Kaluza-Klein Reduktion einer massiven D=6 Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2

Diplomarbeit

vorgelegt von

Kenan Mujkic

Dezember 2008

II. Institut für Theoretische Physik
Department Physik
Universität Hamburg

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. Jan Louis
Universität Hamburg
II. Institut für Theoretische Physik
Luruper Chaussee 149
22761 Hamburg
GERMANY

Zweitgutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. Henning Samtleben
École Normale Supérieure (ENS) de Lyon
Laboratoire de Physique
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07
FRANCE

Neben dem Bösen das Gute, neben dem Leben der Tod,
neben dem Guten der Frevler. Schau hin auf alle Werke Gottes:
Alle sind sie paarweise geschaffen, eins entspricht dem andern.
Auch ich bin als letzter eifrig gewesen,
wie einer der Nachlese hält hinter den Winzern.
Mit Gottes Segen bin ich voran gekommen,
wie ein Winzer habe ich die Kelter gefüllt.
Seht, nicht für mich allein habe ich mich geplagt,
sondern für alle, die Bildung suchen.

Jesus Sirach 33,14 - 18

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts beruhte die theoretische Physik auf drei fundamentalen Theorien: der Quantenmechanik (QM), der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie (ART). Im Rahmen einer Vereinigung der grundlegenden Prinzipien sind Quantenmechanik und spezielle Relativitätstheorie in der Quantenfeldtheorie (QFT) zusammengeführt worden. In der QFT werden die klassischen Felder als mit einander wechselwirkende Quantenfelder aufgefasst, die Materie ist durch fermionische Elementarteilchen aufgebaut und die Wechselwirkungen werden durch bosonische Austauschteilchen vermittelt. Das Prinzip der Eichinvarianz spielt in diesem Konzept eine entscheidende Rolle, da die Wechselwirkungen erst durch die Forderung der Invarianz der Wirkung unter lokalen Symmetrietransformationen eingeführt werden. Das Standardmodell (SM) der Elementarteilchen stellt damit ein asymmetrisches Gebilde dar: fermionische Materie auf der einen Seite und bosonische Wechselwirkung auf der anderen bilden eine Konstruktion, welche einer tiefer gehenden Begründung bedarf.

Die theoretische Physik hat in der Geschichte bedeutende Fortschritte in der Vereinheitlichung der fundamentalen Wechselwirkungen gemacht und es stellt sich die Frage, in welcher Weise eine Vereinigung der Quantenfeldtheorie mit der allgemeinen Relativitätstheorie erreicht werden kann. Der naive Versuch, die Gravitationswechselwirkung zu quantisieren, scheitert, da die Kopplungskonstante eine negative Massendimension hat und eine mögliche Quantentheorie der Gravitation damit nicht renormierbar ist [28]. Eine potentielle Vereinigung der fundamentalen Wechselwirkungen stellt also nicht einfach eine Einbettung der Gravitationswechselwirkung in die Quantenfeldtheorie dar, sondern erfordert eine Vereinheitlichung der zugrunde liegenden Prinzipien. Die theoretische Elementarteilchenphysik ist in diesem Sinne auf der Suche nach einer Theorie, welche auf den Prinzipien der allgemeinen und speziellen Relativitätstheorie sowie der Quantenmechanik aufbaut und gleichzeitig verläßliche Vorhersagen über Quantenobservablen macht.

Supergravitation bietet eine Möglichkeit, die Prinzipien der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenfeldtheorie durch ein einziges, fundamentales Konzept zu vereinigen. Sie basiert auf *Supersymmetrie*, einer Symmetrie zwischen fermionischen und bosonischen Feldern [30]. Supersymmetrische Feldtheorien bestehen dem entsprechend aus einer Menge von Quantenfeldern und einer Wirkung, welche unter einer vorgeschriebenen Transformation der bosonischen in die fermionischen Felder invariant ist. Supergravitationstheorien sind *Eichtheorien* dieser supersymmetrischen Feldtheorien, d.h. Feldtheorien, welche unter lokalen Supersymmetrietransformationen invariant sind. Aufgrund der ihnen zugrunde liegenden Supersymmetrie-Algebra sind sie invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen und damit in natürlicher Weise *Gravitationstheorien.*

Die Eichung von Supersymmetrie vereinigt nicht nur die Konzepte von allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenmechanik, erwartungsgemäß führt sie auch ein neues Eichfeld ein, dessen Feldquantum das Gravitino (Spin $\frac{3}{2}$) ist. Aus der Perspektive der Quantenfeldtheorie sind die Gravitini die Austauschteilchen, welche die Gravitationswechselwirkung auf kurzen Distanzen vermitteln und damit vertieft und erweitert Supergravitation unser Verständnis dieser Wechselwirkung.[1] Supersymmetrische Feldtheorien sind im Allgemeinen nicht renormierbar, sie verhalten sich jedoch auffallend freundlich gegenüber radiativen Korrekturen, da fermionische und bosonische Felder jeweils mit umgekehrtem Vorzeichen zu den radiativen Korrekturen beitragen.

Im Laufe der Entwicklung der Theorie hat sich das Verständnis von Supergravitation verändert. Ursprünglich betrachtete man sie als einen Kandidaten für eine fundamentale Feldtheorie, welche eine Vereinigung der Gravitation mit den anderen Wechselwirkungen ermöglicht. Gegenwärtig wird sie jedoch als niederenergetischer Grenzfall einer fundamentaleren, ihr zugrunde liegenden, Theorie angesehen. Die einzigen Kandidaten für eine solche Theorie sind die Superstringtheorie [3, 4] und eine weitere, weniger bekannte Theorie, die M-Theorie. Stringtheorie und Supergravitation bilden aus der heutigen Perspektive Bestandteile der M-Theorie, deren grundlegende Prinzipien jedoch noch nicht vollständig verstanden sind.

Superstringtheorien sind in natürlicher Weise in zehn oder elf Dimensionen definiert und enthalten Supergravitationstheorien als effektive Feldtheorien [33]. Um die phänomenologischen Implikationen der Stringtheorie zu studieren, muss man diese zehndimensionalen Supergravitationstheorien kompaktifizieren, d.h. die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit M_{10} als ein Produkt aus der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und einer sechsdimensionalen, kompakten Mannigfaltigkeit M_6 auffassen [4]. Die Felder der zehndimensionalen Supergravitationstheorie lassen sich dann nach einem vollständigen Satz von Funktionen auf der Produktmannigfaltigkeit entwickeln und die Abhängigkeit von den Koordinaten der kompakten Mannigfaltigkeit M_6 aus der Wirkung ausintegrieren.

