsfalles gleichsetzen

$$L^j \partial_j f(L^1, \dots, L^n) - 3 - f(L^1, \dots, L^n) = -3\tag{4.4.35}$$

und erhalten eine Bedingung an die Funktion $f(L^1, \dots, L^n)$. Diese lautet

$$L^j \partial_j f(L^1, \dots, L^n) = f(L^1, \dots, L^n).\tag{4.4.36}$$

Diese Differentialgleichung wird von allen homogenen Polynomen ersten Grades gelöst. Sie sind von der Form

$$f(L^1, \dots, L^n) = a_i L^i.\tag{4.4.37}$$

Nun setzen wir (4.4.36) in (4.4.31) ein und erhalten:

$$L^i \tilde{K}_i = 3 + L^j \partial_j f(L^1, \dots, L^n).\tag{4.4.38}$$

Schließlich bekommen wir eine Differentialgleichung für \tilde{K} , die einfacher zu lösen ist als (4.4.20):

$$L^j \partial_j(\tilde{K} - f) = 3.\tag{4.4.39}$$

Folgende Funktion löst die Differentialgleichung (4.4.39):

$$\tilde{K} = f + 3 \ln(\sigma) + \varphi\left(\frac{L^2}{L^1}, \dots, \frac{L^n}{L^1}\right). \quad (4.4.40)$$

Hier ist zu beachten, dass φ eine beliebige, mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion von $(\frac{L^2}{L^1}, \dots, \frac{L^n}{L^1})$ und $\sigma(L^1, \dots, L^n)$ ein homogenes Polynom ersten Grades sein muss. Somit gilt für die Funktion σ

$$L^j \partial_j \sigma = \sigma \quad (4.4.41)$$

und daraus folgend

$$\sigma(L^1, \dots, L^n) = b_i L^i. \quad (4.4.42)$$

Setzt man (4.4.40) zurück in (4.4.39) ein, so sieht man, dass für die Funktion φ folgendes gelten muss:

$$\begin{aligned} L^j \partial_j (3 \ln(\sigma) + \varphi) &= 3, \\ 3 \frac{1}{\sigma} L^j \partial_j \sigma + L^j \partial_j \varphi &= 3, \\ L^j \partial_j \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

Diese Gleichung werden wir im nächsten Abschnitt benutzen.

Das legendretransformierte Kähler Potential im n -dimensionalen Fall, welches für ein verschwindendes skalares Potential sorgt, lautet somit:

$$\tilde{K} = f + 3 \ln(\sigma) + \varphi\left(\frac{L^2}{L^1}, \dots, \frac{L^n}{L^1}\right), \quad (4.4.44)$$

wobei f und σ homogene Polynome ersten Grades sind und die Funktion φ durch Gleichung (4.4.43) bestimmt ist. Gleichung (4.4.44) stellt alle legendretransformierten Kähler Potentiale bezüglich unseres Ansatzes dar, die für ein verschwindendes skalares Potential sorgen. Da die Rücktransformation eindeutig ist, haben wir somit auch alle Kähler Potential gefunden, die nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängen und für ein verschwindendes skalares Potential sorgen.

Wir bilden nun den eindimensionalen Limes von (4.4.44), um zu überprüfen, ob dieses Ergebnis mit dem legendretransformierten Kähler Potential (4.4.23) in Abschnitt 4.4.2 übereinstimmt. Im eindimensionalen Fall lautet Gleichung (4.4.44):

$$\tilde{K} = a_1 L^1 + 3 \ln(b_1 L^1) + \varphi. \quad (4.4.45)$$

Mit $b_1 = 1$ und φ als Konstante erhalten wir Gleichung (4.4.23) zurück.

4.4.4 Rücktransformation

Um nun das ursprüngliche Kähler Potential zurück zu erhalten, benutzen wir die bereits anfangs verwendete Formel für die Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
K &= \tilde{K} - \sum_{i=1}^n L^i \partial_i(\tilde{K}) \\
&= f + 3 \ln(\sigma) + \varphi - \sum_{i=1}^n L^i \partial_i(f + 3 \ln(\sigma) + \varphi) \\
&= f + 3 \ln(\sigma) + \varphi - \sum_{i=1}^n (L^i \partial_i f + L^i \partial_i 3 \ln(\sigma) + L^i \partial_i \varphi). \tag{4.4.46}
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Gleichungen (4.4.36), (4.4.41) sowie (4.4.43) und erhalten

$$K = 3 \ln(\sigma) + \varphi - 3. \tag{4.4.47}$$

Hier hängen jedoch noch σ und φ von den legendretransformierten Variablen ab. Um dies zu ändern, muss eine Formel für L^i in Abhängigkeit von ϕ^i angegeben werden. Zu diesem Zweck verwenden wir (4.4.6) und berechnen dies explizit:

$$-\frac{\partial \tilde{K}}{\partial L^i} = -\partial_i f - 3\partial_i(\ln \sigma) - \partial_i \varphi \tag{4.4.48}$$

Nun multiplizieren wir mit L^i und nutzen wieder (4.4.36), (4.4.43) und (4.4.41) aus. Wir erhalten dann

$$-f - 3 = L^i(\phi^i + \bar{\phi}^i). \tag{4.4.49}$$

Schließlich setzen wir noch (4.4.37) anstelle von f ein und bringen diesen Term auf die andere Seite. Nach Ausklammern von L^i lautet die Gleichung

$$L^i(\phi^i + \bar{\phi}^i + a_i) = -3 \tag{4.4.50}$$

und wir erhalten den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Variablen $(\phi^i + \bar{\phi}^i)$ und den legendretransformierten Variablen L^i . Somit kann mit Hilfe von (4.4.47) und (4.4.50) das ursprüngliche Kähler Potential bestimmt werden.

Betrachtet man den eindimensionalen Limes von (4.4.50), so lautet der Zusammenhang zwischen $\phi^i + \bar{\phi}^i$ und L^i :

$$L = -\frac{3}{\phi + \bar{\phi} + a_1}. \tag{4.4.51}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in Abschnitt 4.4.2 gefundenen Zusammenhang (4.4.26) überein und bestätigt somit obige Lösung, wenn $a_1 = c_1$ gilt.

Die Rücktransformation des legendretransformierten Kähler Potentials im n -dimensionalen Fall ist somit nur durchführbar, wenn die Funktionen f , σ und φ explizit gegeben sind.