Die dimensionale Reduktion von zehndimensionalen Supergravitationstheorien führt auf komplizierte, vierdimensionale Supergravitationstheorien und ist im Allgemeinen nicht eindeutig [4]. Dies liegt an der Tatsache, dass die reduzierte Supergravitationstheorie von der Art der Kompaktifizierung, d.h. insbesondere von der Geometrie der internen Mannigfaltigkeit abhängt. In dieser Arbeit werden wir die Prinzipien der dimensionalen Reduktion am Beispiel der *Kaluza-Klein Reduktion* [8] einer massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie *auf einem Torus* T^2 studieren und untersuchen, in welcher Weise sich die Symmetrietransformationen der sechsdimensionalen Theorie nach der dimensionalen Reduktion in der reduzierten Supergravitationstheorie wiederfinden. Wir werden sehen, dass die Kompaktifizierung neue *Skalar-* und *Vek-*

[1] In Anbetracht der Tatsache, dass die bosonischen Gravitonen (Spin 2) kohärente, langreichweitige Felder aufbauen, bleibt die klassische Theorie im Grenzfall nieriger Energien gültig.

torfelder erzeugt und die Diffeomorphismen der kompakten Mannigfaltigkeit *Eichtransformationen* der Kaluza-Klein Vektorfelder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Die Einbettung von Supergravitationstheorien in höherdimensionale Theorien erlaubt damit den Umkehrschluss zur induktiven Argumentation in vier Dimensionen. Die Invarianz der vierdimensionalen Feldtheorie unter lokalen Supersymmetrietransformationen führt nicht nur auf eine Invarianz der Theorie unter Raumzeit-Diffeomorphismen. Vielmehr induziert die Invarianz der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion in einer natürlichen Weise das Konzept der *Eichtheorie*.

1.1 Quantenfeldtheorie und Allgemeine Relativitätstheorie

Seit der Entwicklung der Quantenfeldtheorie (QFT) werden die klassischen Felder als mit einander wechselwirkende Quantenfelder aufgefasst [14]. Teilchenphysik zu betreiben, bedeutet in diesem Rahmen, die Materie in Quarks und Leptonen aufzuteilen und die Kräfte zwischen diesen fundamentalen Teilchen aus vier verschiedenen Wechselwirkungen heraus zu begreifen: der Gravitation, der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung.

Glashow, Salam und Weinberg haben die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung in der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung vereint und die starke Kraft liess sich in einer konsistenten Weise in das Standardmodell der Elementarteilchen integrieren [14, 29]. In Rahmen der Vereinigung dieser drei fundamentalen Kräfte spielt das Prinzip der Eichinvarianz eine entscheidende Rolle. Es entstand aus der Beobachtung, dass die Wirkung eines Systems unter globalen Transformationen der Felder ψ invariant ist, sofern die zugehörige Ladung in dem dynamischen System erhalten ist [14, 28]. Die elektrische Ladung q ist beispielsweise Phasentransformationen $\psi \mapsto e^{iq\phi}\psi$ der Felder ψ zugeordnet, welche diese Ladung tragen. Diese Aussage lässt sich ebenfalls umkehren (Noethers Theorem): Wenn die Wirkung unter infinitesimalen Transformationen $\psi \mapsto \psi + \delta\psi$ der Felder ψ invariant ist, dann gibt es einen erhaltenen Strom und eine erhaltene Ladung. Wir bezeichnen eine Transformation als global, sofern ihr Parameter ϕ nicht von den Raumzeit-Koordinaten abhängt.

Die Verallgemeinerung des Konzepts der Invarianz unter globalen Symmetrietransformationen erfordert es, den Transformationsparameter ϕ von den Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}, \mu = 0, ..., 3$, abhängen zu lassen. Im Allgemeinen wird die Wirkung eines physikalischen Systems nur dann unter den verallgemeinerten Transformationen $\psi \mapsto e^{iq\phi(x)}\psi$ der Felder ψ invariant sein, wenn wir ein zusätzliches Feld, einführen, dessen Quanten mit den geladenen Teilchen wechselwirken. Diese Wechselwirkung, welche in einem Austausch von Feldquanten besteht, erzeugt die Kräfte zwischen den geladenen Teilchen.

Eine Transformation, deren Parameter ϕ von den Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ abhängt, bezeichnen wir als Eichtransformation und den Parameter ϕ koordinatenabhängig zu machen, bezeichnen wir als *Eichen* dieser Transformation [28]. Das Eichen der Phasentransformationen, welche der elektrischen Ladung zugeordnet sind, führt z.B. auf ein elektromagnetisches Potential dessen Feldquanten die Photonen sind. Als Resultat erhalten wir die Quantenelektrodynamik. Andere Eichtransformationen erfordern die Einführung zusätzlicher Eichfelder, welche zu weiteren Austauschteilchen führen. Für die schwache Wechselwirkung sind dies das $W^{+/-}$ und das Z^0 Boson, für die starke Wechselwirkung sind es die Gluonen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Eichen einer Invarianz der Wirkung in der Quantenfeldtheorie eine Wechselwirkung zwischen den geladenen Teilchen einführt, welche durch Austauschbosonen vermittelt wird. Aufgrund seiner zentralen Bedeutung in der QFT wird der Begriff der Eichtransformation heutzutage ausschliesslich für lokale Transformationen verwendet.

Die allgemeine Relativitätstheorie unterscheidet sich konzeptionell grundlegend von der Quantenfeldtheorie. Sie begründet sich in der Äquivalenz von schwerer und träger Masse, welche experimentell bereits von Bessel, Eötvös, Galileo, Huygens und Newton gezeigt worden ist [27]. Einstein folgerte aus dieser Äquivalenz, dass es in einem Gravitationsfeld an jedem Raumzeitpunkt möglich ist, ein lokales Inertialsystem zu wählen, so dass die Naturgesetze in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes dieselbe Form annehmen, wie in einem unbeschleunigten Bezungssystem, bei Abwesenheit von Gravitation.

Betrachtet man also ein Teilchen im freien Fall, auf welches ausschließlich die Gravitationskraft wirkt, so besagt das *Äquivalenzprinzip*, dass es ein Koordinatensystem ζ^m gibt, das sich ebenfalls im freien Fall befindet und in welchem die Bewegungsgleichung des Teilchens eine Gerade in der Raumzeit darstellt:

$$\frac{d^2\zeta^m}{d\tau^2} = 0, \tag{1.1.1}$$

mit $m = 0, ...3$. Die Eigenzeit τ ist in diesem Bezugssystem definiert als:

$$d\tau^2 = -\eta_{mn} d\zeta^m d\zeta^n, \tag{1.1.2}$$

mit $\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Transformieren wir in ein beliebiges Koordinatensystem $x^\mu, \mu = 0, ..., 3$, so können wir die frei fallenden Koordinaten ζ^m als Funktion von x^μ betrachten. Die Bewegungsgleichung des Teilchens nimmt dann die folgende Form an:

$$0 = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \tag{1.1.3}$$

mit dem Zusammenhang $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ definiert als:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^m} \frac{\partial^2 \zeta^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \tag{1.1.4}$$

Die Eigenzeit $d\tau$ lässt sich in diesem Bezugssystem mit Hilfe der folgenden Relation bestimmen:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.1.5}$$

wobei der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ definiert ist als:

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \zeta^m}{\partial x^\mu} \frac{\partial \zeta^n}{\partial x^\nu} \eta_{mn}. \tag{1.1.6}$$

Der Zusammenhang $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ transformiert unter allgemeinen Koordinatentransformationen nicht wie ein Tensor, lässt sich aber durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ ausdrücken:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \{ \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \}. \tag{1.1.7}$$

Durch die Relation (1.1.7) erhalten wir eine Beziehung zwischen den Effekten der Gravitation, die sich in der Bewegungsgleichung (1.1.3) ausdrücken und dem metrischen Tensor (1.1.6). Die Einsteinsche Gravitationstheorie besteht also in einer tiefen Analogie zwischen der Beschreibung des Gravitationsfeldes und der nicht euklidischen, Riemannschen Geometrie [27]. Die Gravitation spiegelt sich in diesem Bild in der Geometrie der Raumzeit wieder oder anders formuliert: die Geometrie der Raumzeit bestimmt die Effekte der Gravitation. Die Einsteinschen Feldgleichungen geben dieser Tatsache Ausdruck, indem sie die Krümmung der Raumzeit zum Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ in Beziehung setzen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.1.8}$$

wobei $R_{\mu\nu}$ den Ricci-Tensor und R das Krümmungsskalar bezeichnet.

Es stellt sich natürlich die Frage, aus welchem Grund das Gravitationsfeld überhaupt quantisiert werden sollte. Einsteins Relativitätstheorie wurde bisher nur an Systemen getestet, bei denen wenigstens eine der Massen von makroskopischer Größenordnung gewesen ist und daher spielten Quanteneffekte bei der Untersuchung des Gravitationsfeldes keinerlei Bedeutung. Es wird jedoch angenommen, dass dieselbe Theorie Wechselwirkungen zwischen Teilchen im Mikrokosmos beschreibt. Wenn das Gravitationsfeld nicht quantisiert ist, dann läßt sich im Prinzip annehmen, dass man den Ort und den Impuls eines solchen Teilchens gleichzeitig messen könnte und damit würde Heisenbergs Unschärferelation ausser Kraft gesetzt. Wenn wir also die Gültigkeit der Ünschärferelation postulieren, dann müssen wir schlussfolgern, dass das Gravitationsfeld quantisiert ist.

1.2 Supersymmetrie und Supergravitation

In gewöhnlichen Quantenfeldtheorien sind die Symmetrien der Raumzeit unabhängig von den übrigen Symmetrien, den sogenannten *internen* Symmetrien der Feldtheorie. Dem entsprechend lassen sich die Felder der Theorie nach irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe und Eigenwerten der internen Symmetrieoperatoren klassifizieren. Auf der Suche nach möglichen Erweiterungen des Standardmodells der Elementarteilchen suchte man in den 60er Jahren nach einer Vereinheitlichung dieser Symmetrieoperationen. D.h. man versuchte Fermionen und Bosonen, welche in verschiedenen Darstellungen der Poincaré-Gruppe transformieren, zu Multipletts zusammenzufassen, innerhalb derer sie in einander transformieren sollten.

Im Rahmen der Klassifizierung der Elementarteilchen durch den „eight fold way“ war dieser Ansatz durch beträchtlichen Erfolg gekrönt [30]. Man versuchte wiederholt, SU(3)-Multipletts, welche unterschiedlichen Spin hatten, mit einander in Beziehung zu setzten, scheiterte allerdings daran, diese *Spin*-Symmetrien relativistisch kovariant zu machen. Coleman und Mandula [1] studierten in diesem Zusammenhang alle bosonischen Symmetriegeneratoren und zeigten 1967, dass es im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie unmöglich ist, Raumzeit-Symmetrien mit internen Symmetrien zu vereinigen. Präziser formuliert, besagt das Coleman-Mandula Theorem, dass Operatoren, deren Eigenwerte interne Quantenzahlen (wie z.B. die elektrische Ladung usw.) sind, translations- und rotationsinvariant sein müssen. Die einzigen Generatoren, welche unter Translationen und Rotationen in der gewünschten Weise transformieren, sind aber die Generatoren der Lorentztransformationen selbst. Dies bedeutet, dass interne Symmetrien, Eigenzustände mit verschiedenen Eigenwerten m^2 und $l(l+1)\hbar$ des Massen- und Spinoperators nicht zu einander in Beziehung setzen können. Irreduzible Multipletts von Symmetriegruppen können also keine Teilchen mit verschiedenen Massen oder verschiedenem Spin enthalten und damit hat das Coleman-Mandula Theorem gerade die Art von Symmetrie ausgeschlossen, welche man für die Erweiterung des Standardmodells gesucht hatte.

Es stellte sich jedoch heraus, dass eine der Annahmen, die Coleman und Mandula gemacht hatten, für die Untersuchung der möglichen Symmetrien der S-Matrix nicht notwendig war: sie hatten nur solche Symmetrietransformationen zugelassen, deren Generatoren Lie-Algebren mit reellen Parametern bilden und damit wohldefinierten Kommutatorrelationen genügen. Beispiele für solche Symmetrien sind Rotationen mit Eulerwinkeln als Parametern oder Phasentransformationen der Elektrodynamik mit einer reellen Phase.

Wess und Zumino [32] präsentierten 1974 die erste renormierbare Feldtheorie eines Spin $\frac{1}{2}$ Teilchens, das mit zwei Spin 0 Teilchen wechselwirkt, wobei die Teilchen durch eine Symmetrietransformation in einander transformierten und damit in demselben Multiplett saßen. Die Einschränkungen des Coleman Mandula Theorems wurden durch die Einführung eines *fermionischen* Symmetrieoperators umgangen, welcher den Spin $\frac{1}{2}$ trägt. Die Wirkung dieses Operators auf einem Zustand mit Spin j besteht darin, diesen auf eine Linearkombination von Zuständen mit Spin (j - $\frac{1}{2}$) und (j + $\frac{1}{2}$) abzubilden. Fermionische Generatoren genügen Antikommutatorrelationen und sind daher nicht durch das Coleman Mandula Theorem als Erzeuger von Symmetrietransformationen der S-Matrix ausgeschlossen.

Haag, Lopuszanski und Sohnius [7] erweiterten das Coleman-Mandula Theorem schliesslich, indem sie Symmetrietransformationen zuließen, deren Generatoren *Antikommutatorrelationen* genügen. Sie bewiesen, dass die einzigen Modelle, die im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen haben können, *supersymmetrische* Feldtheorien sind. In supersymmetrischen Modellen wird die Liegruppe der Poincaré-Algebra durch sogenannte Superladungen Q erweitert, welche Spin $\frac{1}{2}$ tragen und nicht trivialen Vertauschungsrelationen mit den Generatoren der Poincaré-Algebra genügen.