Kapitel 5

Special Kähler Geometrie

5.1 Einführung

Special Kähler Mannigfaltigkeiten sind Kähler Mannigfaltigkeiten mit zusätzlichen Strukturen. Neben den in Anhang C erläuterten Eigenschaften weisen sie zusätzliche Bedingungen auf, die in Anhang D zusammengefasst sind. Die Special Kähler Geometrie wird über die Kopplungen der skalaren Felder in einer lokalen Supersymmetrie definiert und spielt bei der $N = 2$ Supergravitation eine Rolle. Die lokalen Zwangsbedingungen an die Special Kähler Geometrie, die von der Invarianz der Lagrangedichte unter $N = 2$ Supersymmetrie impliziert werden, wurden in 'speziellen' Koordinaten von de Wit, Lauwers und van Proeyen abgeleitet und in [13] veröffentlicht. Die gesamte Lagrangedichte wird durch ein holomorphes Präpotential $F(\phi)$ festgelegt, mit dessen Hilfe das Kähler Potential und somit auch die Special Kähler Mannigfaltigkeit bestimmt werden kann. Wir benutzen hier die Form des Kähler Potentials aus [13] und berechnen anhand dessen die holomorphe Funktion $F(\phi)$ im eindimensionalen Fall. Zu diesem Zweck benutzen wir das Ergebnis für das Kähler Potential aus Abschnitt 4.4.2, das nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt. Es existiert jedoch noch ein zweiter Weg, um das Präpotential in diesem Fall zu bestimmen. Dieser befindet sich im Anhang B, kommt ohne das Ergebnis aus Abschnitt 4.4.2 aus und zeigt somit die Lösung des Präpotentials für das Kähler Potential $K(\phi, \bar{\phi})$.

5.2 Bestimmung des Präpotentials in einer Dimension

Das Kähler Potential hat folgende Gestalt [13]:

$$K(\phi, \bar{\phi}) = -\ln(Y(\phi, \bar{\phi})), \quad (5.2.1)$$

wobei $Y(\phi, \bar{\phi})$ wie folgt definiert ist:

$$Y(\phi, \bar{\phi}) = 2(F(\phi) + \bar{F}(\bar{\phi})) - (\phi + \bar{\phi})(F_\phi(\phi) + \bar{F}_{\bar{\phi}}(\bar{\phi})). \quad (5.2.2)$$

Die Funktion $F(\phi)$ ist holomorph und stellt das oben erwähnte Präpotential dar. Ein Index an der Funktion bedeutet auch hier wieder die partielle Ableitung nach demselben.

Nun wollen wir untersuchen, welche Funktionen F dafür sorgen, dass das skalare Potential \mathcal{V} , welches wir in den vorherigen Kapiteln bereits eingeführt und diskutiert haben, den Wert Null annimmt. Zu diesem Zweck benutzen wir Ergebnis (4.4.29), das nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt, und setzen es mit (5.2.1) gleich:

$$-\ln(\phi + \bar{\phi} + c_1)^3 + c_4 = -\ln(2F + 2\bar{F} - (\phi + \bar{\phi})(F_\phi + \bar{F}_{\bar{\phi}})). \quad (5.2.3)$$

Nachdem die Exponentialfunktion auf diesen Ausdruck angewendet wurde, erhalten wir:

$$(\phi + \bar{\phi} + c_1)^3 e^{-c_4} = 2F + 2\bar{F} - (\phi + \bar{\phi})(F_\phi + \bar{F}_{\bar{\phi}}). \quad (5.2.4)$$

Nun wählen wir einen Polynomansatz für F , da sich jede holomorphe Funktion als Polynom darstellen lässt. F , \bar{F} und ihre Ableitungen,

$$\begin{aligned} F &= a_m \phi^m & \text{und} & & F_\phi &= a_m m \phi^{m-1}, \\ \bar{F} &= \bar{a}_m \bar{\phi}^m & \text{und} & & \bar{F}_{\bar{\phi}} &= \bar{a}_m m \bar{\phi}^{m-1}, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

setzen wir nun in (5.2.4) ein und klammern auf der rechten Seite der Gleichung geschickt um:

$$\begin{aligned} (\phi + \bar{\phi} + c_1)^3 e^{-c_4} &= 2a_m \phi^m + 2\bar{a}_m \bar{\phi}^m - (\phi + \bar{\phi})(a_m m \phi^{m-1} + \bar{a}_m m \bar{\phi}^{m-1}) \\ &= 2a_m \phi^m + 2\bar{a}_m \bar{\phi}^m - m a_m \phi^m - m \bar{a}_m \bar{\phi}^m \\ &\quad - \phi \bar{a}_m m \bar{\phi}^{m-1} - \bar{\phi} a_m m \phi^{m-1} \\ &= (2 - m)(a_m \phi^m + \bar{a}_m \bar{\phi}^m) - m(\bar{a}_m \phi \bar{\phi}^{m-1} + a_m \bar{\phi} \phi^{m-1}). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Im nächsten Schritt widmen wir uns der linken Seite der Gleichung und multiplizieren diese aus. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} (2 - m)(a_m \phi^m + \bar{a}_m \bar{\phi}^m) - m(\bar{a}_m \phi \bar{\phi}^{m-1} + a_m \bar{\phi} \phi^{m-1}) &= \\ e^{-c_4}(\phi^3 + 3\phi^2 \bar{\phi} + 3\bar{\phi}^2 \phi + 6\phi \bar{\phi} c_1 + 3c_1 \phi^2 + 3c_1 \bar{\phi}^2 + 3\phi c_1^2 + 3\bar{\phi} c_1^2 + c_1^3 + \bar{\phi}^3). \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

An dieser Stelle kann die Potenz m bestimmt werden, um Gleichung (5.2.7) zu erfüllen. Es bietet sich an, die Potenzen auf der rechten Seite mit denen der linken Seite zu vergleichen. Daraus schließen wir, dass die Potenzreihe bis $m = 3$ betrachtet werden muss, da höhere Terme offensichtlich verschwinden. Um diesen Vergleich einfacher durchführen zu können, schreiben wir die rechte Seite bis zur Potenz $m = 3$ explizit hin:

$$\begin{aligned} (2 - m)(a_m \phi^m + \bar{a}_m \bar{\phi}^m) - m(\bar{a}_m \phi \bar{\phi}^{m-1} + a_m \bar{\phi} \phi^{m-1}) &= \\ = 2(a_0 \phi^0 + \bar{a}_0 \bar{\phi}^0) + (2 - 1)(a_1 \phi^1 + \bar{a}_1 \bar{\phi}^1) - 1(\bar{a}_1 \phi \bar{\phi}^0 + a_1 \bar{\phi} \phi^0) \\ - 2(\bar{a}_2 \phi \bar{\phi}^1 + a_2 \bar{\phi} \phi^1) + (2 - 3)(a_3 \phi^3 + \bar{a}_3 \bar{\phi}^3) - 3(\bar{a}_3 \phi \bar{\phi}^2 + a_3 \bar{\phi} \phi^2). \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Nun können wir den Koeffizientenvergleich für die linke Seite von (5.2.7) und (5.2.8) durchführen. Wir erhalten daraus Forderungen an die Vorfaktoren a_m und \bar{a}_m :

$$\begin{aligned} e^{-c_4} \phi^3 &= -a_3 \phi^3 \Rightarrow e^{-c_4} = -a_3, \\ e^{-c_4} \bar{\phi}^3 &= -\bar{a}_3 \bar{\phi}^3 \Rightarrow e^{-c_4} = -\bar{a}_3, \\ 3e^{-c_4} \phi^2 \bar{\phi} &= -3a_3 \bar{\phi} \phi^2 \Rightarrow e^{-c_4} = -a_3, \\ 3e^{-c_4} \bar{\phi}^2 \phi &= -3\bar{a}_3 \phi \bar{\phi}^2 \Rightarrow e^{-c_4} = -\bar{a}_3. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Diese Bedingungen können nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn der Vorfaktor a_3 reell ist. Ferner vergleichen wir

$$\begin{aligned} (2-2)a_2 \phi^2 &= 3c_1 \phi^2 \Rightarrow c_1 = 0, \\ (2-2)a_2 \bar{\phi}^2 &= 3c_1 \bar{\phi}^2 \Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

und erhalten die Bedingung $c_1 = 0$. Nun vergleichen wir Terme der Ordnung ϕ^0 , beziehungsweise $\bar{\phi}^0$:

$$2a_0 + 2\bar{a}_0 = e^{-c_4} c_1^3 \Rightarrow a_0 = -\bar{a}_0. \quad (5.2.11)$$