Die Poincare-Gruppe ist in ein halbeinfaches Produkt der Lorentzgruppe mit der Gruppe der Raumzeit-Translationen [28]. Die Kommutatorrelationen der Generatoren $M_{\mu\nu}$ der Lorentzgruppe mit den Generatoren P_μ der Translationen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0 \\ &[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = \ i\,(\eta_{\mu\rho}\,P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}\,P_\rho) \\ &[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \ i\,(\eta_{\nu\rho}\,M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\,M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}\,M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\,M_{\nu\rho}). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Erweitert man diese Algebra um die Superladungen Q, so erhält man die sogenannte Super-Poincaré Algebra [24]. Die Vertauschungsrelationen der fermionischen Symmetriegeneratoren Q mit den Generatoren der Poincaré-Algebra sind gegeben durch:

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^j_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu\,\delta^j_i, \tag{1.2.2}$$

$$[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\,Q_{\beta i} \quad , \quad [\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}^i_{\dot\beta}\,(\bar\sigma_{\mu\nu})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}, \tag{1.2.3}$$

$$[Q_{\alpha i}, P_\mu] = [\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0, \tag{1.2.4}$$

wobei $Q_{\alpha i}$ Weyl-Spinoren darstellen und $i = 0, ...N$ die Zahl der Superladungen bezeichnet. Griechische Buchstaben $\mu = 0, ..., 3$ aus der Mitte des Alphabets kennzeichnen Raumzeit-Indizes und griechische Buchstaben $\alpha = 1, 2$ vom Anfang des Alphabets Spinorindizes. Die Pauli-Matrizen werden in dieser Notation mit σ^μ bezeichnet und $\sigma^{\mu\nu} = i[\sigma^\mu, \sigma^\nu]$ sind die Lorentzgeneratoren in der Spinordarstellung.

Wir wenden unsere Aufmerksamkeit nun den *intrinsischen* Eigenschaften der Supersymmetrietransformationen zu. Eine infinitesimale Transformation bildet ein bosonisches Feld ϕ auf ein fermionisches Feld ψ ab, $\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi$, wobei $\bar{\epsilon}$ einen konstanten Supersymmetrieparameter bezeichnet. Gleichung (1.2.2) verdeutlicht uns, wie zwei infinitesimale Transformationen auf einem bosonischen Feld ϕ wirken. Die erste Transformation bildet ϕ auf das fermionische Feld ψ ab, die zweite rotiert ψ zurück zu $\partial_\mu\phi$:

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\bar{\epsilon}_2)]\ \phi = \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_2\ \sigma^\mu\ \epsilon_1)\ \partial_\mu\phi. \tag{1.2.5}$$

Das Hintereinanderausführen zweier interner Supersymmetrietransformationen führt also auf eine *Raumzeit-Translation*. Die Eichung von Supersymmetrie verlangt darüber hinaus, dass der Parameter $\epsilon = \epsilon(x)$ von den Raumzeit Koordinaten $\{x^\mu\}$ abhängt und damit schließen zwei Supersymmetrietransformationen in *lokalen* Translationen, d.h. in Translationen über Distanzen, welche von Punkt zu Punkt variieren. Die Invarianz einer Feldtheorie unter lokalen Supersymmetrietransformationen impliziert also eine Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen. Oder in anderen Worten: die *Eichung* von Supersymmetrie induziert Gravitation und deshalb verwendet man für Theorien, welche lokal supersymmetrisch sind, den Begriff *Supergravitation*.

Man kann sich die Konsequenzen der Eichung von Supersymmetrie auch von einem anderen Standpunkt aus klar machen. Die Super-Poincaré Algebra (1.2.1) bis (1.2.4) enthält als Unteralgebra die Poincaré-Algebra, so dass die Eichung von Supersymmetrie notwendiger Weise auch zu einer Eichung der Poincaré Gruppe führt. Die allgemeine Relativitätstheorie wird aber in der Regel als Eichtheorie der Poincaré Gruppe betrachtet, in welcher die Generatoren P_μ der lokalen Transformationen Diffeomorphismen der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit generieren. Damit sind lokal supersymmetrische Theorien in natürlicher Weise Gravitationstheorien.

Supergravitation kann als Eichtheorie supersymmetrischer Feldtheorien also nur formuliert werden, sofern die Raumzeit gekrümmt ist. Um die Wirkung unter lokalen Supersymmetrietransformationen invariant zu lassen, braucht man ein zusätzliches Eichfeld, das Gravitino (Spin $\frac{3}{2}$), welches der fermionische Partner des bosonischen Gravitons (Spin 2) ist [13]. In der ursprünglichen Formulierung von Supergravitation (einfache oder N=1 Supergravitation) gab es nur ein Gravitino, doch die weiter entwickelten Feldtheorien (erweiterte oder N=2,...,8 Supergravitation) beinhalten bis zu 8 Gravitinos. Die Entdeckung eines elementaren Spin $\frac{3}{2}$ Teilchens wäre ein großer Erfolg für die Theorie, da Supergravitation die einzig konsistente Feldtheorie für wechselwirkende Spin $\frac{3}{2}$ Felder ist. In einer wirklich vereinheitlichten Theorie, welche z.B. maximale oder N=8 Supersymmetrie aufweisen könnte, wären die Gravitinos nichts anderes als eine neue Art von Quarks oder Leptonen.

Supersymmetrische Feldtheorien sind im Allgemeinen nicht renormierbar, sie verhalten sich jedoch auffallend freundlich gegenüber radiativen Korrekturen, da fermionische und bosonische Felder jeweils mit umgekehrtem Vorzeichen zu den radiativen Korrekturen beitragen. Das Theorem von Haag, Lopuszanski und Sohnius zeigt schließlich, dass Supersymmetrie und Supergravitation die einzig möglichen Erweiterungen des Standardmodels sind, welche die Vereinigung aller fundamentalen Wechselwirkungen im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie für sich beanspruchen können. Ein Scheitern dieses Ansatzes würde bedeuten, dass wir entweder die Quantenfeldtheorie als fundamentale Theorie oder den Anspruch der Vereinigung aller fundamentalen Wechselwirkungen aufgeben müssten.

Bevor wir damit fortfahren, Superstringtheorien zu diskutieren, kommen wir noch einmal auf den Gegensatz zwischen Materie und Wechselwirkung zu sprechen. Die konsequente Entwicklung der Eichtheorien in der Quantenfeldtheorie hat diese Dichotomie bekräftigt: während die Materie durch fermionische Elementarteilchen aufgebaut ist, werden die Kräfte durch bosonische Austauschteilchen vermittelt. Supersymmetrische Theorien heben diesen Gegensatz wieder auf, indem sie Fermionen und Bosonen in Multipletts zusammenfassen, innerhalb derer die Teilchen in einander transformieren. Die Unterscheidung zwischen Materie und Wechselwirkung wird in einem gewissen Sinne zu einer phänomenologischen: Bosonen manifestieren sich als Kräfte, weil sie kohärente, klassische Felder aufbauen können, Fermionen erscheinen als Materie, weil sie dem Paulischen Ausschließungsprinzip genügen und nicht gleichzeitig ein und denselben Raumzeitpunkt ausfüllen können.

1.3 Stringtheorie und Kompaktifizierung

Wir haben bereits diskutiert, dass die Allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenfeldtheorie auf verschiedenen physikalischen Prinzipien beruhen und damit im Standardmodell der Elementarteilchen eine unterschiedliche Rolle spielen. Zudem ist die Stärke des Gravitationsfeldes bei den in Teilchenbeschleunigern verfügbaren Energien vernachlässigbar, so dass man durch Experimente im Hochenergiebereich keinen direkten Hinweis auf eine Vereinigung der Gravitation mit den anderen fundamentalen Wechselwirkungen erwarten kann. Nichts desdo trotz vermutet man, dass die Stärke des Gravitationsfeldes bei der Planck Energie, $E_{Pl} = c^2\sqrt{\hbar c/G} \approx 10^{19}$ GeV, mit der Stärke der übrigen Kräfte kommensurabel ist [30]. In diesem Energiebereich sind unsere gegenwärtigen Theorien nicht mehr mit einander vereinbar und sollten durch eine fundamentalere, ihnen zugrunde liegende Theorie ersetzt werden. Der attraktivste Kadidat für eine solche vereinheitlichte Theorie ist gegenwärtig die *Stringtheorie*.

Man unterscheidet fünf verschiedene Typen von Stringtheorien: Typ I, Heterotisch $E8 \times E8$, Heterotisch SO(32), Typ IIA und Typ IIB [3, 4]. Witten konnte 1994 zeigen, dass alle fünf Theorien zu einander dual und damit physikalisch mit einander äquivalent sind [33]. Man vermutet daher, dass die fünf Typen der Stringtheorie nichts anderes sind als Grenzwerte einer ihnen zugrunde liegenden Theorie, der M-Theorie. Die Stringtheorie verallgemeinert das Konzept des Punktteilchens und führt dafür ausgedehnte Objekte, die sogenannten Strings (schwingende Saiten) ein [3]. Die verschiedenen Elementarteilchen manifestieren sich dann als Anregungszustände, d.h. als Schwingungsmoden dieser fundamentalen Objekte. Da die höheren Schwingungsmoden sehr massiv sind, beschränkt man sich beim Studium der phänomenologischen Implikationen der Stringtheorie auf die Untersuchung des masselosen Spektrums, d.h. auf die sogenannten *Nullmoden.*

Superstringtheorien sind in natürlicher Weise in zehn oder elf Dimensionen formuliert. Sie enthalten eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen und ihre effektiven Wirkungen werden durch D=10 oder D=11 *Supergravitationstheorien* beschrieben [33]. Um phänomenologisch relevante Theorien zu erhalten, muss man die zehndimesionalen Supergravitationstheorien kompaktifizieren. Dies geschieht, indem man die D=10 Mannigfaltigkeit M_{10} als ein Produkt aus der Raumzeit - Mannigfaltigkeit M_4 und einer kompakten, internen Mannigfaltigkeit M_6 auffasst [4]. Die sechs zusätzlichen Dimensionen werden in einem gewissen Sinne aufgerollt und sind im niederenergetischen Grenzfall der Stringtheorie, d.h. der resultierenden, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, nicht mehr wahrzunehmen. Ein Charakteristikum der dimensionalen Reduktion besteht darin, dass die resultierenden Supergravitationstheorien von der Art der Kompaktifizierung abhängen. Dabei bestimmen die geometrischen Eigenschaften der internen Mannigfaltigkeit darüber, auf welche Theorie die Reduktion der zehndimensionalen Supergravitationstheorie führt.

Die ersten Studien zur dimensionalen Reduktion wurden Anfang des 20. Jahrhunderts von Kaluza und Klein durchgeführt. T. Kaluza [9] stellte 1921 eine fünfdimensionale Theorie vor, welche eine Vereinigung der allgemeinen Relativitätstheorie mit der klassischen Elektrodynamik ermöglichte. Durch die Einführung der fünften Dimension gelang es ihm, sowohl die Einsteinschen Feldgleichungen als auch die Maxwell-Gleichungen aus einer einzigen Theorie herzuleiten. O. Klein [10] argumentierte anschließend, dass die fünfte Dimension in Wirklichkeit aufgerollt sei und deshalb nicht wahrnehmbar wäre.

Bei der gewöhnlichen *Kaluza-Klein Reduktion* nimmt man an, dass die Felder der zehndimensionalen Supergravitationstheorie von den Koordinaten der internen Mannigfaltigkeit unabhängig sind [20, 8]. Man kann die Terme in der Wirkung der zehndimensionalen Supergravitationstheorie dann in eine Form bringen, welche dem Produktansatz $M_{10} = M_4 \times M_6$ entspricht, den Reduktionsansatz für die Felder einsetzen und über die internen Koordinaten integrieren. Als Resultat erhält man die Wirkung der reduzierten, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Dabei induzieren die Symmetrien der zehndimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion entsprechende Symmetrietransformationen der Felder der reduzierten Supergravitationstheorie [20]. Die Invarianz der zehndimensionalen Supergravitationstheorie unter Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert z.B. eine Invarianz der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter *Eichtransformationen* der Kaluza-Klein Vektorfelder, einfache Supersymmetrie in zehn Dimensionen führt nach der dimensionalen Reduktion auf erweiterte Supersymmetrie in vier Dimensionen usw..

Eine natürliche Grenze des Kaluza-Klein Ansatzes besteht offensichtlich darin, dass die dimensionale Reduktion einer masselosen Supergravitationstheorie in zehn Dimensionen wiederum auf eine masselose Supergravitationstheorie in vier Dimensionen führt. J. Scherk und H. Schwarz verallgemeinerten diesen Ansatz 1979 und liessen die Felder in einer Weise, welche von den Symmetrien der zehndimensionalen Supergravitationstheorie bestimmt ist, von den Koordinaten der internen Mannigfaltigkeit abhängen [20]. Dabei muss der Reduktionsansatz so gewählt werden, dass die Felder Faserbündel definieren, welche auf der kompakten Mannigfaltigkeit stetig sind. Als Konsequenz kann die Abhängigkeit von den internen Koordinaten in den Transformationsgesetzen der Felder ausgeklammert werden und sie verschwindet vollständig in der Wirkung. Dies führt nach der dimensionalen Reduktion auf *Massenterme* und neue Kopplungen der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

1.4 Gegenstand dieser Arbeit

M. Haack, J. Louis und H. Singh studierten 2001 die verallgemeinerte Reduktion einer massiven Supergravitationstheorie des Typs IIA [18] auf einer K3-Mannigfaltigkeit und erhielten eine massive, sechsdimensionale Supergravitationstheorie [6]. Im masselosen Grenzfall ist die Wirkung dieser Supergravitationstheorie identisch mit der Wirkung der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einer K3-Mannigfaltigkeit [23]. In der vorliegenden Arbeit werden wir die *Kaluza-Klein Reduktion* der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 studieren und als Ergebnis eine massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie erhalten. Aus der Perspektive der Stringtheorie ergibt sich die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie also durch die Kompaktifizierung einer massiven Supergravitationstheorie des Typs IIA auf einem Produkt $K3 \times T^2$ von Mannigfaltigkeiten.