Wir erhalten diese Bedingung, da $c_1 = 0$ gilt. Als nächstes betrachten wir Terme, die ϕ , beziehungsweise $\bar{\phi}$ beinhalten:

$$(a_1 - \bar{a}_1)\phi + (\bar{a}_1 - a_1)\bar{\phi} = e^{-c_4} 3c_1^2 \phi + e^{-c_4} 3c_1^2 \bar{\phi} \Rightarrow a_1 = \bar{a}_1. \quad (5.2.12)$$

Auch hier kam die Bedingung $c_1 = 0$ zum Einsatz. Als letztes vergleichen wir noch Terme der Ordnung $\phi\bar{\phi}$:

$$-2(\bar{a}_2 + a_2)\phi\bar{\phi} = e^{-c_4} 6c_1 \phi\bar{\phi} \Rightarrow a_2 = -\bar{a}_2. \quad (5.2.13)$$

Wir fassen die Bedingungen an die Koeffizienten a_m zusammen, um einen besseren Überblick zu bekommen:

- (i) $a_0 = -\bar{a}_0$,
- (ii) $a_1 = \bar{a}_1$,
- (iii) $a_2 = -\bar{a}_2$,
- (iv) $a_3 = \bar{a}_3 = e^{-c_4}$.

Diese bestimmen die Form des Präpotentials F :

$$F(\phi) = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2 + e^{-c_4}\phi^3 \quad \text{bzw.} \quad \bar{F}(\bar{\phi}) = -a_0 + a_1\bar{\phi} - a_2\bar{\phi}^2 + e^{-c_4}\bar{\phi}^3. \quad (5.2.14)$$

Da in Abschnitt 4.4.2 die Konstante c_4 als Abkürzung verwendet wurde, wollen wir diese nun in (5.2.14) einsetzen. Sie lautet $c_4 = 3 \ln 3 + c_3$, wobei für $c_3 = c_2 - 3$ gilt. c_2 kann nicht weiter aufgeschlüsselt werden, da es sich hier um eine Integrationskonstante handelt. Das Präpotential lautet dann

$$F(\phi) = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2 + \frac{1}{27}e^{-c_2+3}\phi^3 \quad (5.2.15)$$

beziehungsweise

$$\bar{F}(\bar{\phi}) = -a_0 + a_1\bar{\phi} - a_2\bar{\phi}^2 + \frac{1}{27}e^{-c_2+3}\bar{\phi}^3.$$

Da die Koeffizienten $a_m \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar sind, haben wir mit (5.2.15) eine ganze Klasse von Präpotentialen erhalten, die für ein verschwindendes skalares Potential sorgen. Damit diese Präpotentiale der speziellen Form des Kähler Potentials (5.2.1) genügen, müssen die Bedingungen (5.2) erfüllt sein. Dies wurde für Kähler Potentiale berechnet, die nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängen.

Zur Überprüfung von Ergebnis (5.2.15) bestimmen wir das Kähler Potential mit Hilfe von (5.2.1). Hier wird die Ableitung von (5.2.15) benötigt. Diese lautet:

$$F_\phi = a_1 + 2a_2\phi + \frac{1}{9}e^{-c_2+3}\phi^2 \quad \text{und} \quad \bar{F}_{\bar{\phi}} = a_1 - 2a_2\bar{\phi} + \frac{1}{9}e^{-c_2+3}\bar{\phi}^2. \quad (5.2.16)$$

Nun setzen wir zur Überprüfung (5.2.16) und (5.2.15) in (5.2.2) ein und erhalten so mit Hilfe von (5.2.1) das Kähler Potential:

$$\begin{aligned} K(\phi, \bar{\phi}) &= -\ln(\mu\phi^3 + \mu\bar{\phi}^3 + 3\mu\bar{\phi}^2\phi + 3\mu\phi^2\bar{\phi}), \\ &= -\ln(\mu(\phi + \bar{\phi})^3) \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

wobei die Abkürzung $\mu := -\frac{1}{27}e^{-c_2+3}$ eingeführt wurde. Dieses Kähler Potential stimmt mit (4.4.29) überein, da wir dies am Anfang dieses Kapitels benutzt haben, um das Präpotential zu bestimmen. Somit haben wir Ergebnis (5.2.15) verifiziert.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir die Form des Kähler Potentials $K(\phi, \bar{\phi})$ im Fall der $N = 1$ Supergravitation für ein verschwindendes skalares Potential betrachtet. Zunächst wurde dies im eindimensionalen Fall nachgerechnet, um anschließend die Form des Kähler Potentials, das vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt, im eindimensionalen Fall für ein positiv semidefinites skalares Potential und im n -dimensionalen Fall für ein verschwindendes skalares Potential zu bestimmen. Da die an das skalare Potential gestellte No-Scale Bedingung (4.2.1) nur schwer zu lösen ist, nahmen wir eine Legendre-Transformation vor. Diese vereinfachte, aufgrund der Abhängigkeit des Kähler Potentials vom Realteil eines chiralen Feldes, diese Bedingung und führte so zur Lösung. Im eindimensionalen Fall erhielten wir ein Kähler Potential, das negativ logarithmisch vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt. Im n -dimensionalen Fall hängt das legendretransformierte Kähler Potential von der Summe aus einem homogenen Polynom ersten Grades, dem Logarithmus eines homogenen Polynoms ersten Grades und einer dritten Funktion mit gewissen Eigenschaften ab. Leider ist bisher nicht bekannt, wie die Rücktransformation des legendretransformierten Kähler Potentials im Allgemeinen durchgeführt werden kann. Die hierbei möglichen Funktionen, von denen das legendretransformierte Kähler Potential abhängt, sind zu allgemein, um Aussagen über die Möglichkeit einer Rücktransformation treffen zu können. Es müssten weitere Einschränkungen gefunden werden, um diese Funktionen genauer zu spezifizieren.

Für weiterführende Arbeiten wäre die Diskussion des Kähler Potentials $K(\phi, \bar{\phi})$, das nicht nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt, im Fall eines positiv semidefiniten Potentials in n Dimensionen interessant. Eine spezielle Lösung dieser Problematik existiert bereits und ist in [10] zu finden. Die Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe bestehen in der Form des skalaren Potentials (4.2.1), da dieses eine partielle Differentialungleichung zweiter Ordnung darstellt. Leider existieren keine Standardverfahren zur Lösung solcher Differentialungleichungen und diese Tatsache macht die Lösungsfindung sehr schwierig und ist damit ein nichttriviales Problem, das auch für Mathematiker interessant sein könnte.

In Kapitel 5 betrachteten wir die spezielle Form des Kähler Potentials in Abhängigkeit des Präpotentials, das zu bestimmen war. Wir benutzten die in Abschnitt 4.4.2 gefundene Form des Kähler Potentials, das nur vom Realteil eines chiralen Feldes abhängt, und setzten es mit der speziellen Form des Kähler Potentials aus der Special Kähler Geometrie gleich. Mit Hilfe

eines Polynomansatzes für das holomorphe Präpotential konnte so dessen Form bestimmt werden. Es zeigte sich, dass das Präpotential ein Polynom dritten Grades sein muss, um für ein verschwindendes skalares Potential zu sorgen. An die Koeffizienten des Polynoms müssen jedoch einschränkende Bedingungen gestellt werden, da nur so eine Erfüllung der No-Scale Bedingung gegeben ist.

Für weiterführende Arbeiten wäre die Bestimmung des Präpotentials in n Dimensionen interessant. Problematisch ist hier die Tatsache, dass das legendretransformierte Kähler Potential nur bedingt zurücktransformiert werden kann. Um dieses Problem zu umgehen, könnte die spezielle Form des Kähler Potentials in die No-Scale Bedingung eingesetzt werden, um auf diese Weise das holomorphe Präpotential zu bestimmen. In diesem Fall ergibt sich jedoch wieder die bereits oben genannte Schwierigkeit der partiellen Differentialgleichung.

Anhang A

Konventionen und Rechenregeln

A.1 Konventionen

In dieser Arbeit halten wir uns im Wesentlichen an die Notation von [8]. Somit werden folgende Konventionen benutzt:

- Minkowski-Metrik:

$$\eta_{mm} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (\text{A.1.1})$$

- ε -Tensoren:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = 1, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1, \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{0123} = -1. \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

- γ -Matrizen:

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.3})$$

A.2 Heben und Senken der Indizes

Hier sollen kurz die üblichen Regeln zum Heben und Senken der Indizes aufgelistet werden:

$$\begin{aligned} \psi^\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta = -\psi_\beta \varepsilon^{\beta\alpha}, \\ \psi_\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta} \psi^\beta = -\psi^\beta \varepsilon_{\beta\alpha}, \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} = -\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} = -\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

A.3 Grassmann-Parameter

Die Grassmann-Parameter bilden die fermionischen Koordinaten des Superraums und sind antikommutierend: $\theta^1\theta^2 = -\theta^2\theta^1$. Für die $\bar{\theta}$ s gilt dies analog. Auf Grund dieser Eigenschaft verschwinden Ausdrücke, die mehr als zwei θ s beziehungsweise $\bar{\theta}$ s beinhalten. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\theta^\alpha\theta^\beta &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta & \text{und} & & \theta_\alpha\theta_\beta &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta, \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} & \text{sowie} & & \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}.\end{aligned}\tag{A.3.1}$$

Die Differentiation ist wie folgt definiert:

$$\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\theta^\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad \text{und} \quad \frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}.\tag{A.3.2}$$

Die Integration wird folgendermaßen durchgeführt:

$$\int d\theta_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad \text{und} \quad \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}},\tag{A.3.3}$$

ferner gilt:

$$\int d^2\theta\theta^2 = 1 \quad \text{und} \quad \int d^2\bar{\theta}\bar{\theta}^2 = 1.\tag{A.3.4}$$

Bemerkenswert ist noch, dass die Integration und die Differentiation bezüglich Grassmann-Parametern äquivalent ist. Außerdem projiziert die Integration (oder Differentiation) über die Grassmann-Parameter die höchste Komponente der Taylor-Entwicklung heraus. Das erkennt man an folgenden Eigenschaften: mit

$$\int d\theta_1d\theta_2\theta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \{d\theta_\alpha, d\theta_\beta\} = \{d\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0\tag{A.3.5}$$

folgt

$$\int d\theta_1d\theta_2\theta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \int d\theta_1d\theta_2\theta_1\theta_2 = -1.\tag{A.3.6}$$

Somit erhalten wir für das Integral einer Funktion $f(\theta_1, \theta_2)$:

$$\int d\theta_1d\theta_2f(\theta_1, \theta_2) = \int d\theta_1d\theta_2[f^{(0)} + f^{(1)}\theta_1 + f^{(2)}\theta_2 + f^{(3)}\theta_1\theta_2] = -f^{(3)}.\tag{A.3.7}$$

Wir sehen, dass durch die Integration über θ_1 und θ_2 die höchste Komponente von $f(\theta_1, \theta_2)$, die $\theta_1\theta_2$ -Komponente, herausprojiziert wurde.

Anhang B

Ergänzung zu Kapitel 5

B.1 Zweiter Lösungsweg im eindimensionalen Fall

Um das Präpotential im Fall $\mathcal{V} = 0$ zu bestimmen, gehen wir von der Differentialgleichung (4.2.2) aus und berechnen zunächst deren einzelne Bestandteile. Zu diesem Zweck bilden wir die Ableitung des Kähler Potentials nach ϕ , $\bar{\phi}$ und $\phi\bar{\phi}$ und setzen diese anschließend zu der bekannten Bedingung zusammen:

$$\begin{aligned} K_\phi &= -\frac{Y_\phi}{Y}, \\ K_{\bar{\phi}} &= -\frac{Y_{\bar{\phi}}}{Y}, \\ K_{\phi\bar{\phi}}^{-1} &= \frac{Y^2}{Y_{\bar{\phi}}Y_\phi - YY_{\phi\bar{\phi}}}. \end{aligned} \tag{B.1.1}$$

Setzen wir diese Ergebnisse nun in die Bedingung (4.2.2) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 3 &= -\frac{Y_\phi}{Y} \frac{Y^2}{Y_{\bar{\phi}}Y_\phi - YY_{\phi\bar{\phi}}} \left(-\frac{Y_{\bar{\phi}}}{Y}\right) \\ Y_\phi Y_{\bar{\phi}} &= 3Y_\phi Y_{\bar{\phi}} - 3YY_{\phi\bar{\phi}} \\ \Rightarrow 2Y_\phi Y_{\bar{\phi}} &= 3YY_{\phi\bar{\phi}}. \end{aligned} \tag{B.1.2}$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} Y_\phi &= F_\phi - \phi F_{\phi\phi} - \bar{F}_{\bar{\phi}} - \bar{\phi} F_{\phi\phi}, \\ Y_{\bar{\phi}} &= \bar{F}_{\bar{\phi}} - \bar{\phi} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - F_\phi - \phi \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}, \\ Y_{\phi\bar{\phi}} &= -\bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - F_{\phi\phi} \end{aligned} \tag{B.1.3}$$

lassen sich nun beide Seiten von Gleichung (B.1.2) berechnen:

$$2Y_\phi Y_{\bar{\phi}} = 2(F_\phi - \phi F_{\phi\phi} - \bar{F}_{\bar{\phi}} - \bar{\phi} F_{\phi\phi})(\bar{F}_{\bar{\phi}} - \bar{\phi} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - F_\phi - \phi \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}) \quad (\text{B.1.4})$$

$$= -2(F_\phi - \bar{F}_{\bar{\phi}})^2 + 2\bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} F_{\phi\phi} (\phi + \bar{\phi})^2 + 2(F_\phi F_{\phi\phi} + \bar{F}_{\bar{\phi}} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} F_\phi - \bar{F}_{\bar{\phi}} F_{\phi\phi})(\phi + \bar{\phi}),$$

$$3Y_\phi Y_{\bar{\phi}} = 3(2F_\phi + 2\bar{F}_{\bar{\phi}} - \phi F_\phi - \phi \bar{F}_{\bar{\phi}} - \bar{\phi} F_\phi - \bar{\phi} \bar{F}_{\bar{\phi}})(-\bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - F_{\phi\phi}) \quad (\text{B.1.5})$$

$$= 3(\phi + \bar{\phi})(F_\phi F_{\phi\phi} + \bar{F}_{\bar{\phi}} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} + F_\phi \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} + \bar{F}_{\bar{\phi}} F_{\phi\phi}) - 6(F_{\phi\phi} - \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}})(F + \bar{F}).$$

Nun setzen wir beide Ergebnisse aus (B.1.4) gleich und erhalten nach kurzem Zusammenfassen

$$0 = 2(F_\phi - \bar{F}_{\bar{\phi}})^2 + (\phi + \bar{\phi})(F_\phi F_{\phi\phi} + \bar{F}_{\bar{\phi}} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} + 5F_\phi \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} + 5\bar{F}_{\bar{\phi}} F_{\phi\phi}) \\ - 2F_{\phi\phi} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\phi + \bar{\phi})^2 - 6(F_{\phi\phi} + \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}})(F + \bar{F}). \quad (\text{B.1.6})$$

Da F eine holomorphe Funktion ist, zerfällt (B.1.6) in ein Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen:

$$0 = 2F_\phi^2 + F_\phi F_{\phi\phi} \phi - 6F_{\phi\phi} F, \quad (\text{B.1.7})$$

$$0 = 2\bar{F}_{\bar{\phi}}^2 + \bar{F}_{\bar{\phi}} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \bar{\phi} - 6\bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \bar{F}, \quad (\text{B.1.8})$$

$$0 = -4F_\phi \bar{F}_{\bar{\phi}} + F_\phi F_{\phi\phi} \bar{\phi} + \bar{F}_{\bar{\phi}} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \phi - 2F_{\phi\phi} \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} (\phi + \bar{\phi})^2 \\ + (\phi + \bar{\phi})(5F_\phi \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} + 5\bar{F}_{\bar{\phi}} F_{\phi\phi}) - 6F_{\phi\phi} \bar{F} - 6\bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} F. \quad (\text{B.1.9})$$

Um nun das gesamte Gleichungssystem zu lösen, machen wir einen Ansatz für F , beziehungsweise \bar{F} . Es handelt sich wie schon in Kapitel 5 um einen Polynomansatz, da F eine holomorphe Funktion ist:

$$F(\phi) = a_m \phi^m \quad \text{bzw.} \quad \bar{F}(\bar{\phi}) = \bar{a}_m \bar{\phi}^m. \quad (\text{B.1.10})$$

Um diesen Ansatz nun in (B.1.6) einsetzen zu können, benötigen wir noch folgende Bausteine:

$$F_\phi = a_m m \phi^{m-1} \quad \text{und} \quad F_{\phi\phi} = a_m m(m-1) \phi^{m-2}, \quad (\text{B.1.11}) \\ \bar{F}_{\bar{\phi}} = \bar{a}_m m \bar{\phi}^{m-1} \quad \text{sowie} \quad \bar{F}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = \bar{a}_m m(m-1) \bar{\phi}^{m-2}.$$

Im Folgenden benutzen wir wieder die Einsteinsche Summenkonvention und lassen die Summenzeichen weg. Nun setzen wir obige Terme in (B.1.6) ein:

$$0 = 2(a_m m \phi^{m-1} - \bar{a}_m m \bar{\phi}^{m-1})^2 + (\phi + \bar{\phi})(a_m m \phi^{m-1} a_m m(m-1) \phi^{m-2} \\ + \bar{a}_m m \bar{\phi}^{m-1} \bar{a}_m m(m-1) \bar{\phi}^{m-2} \\ + 5a_m m \phi^{m-1} \bar{a}_m m(m-1) \bar{\phi}^{m-2} + 5\bar{a}_m m \bar{\phi}^{m-1} a_m m(m-1) \phi^{m-2}) \\ - 2a_m m(m-1) \phi^{m-2} \bar{a}_m m(m-1) \bar{\phi}^{m-2} (\phi + \bar{\phi})^2 \\ - 6(a_m m(m-1) \phi^{m-2} + \bar{a}_m m(m-1) \bar{\phi}^{m-2})(a_m \phi^m + \bar{a}_m \bar{\phi}^m). \quad (\text{B.1.12})$$

Nach dem Ausmultiplizieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= 2a_m^2 m^2 \phi^{2m-2} - 4a_m \bar{a}_m m^2 \phi^{m-1} \bar{\phi}^{m-1} + 2\bar{a}_m^2 m^2 \bar{\phi}^{2m-2} \\
&+ a_m^2 m^2 (m-1) \phi^{2m-2} + \bar{a}_m^2 m^2 (m-1) \bar{\phi}^{2m-3} \phi + 5a_m \bar{a}_m m^2 (m-1) \phi^m \bar{\phi}^{m-2} \\
&+ 5\bar{a}_m a_m m^2 (m-1) \bar{\phi}^{m-1} \phi^{m-1} + a_m^2 m^2 \phi^{2m-3} (m-1) \bar{\phi} \\
&+ \bar{a}_m^2 m^2 (m-1) \bar{\phi}^{2m-2} + 5a_m \bar{a}_m m^2 (m-1) \phi^{m-1} \bar{\phi}^{m-1} + 5\bar{a}_m a_m m^2 (m-1) \phi^{m-2} \bar{\phi}^m \\
&- 2a_m \bar{a}_m m^2 (m-1)^2 \phi^m \bar{\phi}^{m-2} - 4a_m \bar{a}_m m^2 (m-1)^2 \phi^{m-1} \bar{\phi}^{m-1} \\
&- 2a_m \bar{a}_m m^2 (m-1)^2 \phi^{m-2} \bar{\phi}^m - 6a_m^2 m (m-1) \phi^{2m-2} - 6\bar{a}_m^2 m (m-1) \bar{\phi}^{2m-2} \\
&- 6a_m \bar{a}_m m (m-1) \phi^{m-2} \bar{\phi}^m - 6a_m \bar{a}_m m (m-1) \bar{\phi}^{m-2} \phi^m. \tag{B.1.13}
\end{aligned}$$