Die massive, sechsdimensionale Supergravitationstheorie verfügt über drei verschiedene Arten von Symmetrien: eine Symmetrie unter Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit, eine Symmetrie unter Stückelberg-Eichtransformationen und eine globale Symmetrie unter der $O(4, 20)$-Symmetriegruppe. Die zentrale Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit besteht darin, die Wirkung der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zu reduzieren und zu analysieren, in welcher Weise sich die Symmetrien der sechsdimensionalen Theorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden wir die Wirkung der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie vorstellen und ihre *Kaluza-Klein Reduktion* auf einem Torus T^2 studieren. Wir werden sehen, dass die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen. Die Analyse des Transformationsverhaltens dieser Komponenten unter Raumzeit-Diffeomorphismen wird ergeben, dass die Kaluza-Klein Reduktion neue *Skalar-* und *Vektorfelder* der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert.

Der zweite Teil der vorliegenden Arbeit thematisiert die Fragestellung, in welcher Weise sich die Symmetrien der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Wir werden zeigen, dass sich die Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit in einer natürlichen Weise auf die vierdimensionale Supergravitationstheorie vererben und die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit *Eichtransformationen* der Kaluza-Klein Vektorfelder induzieren. Darüber hinaus werden wir untersuchen, in welcher Weise sich die Stückelberg-Eichtransformationen nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden.

In **Kapitel 2** wird die Wirkung der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie vorgestellt und der *Kaluza-Klein Ansatz* erläutert, den wir für die dimensionale Reduktion der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie verwenden werden. Präziser fomuliert, werden wir die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit M_6 als Produkt der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 mit einer internen Mannigfaltigkeit, dem Torus T^2, schreiben. Anschließend werden wir die Periodizität der internen Koordinaten ausnutzen, um die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in eine multidimensionale Fourierreihe zu entwickeln. Das Einsetzen dieser Entwicklung in die verallgemeinerte Bewegungsgleichung der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie wird auf die Bewegungsgleichung der Anregungsmoden des Grundzustands führen. Aufgrund der Tatsache, dass die höheren Anregungsmoden sehr massiv sind, werden wir uns auf die Betrachtung der *Nullmoden* beschränken und aus dieser Prämisse den Kaluza-Klein Ansatz herleiten.

In **Kapitel 3** wird die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie thematisiert. Zu diesem Zweck werden wir die Wirkung zunächst in eine Form bringen, welche dem Produktansatz $M_6 = M_4 \times T^2$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 entspricht. Anschließend werden wir den Kaluza-Klein Ansatz in die Wirkung der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie einsetzen, über die Koordinaten der internen Mannigfaltigkeit integrieren und als Ergebnis die Wirkung einer masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erhalten. Wir werden sehen, dass sich die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie impliziert. Die Analyse des Transformationsverhaltens dieser Felder unter Raumzeit-Diffeomorphismen wird ergeben, dass die dimensionale Reduktion neue *Skalar-* und *Vektorfelder* der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert.

In **Kapitel 4** wird die Kaluza-Klein Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie thematisiert. Für die dimensionale Reduktion der massiven Theorie werden wir die selbe Methode verwenden, welche wir in Kapitel 3 bei der Reduktion der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie angewendet haben.

In **Kapitel 5** wird diskutiert, in welcher Weise sich die Symmetrietransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Wir werden zeigen, dass sich die Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit in einer natürlichen Weise auf die vierdimensionale Supergravitationstheorie vererben, während die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit *Eichtransformationen* sowie nicht triviale Symmetrietransformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Die Analyse wird ergeben, dass die redefinierten Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter diesen Symmetrien über einfache Transformationseigenschaften verfügen und sich die Wirkung der reduzierten Supergravitationstheorie in einer manifest invarianten Form schreiben lässt. Darüber hinaus werden wir untersuchen, in welcher Weise sich die Stückelberg-Eichtransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Wir werden zeigen, dass sie zwei verschiedene Typen von *gekoppelten Tensortransformationen* induzieren, unter welchen die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie invariant ist.

Kapitel 2

Die massive D=6 Supergravitationstheorie

In diesem Kapitel präsentieren wir die Wirkung der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie und erläutern den Kaluza-Klein Ansatz, den wir in den folgenden Kapiteln verwenden werden, um die sechsdimensionale Supergravitationstheorie zu reduzieren. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit lediglich mit dem bosonischen Spektrum der Theorie und nutzen die Tatsache aus, dass man den fermionischen Feldgehalt durch Supersymmetrie erhalten kann. Die bosonische Wirkung $\hat{S}_{m^I}$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie [6] setzt sich aus einem masselosen $\hat{S}_{m^I=0}$ und einem massiven Anteil $\delta\hat{S}_{m^I=0}$ zusammen und ist im masselosen Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch mit der Wirkung der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einer K3 Mannigfaltigkeit [23].
Die masselose, sechsdimensionale Supergravitationstheorie verfügt über drei verschiedene Arten von Symmetrien: eine Symmetrie unter Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit, eine Symmetrie unter Eichtransformationen der Vektorfelder bzw. der 2-Form sowie eine globale Symmetrie unter der $O(4,20)$-Symmetriegruppe [23]. Durch die Massenparameter $m^I \neq 0$ werden die Eichsymmetrie und die globale Symmetrie der masselosen Supergravitationstheorie in der massiven Supergravitationstheorie zunächst gebrochen. Die Einführung der Stückelberg-Eichtransformationen (d.h. gekoppelter Tensortransformationen) sowie die Forderung, dass die Massenparameter m^I unter den globalen $O(4,20)$-Transformationen in der Vektordarstellung transformieren, stellen die Symmetrien der masselosen Supergravitationstheorie jedoch wieder her [6].
Im ersten Teil dieser Arbeit werden wir die Kaluza-Klein Reduktion der masselosen und der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie getrennt von einander studieren. Im zweiten Teil werden wir untersuchen, in welcher Weise sich die Symmetrietransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden.