Nun sortieren wir nach den Potenzen von ϕ und $\bar{\phi}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
0 &= (m^3 - 5m^2 + 6m)(a_m^2 \phi^{2m-2} + \bar{a}_m^2 \bar{\phi}^{2m-2}) + (-2m^4 + 9m^3 - 13m^2 + 6m) \\
&(a_m \phi^m \bar{a}_m \bar{\phi}^{m-2} + a_m \phi^{m-2} \bar{a}_m \bar{\phi}^m) + (m^3 - m^2)(\bar{a}_m^2 \bar{\phi}^{2m-3} \phi + a_m^2 \phi^{2m-3} \bar{\phi}) \\
&+ (-4m^4 + 18m^3 - 18m^2)(a_m \phi^{m-1} \bar{a}_m \phi^{m-1}). \tag{B.1.14}
\end{aligned}$$

Um eine übersichtlichere Gestaltung zu erhalten führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
\alpha &:= m^3 - 5m^2 + 6m, \\
\beta &:= -2m^4 + 9m^3 - 13m^2 + 6m, \\
\gamma &:= m^3 - m^2, \\
\delta &:= -4m^4 + 18m^3 - 18m^2, \tag{B.1.15}
\end{aligned}$$

und können so (B.1.14) vereinfacht darstellen:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(a_m^2 \phi^{2m-2} + \bar{a}_m^2 \bar{\phi}^{2m-2}) + \beta(a_m \phi^m \bar{a}_m \bar{\phi}^{m-2} + a_m \phi^{m-2} \bar{a}_m \bar{\phi}^m) \\
&+ \gamma(\bar{a}_m^2 \bar{\phi}^{2m-3} \phi + a_m^2 \phi^{2m-3} \bar{\phi}) + \delta(a_m \phi^{m-1} \bar{a}_m \phi^{m-1}). \tag{B.1.16}
\end{aligned}$$

Summieren wir über m , so wird schnell klar, dass die Gleichung (B.1.16) nicht erfüllt werden kann, da die Summe der Polynome nicht null wird. Wir suchen nun nach den Nullstellen der einzelnen Polynome aus (B.1.15). Für $m = 0$ verschwinden alle vier Polynome, dieser triviale Fall ist jedoch nicht interessant, da dann das Kähler Potential konstant ist. Ferner sind die Polynome α und δ identisch null, wenn $m = 3$ ist. In diesem Fall heben sich die beiden Polynome β und γ weg, wenn a_m reell ist, da dann die Potenzen der skalaren Felder übereinstimmen.

Somit ist die Funktion $F(\phi, \bar{\phi}) = c\phi^3$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Form (B.1.10), die Gleichung (B.1.6) erfüllt.

Anhang C

Kähler Geometrie

C.1 Die Kähler Struktur

Die hier dargestellte Zusammenfassung ist an [4] angelehnt. Dieses Skript beruht unter anderem auf [5], [6] und [7]. Im Wesentlichen wird die gleiche Konvention benutzt.

Kähler Mannigfaltigkeiten können als spezielle Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachtet werden. Neben der Riemannschen Struktur weisen sie zusätzlich noch eine komplexe sowie eine symplektische Struktur auf. Jede orientierte 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist beispielsweise eine Kähler Mannigfaltigkeit. Nun folgt die Definition einer Kähler Struktur:

DEFINITION: Eine Kähler Struktur auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) ist durch eine 2-Form Ω und ein Feld von Endomorphismen J des Tangentialbündels TM gegeben, welche folgende Bedingungen erfüllen:

- *Algebraische Bedingungen*
 - a) *J ist eine fast komplexe Struktur: $J^2 = -Id$.*
 - b) *$g(X, Y) = g(JX, JY) \forall X, Y \in TM$.*
 - c) *$\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$.*

- *Analytische Bedingungen*
 - d) *die 2-Form Ω ist symplektisch: $d\Omega = 0$.*
 - e) *J ist integrierbar in dem Sinne, dass sein Nijenhuis Tensor verschwindet.*

Diese Definition wird im Folgenden näher erläutert: um genauer darstellen zu können, was eine fast komplexe Struktur wirklich ausmacht, muss erklärt werden, was eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension m ist ein topologischer Raum M mit einer offenen Überdeckung \mathcal{U} , sodass für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ existiert, die x enthält. Ferner existiert ein Homöomorphismus $\phi_U : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{C}^m$, sodass für jedes überlappende $U, V \in \mathcal{U}$ die Abbildung zwischen offenen Mengen aus \mathbb{C}^m

$$\phi_{UV} := \phi_U \circ \phi_V^{-1} \quad (\text{C.1.1})$$

holomorph ist. Das wichtigste Element auf einer solchen komplexen Mannigfaltigkeit ist nun die fast komplexe Struktur J , die ein Feld von Endomorphismen des Tangentialbündels darstellt. Sie ist folgendermaßen definiert: für jedes $X \in T_x M$ wird eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$, in der x enthalten ist, derart gewählt, dass $J_U(X) = (\phi_U)_*^{-1} \circ j_n \circ (\phi_U)_*(X)$ definiert werden kann. j_n bezeichnet hier einen Endomorphismus von \mathbb{R}^{2n} und ein '*' steht für das Differential der jeweiligen Größe. Nimmt man nun eine andere Umgebung $V \in \mathcal{U}$, die x enthält, dann ist $\phi_{VU} = \phi_V \circ \phi_U^{-1}$ holomorph und es gilt $\phi_V = \phi_{VU} \circ \phi_U$, sodass gezeigt werden kann, dass $J_V(X) = J_U(X)$ gilt. Somit hängt J nicht von U ab und ist insgesamt ein wohldefinierter $(1,1)$ -Tensor J auf M . Dieser Tensor erfüllt die Bedingung $J^2 = -\text{Id}$ und wird als fast komplexe Struktur bezeichnet. Das Paar (M, J) nennt man dann eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Zudem verlangt Bedingung a), dass die reelle Dimension von M gerade sein muss.

Zu b) und c) sei folgendes bemerkt: eine hermitesche Metrik auf einer fast komplexen Mannigfaltigkeit (M, J) ist eine Riemannsche Metrik g , die Bedingung b) erfüllt. Die Fundamentalform einer hermiteschen Metrik wird über Bedingung c) definiert. Ist die Metrik g und einer der Tensoren J und Ω gegeben, so kann die jeweils fehlende Größe mit Hilfe von c) herausgefunden werden. Mit TM ist das Tangentialbündel von M gemeint.

Die Bedingungen d) und e) sind durch folgende Definition motiviert:

DEFINITION: Eine hermitesche Metrik g auf einer fast komplexen Mannigfaltigkeit (M, J) wird Kähler Metrik genannt, wenn J eine komplexe Struktur und die Fundamentalform Ω geschlossen ist. Somit gilt: g ist eine Kähler Metrik $\iff N^J = 0$ und $d\Omega = 0$.

Der Nijenhuis Tensor N^J ist ein $(2,1)$ -Tensor und kann jeder fast komplexen Struktur J zugeordnet werden. Er ist definiert durch:

$$N^J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY], \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}^\infty(TM). \quad (\text{C.1.2})$$

Es kann gezeigt werden, dass folgende Aussagen äquivalent sind: sei J eine fast komplexe Struktur auf M^{2m} , dann

- ist J eine komplexe Struktur,
- ist $T^{0,1}M$ integrierbar,
- gilt $N^J = 0$.

Für weitere Details sei der interessierte Leser auf [4] verwiesen.

Die Kähler Strukturen wurden 1933 von Erich Kähler in seinem Artikel [6] mit folgender Motivation eingeführt: ist eine hermitesche Metrik g auf einer komplexen Mannigfaltigkeit gegeben, so kann die 2-Form Ω in lokal holomorphen Koordinaten durch

$$\Omega = i \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta} \quad (\text{C.1.3})$$

ausgedrückt werden. Hier wurde die Abkürzung $g_{\alpha\bar{\beta}} := g\left(\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\beta}}\right)$ benutzt. Erich Kähler bemerkte dann, dass die Eigenschaft der symplektischen Fundamentalform $d\Omega = 0$ äquivalent zu der lokalen Existenz einer Funktion K ist, sodass

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z_{\alpha} \partial \bar{z}_{\beta}} \quad (\text{C.1.4})$$

gilt. Dies ist sehr bemerkenswert, da der gesamte metrische Tensor von nur einer Funktion bestimmt wird: dem Kähler Potential K . Aufgrund dieser Eigenschaft können recht einfache explizite Ausdrücke für die Christoffel-Symbole, die Ricci- sowie die Riemann-Krümmung gefunden werden. Diese Ausdrücke werden im nächsten Abschnitt angegeben.

C.2 Krümmungstensoren und Christoffel-Symbole

Die Christoffel-Symbole können mit Hilfe von

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = g^{\gamma\bar{\delta}} \frac{\partial g_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_{\alpha}} \quad (\text{C.2.1})$$

berechnet werden und sind aufgrund der Torsionsfreiheit symmetrisch in den unteren Indizes. Wenn die Indizes an der Metrik oben stehen, ist immer die inverse Metrik gemeint. Die einzigen Christoffel-Symbole, die nicht verschwinden sind $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ und sein komplex konjugiertes. Somit verschwinden die Christoffel-Symbole mit gemischten Indizes.

Die Ricci-Form ρ ist eines der wichtigsten Objekte auf einer Kähler Mannigfaltigkeit und durch folgenden Ausdruck definiert:

$$\rho(X, Y) := \text{Ric}(JX, Y), \quad \forall X, Y \in TM. \quad (\text{C.2.2})$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

- die Ricci-Form ist geschlossen.
- die Kohomologie-Klasse von ρ ist – bis auf ein reelles Vielfaches – gleich der Chern-Klasse des kanonischen Bündels von M .
- in lokalen Koordinaten kann ρ als $\rho = -i\partial\bar{\partial} \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}})$ ausgedrückt werden, wobei $(g_{\alpha\bar{\beta}})$ die hermitesche Metrik bezeichnet.

Der Riemannsche Krümmungstensor ist durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\delta} = -\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}}{\partial\bar{z}^{\beta}}. \quad (\text{C.2.3})$$

Die Indizes können mit Hilfe der Metrik hoch- und heruntergezogen werden: $R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = g_{\delta\bar{\mu}}R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\mu}$. Der Riemannsche Krümmungstensor ist antisymmetrisch in seinen Indizes. Ferner leisten nur $R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$ und sein komplex konjugiertes einen nichtverschwindenden Beitrag. Durch Spurbildung kann nun der Ricci-Tensor gewonnen werden:

$$\text{Ric}_{\gamma\bar{\beta}} = \text{Ric}_{\bar{\beta}\gamma} = R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\alpha} = -\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha}}{\partial\bar{z}^{\beta}} \quad (\text{C.2.4})$$

Die Ricci-Krümmung ist symmetrisch, da es sich bei einer Kähler Mannigfaltigkeit um eine Riemannsche Mannigfaltigkeit handelt.

Anhang D

Special Kähler Geometrie

Dieser Abschnitt fasst die wichtigsten Zusammenhänge aus [27] und [12] zusammen, die für diese Arbeit notwendig sind. Für Details sei der interessierte Leser auf diese Veröffentlichungen hingewiesen.

Eine Special Kähler Mannigfaltigkeit M ist eine Hodge-Kähler Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$ mit einem Geradenbündel \mathcal{L} , welches mit der Fußpunktabbildung $\pi : \mathcal{L} \rightarrow M$ über der Kähler Mannigfaltigkeit (M, g) definiert ist. Ferner existiert ein $2n + 2$ -dimensionales, holomorphes $Sp(2n + 2, \mathbb{R})$ Vektorbündel \mathcal{H} über M mit einem holomorphen Schnitt Ω über $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$, dessen Norm $\exp\{K\}$ ist, wobei K das Kähler Potential darstellt. Somit gilt für K :

$$K(\phi, \bar{\phi}) = -\ln\langle\Omega(\phi), \bar{\Omega}(\bar{\phi})\rangle, \quad \langle\Omega, \partial_{\phi^k}\Omega\rangle = 0, \quad K = 1, \dots, n. \quad (\text{D.0.1})$$

Hier ist $\langle\cdot, \cdot\rangle$ das symplektische Produkt auf den Fasern. An dieser Stelle wird die Nähe zur String Theorie deutlich, denn das oben genannte erhält man auch im Modulraum der komplexen Strukturen auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit Y , wobei Ω die holomorphe 3-Form darstellt. In diesem Fall wird $n = h^{(2,1)}$ gesetzt und die Fasern des Hodge-Bündels \mathcal{H} mit $H^3(Y, \mathbb{C})$ identifiziert. $H^3(Y, \mathbb{C})$ ist ein $2n + 2$ -dimensionaler komplexer Vektorraum, wobei n die komplexe Dimension von M darstellt. Die Intersection Matrix auf $H^3 \otimes H^3$ liefert eine hermitesche Metrik auf \mathcal{H} und es gilt

$$\langle\alpha, \beta\rangle \equiv i \int_Y d^6x \alpha \wedge \beta. \quad (\text{D.0.2})$$

Dies impliziert die Existenz von speziellen Koordinaten, in denen die Geometrie lokal die Form

$$K = -\ln(2F(\phi) + 2\bar{F}(\bar{\phi}) + (\phi^i - \bar{\phi}^j)(\partial_{\phi^i}F(\phi) + \partial_{\bar{\phi}^j}\bar{F}(\bar{\phi}))) \quad (\text{D.0.3})$$

annimmt. $F(\phi)$ stellt dabei das holomorphe Präpotential dar. In [12] wird zudem das Umgekehrte gezeigt: hat die Geometrie in jeder Umgebung die Form (D.0.3) so existieren das

Bündel \mathcal{H} und der Schnitt Ω global. Eine Special Kähler Mannigfaltigkeit kann nun wie folgt definiert werden:

DEFINITION: Sei \mathcal{L} das komplexe Geradenbündel, dessen erste Chern Klasse gleich der Kähler Form J ist, auf einer n -dimensionalen Kähler Mannigfaltigkeit M . Sei \mathcal{H} ein holomorphes Vektorbündel $Sp(2n+2, \mathbb{R})$ über M und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die kompatible hermitesche Metrik auf \mathcal{H} . M ist eine Special Kähler Mannigfaltigkeit, für ein bestimmtes \mathcal{H} , wenn ein holomorpher Schnitt Ω auf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$ existiert mit der Eigenschaft

$$J = -\frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \langle \Omega, \bar{\Omega} \rangle. \quad (\text{D.0.4})$$

Anhang E

Legendre-Transformation

Zur Erinnerung soll in diesem Abschnitt kurz das Verfahren der Legendre-Transformation dargestellt werden (siehe zum Beispiel [26]). Bei der Legendre-Transformation handelt es sich um eine reversible Variablentransformation, da sie eindeutig ist.