2.1 Die Wirkung der massiven D=6 Supergravitationstheorie

Der bosonische Feldgehalt der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie besteht aus dem Graviton $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{x})$, $\hat{\mu} = 0, ..., 5$, der 2-Form $\hat{B}_2(\hat{x})$, 24 Vektorfeldern $\tilde{\mathcal{A}}_1^I(\hat{x})$, $I = 1, ..., 24$, dem Dilaton $\hat{\phi}(\hat{x})$ sowie 80 weiteren Skalarfeldern $\hat{\theta}^q(\hat{x})$, q=1,...,80.[1] Die Wirkung der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{m^I} = \int \Bigg[\frac{1}{4} e^{-2\hat{\phi}} \Big(\hat{R}^* 1 + 4\, d\hat{\phi} \wedge {}^* d\hat{\phi} - 2\, \hat{H}_3 \wedge {}^* \hat{H}_3 + \frac{1}{8}\, Tr(d\mathcal{M}^{-1} \wedge {}^* d\mathcal{M}) \Big) \\ - \frac{1}{2}\, \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge {}^* \hat{\mathcal{F}}_2^J (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} + \hat{B}_2\, \hat{\mathcal{F}}_2^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, \hat{\mathcal{F}}_2^J \\ - \frac{1}{2}\, m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} {}^* m^J - 2\, \hat{B}_2^2\, m^I \mathcal{L}_{IJ}\, \hat{\mathcal{F}}_2^J + \frac{4}{3}\, \hat{B}_2^3\, m^I \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \Bigg],\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

wobei wir die Konventionen verwenden, dass die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie stets mit einem Hut bzw. einer Schlange gekennzeichnet werden und mit einem Produkt von Formen stets ein Dachprodukt gemeint ist. Die Signatur der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{x})$ ist $(- + ... +)$, das Volumenelement ist ${}^*1 = \sqrt{-g}\; d^6x$ und für p-Formen ($p \leq 6$) verwenden wir die Konvention:

$$F_p = \frac{1}{p!} F_{\hat{\mu}_1 \ldots \hat{\mu}_p} dx^{\hat{\mu}_1} \wedge ... \wedge dx^{\hat{\mu}_p}, \tag{2.1.2}$$

mit dem Hodge-Dualen definiert durch:

$${}^*F_p = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{1}{p!(6-p)} F_{\hat{\mu}_1 \ldots \hat{\mu}_p} \epsilon^{\hat{\mu}_1 \ldots \hat{\mu}_p}{}_{\hat{\mu}_{p+1} \ldots \hat{\mu}_6} dx^{\hat{\mu}_{p+1}} \wedge ... \wedge dx^{\hat{\mu}_6}. \tag{2.1.3}$$

Das Krümmungsskalar in sechs Dimensionen wird mit $\hat{R}$ bezeichnet und durch Kontraktion des Ricci-Tensors $\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ mit der Inversen $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit gebildet:

$$\hat{R} = \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \tag{2.1.4}$$

Die verallgemeinerten Feldstärken der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und die Feldstärke der 2-Form $\hat{B}_2$ sind gegeben durch:

$$\hat{H}_3 \equiv d\hat{B}_2, \qquad \hat{\mathcal{F}}_2^I \equiv d\tilde{\mathcal{A}}_1^I + 2m^I \hat{B}_2, \tag{2.1.5}$$

wobei m^I, $I = 1, ..., 24$, Massenparameter kennzeichnen. Die Matrix $\mathcal{M}$ wird durch die skalaren Felder $\hat{\theta}^q(\hat{x})$, $q = 1, ..., 80$ parametrisiert und lässt sich durch eine $O(4, 20)$-wertige Matrix $\mathcal{V}$ ausdrücken:

$$\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{V}^T \mathcal{V}. \tag{2.1.6}$$

[1] Aufgrund der Tatsache, dass 1-Formen $\mathcal{A}_1 \in T_p{}^*$ und Vektoren $\mathcal{A}^1 \in T_p$ dual zu einander sind, werden 1-Formfelder $\mathcal{A}_1(x)$ in der theoretischen Physik häufig auch als Vektorfelder bezeichnet. Sofern eine Basis $\{dx^\mu\}$ für den Kotangentialraum $T_p{}^*$ gegeben ist, sind die 1-Formen $\mathcal{A}_1$ durch ihre Komponenten $\mathcal{A}_\mu$ bereits eindeutig definiert. Aus diesem Grund werden die Komponenten $\mathcal{A}_\mu(x)$ der 1-Formfelder $\mathcal{A}_1(x)$ häufig ebenfalls als Vektorfelder bezeichnet.

Die Matrizen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{V}$ genügen den folgenden Relationen:

$$\mathcal{V}\mathcal{L}\mathcal{V}^T = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{M}^T = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{M}^T = \mathcal{M}, \tag{2.1.7}$$

wobei $\mathcal{L}$ die $O(4,20)$-Metrik bezeichnet. Die Metrik $\mathcal{L}$ ist definiert durch:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{\omega} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1.8}$$

wobei $\tilde{\omega}$ eine D=22 Lorentz-Metrik mit Signatur (3,19) bezeichnet. $\tilde{\omega}$ kann durch die D=16 Einheitsmatrix I_{16} und eine Diagonalmatrix σ parametrisiert werden:

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & I_{16} & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.9}$$

Unter Verwendung dieser Definitionen lassen sich die kinetischen Terme der Skalarfelder $\hat{\theta}^q(\hat{x})$, $q = 0, ..., 80$ in der folgenden Weise schreiben:

$$\frac{1}{32}\int e^{-2\hat{\phi}}\mathrm{Tr}(d\mathcal{M}^{-1}{}^{*}d\mathcal{M})) = -\frac{1}{32}\int \sqrt{-\hat{g}}\; e^{-2\hat{\phi}}(\partial_{\hat{\mu}}\mathcal{M}^{-1}_{IJ})(\partial^{\hat{\mu}}\mathcal{M}^{IJ})d^6x, \tag{2.1.10}$$

mit $I, J = 1, ..., 24$.

Im masselosen Grenzfall $m^I \mapsto 0$ ist die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie identisch mit der Wirkung der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einer K3 Mannigfaltigkeit [23]. In der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und die 2-Form $\hat{B}_2$ durch ihre Ableitungen in der Wirkung (2.1.1). Die masselose Theorie verfügt aus diesem Grund über eine Eichfreiheit, d.h. die Wirkung ist invariant unter den folgenden Transformationen der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und der 2-Form $\hat{B}_2$:

$$\delta\tilde{\mathcal{A}}_1^I = d\Lambda^I, \qquad \delta\hat{B}_2 = d\Lambda_1, \tag{2.1.11}$$

wobei Λ^I beliebige C^1-Funktionen bezeichnen.