Gegeben sei eine Funktion $L(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$, deren totales Differential

$$dL = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial L}{\partial y_i} dy_i \right) \quad (\text{E.0.1})$$

lautet. Die Parameter x_1, \dots, x_n werden als aktive Variablen benutzt und sollen durch die neuen Variablen $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$, die mit Hilfe von

$$\tilde{x}_i := \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad (\text{E.0.2})$$

definiert sind, ersetzt werden, wobei für $i = 1, \dots, s$ gilt. Die Legendre-Transformierte von L bezüglich x_1, \dots, x_n wird mit H bezeichnet und hängt von den passiven Variablen y_1, \dots, y_n und den neuen Variablen $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ ab. Die passiven und die neuen Variablen sind unabhängig voneinander. H kann durch folgenden Ausdruck bestimmt werden:

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, y_1, \dots, y_n) &= L(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i \\ &= L(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) - \sum_{i=1}^s \tilde{x}_i x_i. \end{aligned} \quad (\text{E.0.3})$$

Bildet man nun das totale Differential von H zum einen allgemein und zum anderen mit Hilfe von (E.0.3), so stellt man durch Koeffizientenvergleich fest, dass folgende Relation gilt:

$$x_i = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}_i}. \quad (\text{E.0.4})$$

Da die Legendre-Transformation reversibel sein soll, müssen die neuen Koordinaten $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ Variablen sein. Erfüllen sie diese Bedingung nicht, ist die Rücktransformation nicht mehr eindeutig. Somit muss

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} \neq 0 \quad (\text{E.0.5})$$

gelten. Die Rücktransformation funktioniert analog zur Legendre-Transformation, da L die Legendre-Transformierte zu H ist.

Literaturverzeichnis

- [1] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, S. Ferrara, L. Girardello, and P. van Nieuwenhuizen. *Spontaneous Symmetry Breaking and Higgs Effect in Supergravity without Cosmological Constant*. Nucl. Phys., B147:105, 1979.
- [2] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. Van Proeyen. *Yang-Mills Theories with local Supersymmetry: Lagrangian, Transformation Laws and Super-Higgs Effect*. Nucl. Phys., B212:413, 1983.
- [3] J. L. Feng. *Supersymmetry and Cosmology*. Annals Phys., 315:2-51, 2005.
- [4] A. Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry*. Skript, 2004.
- [5] D. Joyce. *Compact Manifolds with Special Holonomy*. Oxford University Press, 2000.
- [6] E. Kähler. *Über eine bemerkenswerte hermitesche Metrik*. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 9:173-186, 1933.
- [7] A. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer Verlag, 1981.
- [8] J. Wess, J. Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, 1992.
- [9] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R.olta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*. Astrophys. J. Suppl., 148:175, 2003.
- [10] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas, and D.V. Nanopoulos. *Naturally vanishing Cosmological Constant in $N=1$ Supergravity*. Phys. Lett., B133:61, 1983.
- [11] J. Bicak. *The role of exact Solutions of Einstein's Equations in the Developments of General Relativity and Astrophysics Selected Themes*. Lect. Notes Phys., 540:1-126, 2000.
- [12] A. Strominger. *Special Geometry*. Commun. Math. Phys., 133:163-180, 1990.
- [13] B. de Wit, P. G. Lauwers, and Antoine Van Proeyen. *Lagrangians of $N=2$ Supergravity - Matter Systems*. Nucl. Phys., B255:569, 1985.

- [14] H. Kalka, G.Soff. *Supersymmetrie*. B.G. Teubner Stuttgart, 1997.
- [15] S. Coleman, J. Mandula. *All possible Symmetries of the S-Matrix*. Phys. Rev., 159:1251, 1967.
- [16] R. Haag, J. Lopuszanski, M. Sohnius. *All possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix*. Nucl. Phys., B88:257, 1975.
- [17] H. J. W. Müller-Kirsten, A. Wiedemann. *Supersymmetry. An Introduction with Conceptual and Computational Details*. World Scientific, 1987.
- [18] I. Brunner J. Louis and S.J. Huber. *The Supersymmetric Standard Model*. 1998.
- [19] G. Mack. *Allgemeine Relativitäts- und Eichtheorie*. Hamburg Desy - Internal Rep. T-82-03 (82,Rec.Nov.) 101p.
- [20] L. D. Landau, E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik II, Klassische Feldtheorie*. Akademie-Verlag Berlin, 1987.
- [21] A. Einstein. *Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1917.
- [22] R. Barbieri, E. Cremmer, and S. Ferrara. *Flat and positive Potentials in N=1 Supergravity*. Phys. Lett., B163:143, 1985.
- [23] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. Van Proeyen. *Coupling Supersymmetric Yang-Mills Theories to Supergravity*. Phys. Lett., B116:231, 1982.
- [24] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara, and L. Girardello. *Super-Higgs Effect in Supergravity with general scalar interactions*. Phys. Lett., 79B:23, 1978.
- [25] K. Königsberger. *Analysis 2, 3. überarbeitete Auflage*. Springer Verlag, 2000.
- [26] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik*. Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [27] E. A. Di Napoli. *The Role of Kähler and Special Kähler Geometry in Supersymmetric Field Theory*. The University of Texas at Austin, 2003.

Danksagung

Ich bedanke mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Jan Louis für die interessante Aufgabenstellung und die freundliche und geduldige Betreuung meiner Diplomarbeit. Desweiteren danke ich Olaf Hohm für die konstruktive Kritik an meiner Arbeit.

Für die angenehme Zeit möchte ich mich bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe sowie den Diplomanden des II. Instituts bedanken.

Bei Marcel bedanke ich mich für die liebevolle Unterstützung, die mir besonders in schweren Zeiten Mut gemacht hat.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern für die kompromisslose moralische und finanzielle Unterstützung, die mein Studium erst ermöglicht hat.

Erklärung gemäß §21 Abs. (9) Prüfungsordnung/Diplom

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur mit Hilfe der angegebenen Quellen verfasst habe. Desweiteren gestatte ich die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Mira Krämer, Hamburg, den 30.09.2005.