In der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheint die 2-Form $\hat{B}_2$ hingegen ohne Ableitung in den verallgemeinerten Feldstärken (2.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$. Die massive Supergravitationstheorie besitzt damit nicht die selbe Eichfreiheit (2.1.11), über welche die masselose Supergravitationstheorie verfügte. Sie bleibt aber invariant unter den sogenannten Stückelberg-Eichtransformationen [6], d.h. gekoppelten Tensortransformationen der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und der 2-Form $\hat{B}_2$:

$$\delta\tilde{\mathcal{A}}_1^I = d\Lambda^I - 2\, m^I\Sigma_1, \qquad \delta\hat{B}_2 = d\Sigma_1. \tag{2.1.12}$$

Die masselose Supergravitationstheorie ist des Weiteren invariant unter globalen $O(4,20)$-Transformationen, welche in der folgenden Weise auf den Feldern der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie wirken:

$$\begin{gathered} \mathcal{M} \mapsto U\,\mathcal{M}\,U^T, \qquad \tilde{\mathcal{A}}^I \mapsto U^I{}_J\,\tilde{\mathcal{A}}^J, \qquad \hat{B}_2 \mapsto \hat{B}_2, \\ \hat{\phi} \mapsto \hat{\phi}, \qquad \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \mapsto \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \end{gathered} \tag{2.1.13}$$

mit $U \in O(4,20)$.

Die Einführung der Massenparameter $m^I \neq 0$ bricht zunächst die globale Symmetrie (2.1.13) der masselosen Supergravitationstheorie. Die $O(4,20)$-Symmetrie bleibt jedoch erhalten, sofern die Massenparameter m^I in der Vektordarstellung transformieren und die globalen Symmetrietransformationen entsprechen in diesem Fall den T-Dualitätstransformationen der Stringtheorie [6]. In der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie können die $O(4,20)$-Transformationen also in der Weise interpretiert werden, dass die Dualitätsgruppe eine massive Supergravitationstheorie auf eine andere massive Supergravitationstheorie abbildet. Die Wirkung (2.1.1) repräsentiert in diesem Sinne die Vereinigung einer ganzen Klasse von massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorien, welche durch die Wirkung der $O(4,20)$-Symmetriegruppe mit einander in Beziehung stehen.

2.2 Kaluza-Klein Ansatz für die Reduktion der D=6 Supergravitationstheorie

Bei der Kaluza-Klein Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 nimmt man an, dass sich die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit M_6 als direktes Produkt der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 mit einer internen Mannigfaltigkeit, dem Torus T^2, schreiben läßt:

$$M_6 = M_4 \times T^2. \tag{2.2.1}$$

Aufgrund des Produktansatzes (2.2.1) setzen sich die sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{\mu}}\}$, $\hat{\mu} = 0, ..., 5$ aus Raumzeit-Koordinaten $\{x^{\mu}\}$, $\mu = 0, ..., 3$ und internen Koordinaten $\{y^{\alpha}\}$, $\alpha = 4, 5$ zusammen [2]. Wir dürfen ohne aus pädagogischen Gründen annehmen, dass die Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 blockdiagonal ist, so dass der Laplace-Operator $\triangle_6$ in sechs Dimensionen die folgende Form annimmt:

$$\triangle_6 = \triangle_4 + \triangle_2, \tag{2.2.2}$$

wobei $\triangle_4$ den Laplace-Operator der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und $\triangle_2$ den Laplace-Operator des Torus T^2 bezeichnet.

Um den Kaluza-Klein Ansatz für die dimensionale Reduktion der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zu erläutern, betrachten wir zunächst die verallgemeinerte Bewegungsgleichung für das Skalarfeld $\hat{\Psi}(\hat{x})$ der sechsdimensionalen Theorie:

$$(\triangle_6 - m_6^2)\ \hat{\Psi}(\hat{x}) = 0. \tag{2.2.3}$$

Aufgrund der Periodizität der internen Koordinaten $\{y^{\alpha}\}$ lassen sich die Felder $\hat{\Psi}(\hat{x})$ nach periodischen Funktionen entwickeln:

$$\hat{\Psi}(\hat{x}) = \hat{\Psi}(x, y) = \sum_n \Psi_n(x)\ \exp(\frac{2\pi i n y}{L}), \tag{2.2.4}$$

wobei $\Psi_n(x)$ die Fourier-Transformierte von $\hat{\Psi}(\hat{x})$ und L die Länge des Torus bezeichnet. Nachdem wir das Skalarfeld $\hat{\Psi}(\hat{x})$ in eine Fourierreihe entwickelt

[2] In unserer Notation werden die Koordinaten der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit stets mit einem Hut gekennzeichnet.

haben, setzen wir die Entwicklung (2.2.4) für das Feld $\hat{\Psi}(\hat{x})$ sowie den Ansatz (2.2.2) für den Laplace-Operator $\triangle_6$ in die verallgemeinerte Bewegungsgleichung (2.2.3) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\sum_n (\triangle_4 \Psi_n(x)) \exp(\frac{2\pi i n y}{L}) + \sum_n \Psi_n(x) \, (\triangle_2 \exp(\frac{2\pi i n y}{L})) \\ - m_6^2 \sum_n \Psi_n(x) \exp(\frac{2\pi i n y}{L}) = 0.\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Fourier-Transformierte $\Psi_n(x)$ des Skalarfeldes $\hat{\Psi}(\hat{x})$ der folgenden Relation genügt:

$$\triangle_4 \Psi_n(x) - (m_6^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}) \Psi_n(x) = 0. \tag{2.2.6}$$

Das Einsetzen der Fourier-Expansion (2.2.4) in die verallgemeinerte Bewegungsgleichung (2.2.3) für das Skalarfeld $\hat{\Psi}(\hat{x})$ in sechs Dimensionen führt also auf die Bewegungsgleichung (2.2.6) für das Skalarfeld $\Psi_n(x)$ in vier Dimensionen. Präziser formuliert folgt aus Gleichung (2.2.6), dass man die Felder $\Psi_n(x)$ als Anregungsmoden des Grundzustands mit der Masse $m_n^2 = m_6^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}$ betrachten kann. Aufgrund der Tatsache, dass die höheren Anregungsmoden im Grenzfall $L \mapsto 0$ sehr massiv werden, betrachten wir lediglich die *Nullmoden* $(n = 0)$ und erhalten dadurch den folgenden Reduktionsansatz für das Skalarfeld $\hat{\Psi}(\hat{x})$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\hat{\Psi}(\hat{x}) = \Psi_0(x) \equiv \Psi(x). \tag{2.2.7}$$

Der *Kaluza-Klein Ansatz* besagt also, dass die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ausschließlich von den Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ abhängen.

Wir werden die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$, die 2-Form $\hat{B}_2$ sowie das Dilaton $\hat{\phi}$ daher entsprechend der Produktstruktur (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 zerlegen und die Abhängigkeit der Komponenten von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ streichen [8]. Dies führt auf das folgende Ergebnis:

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}(x) \equiv \phi(x), \tag{2.2.8}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_1^I = \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I(x) \, dx^\mu + \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I(x) \, dy^\alpha, \tag{2.2.9}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{1}{2} \hat{B}_{\mu\nu}(x) \, dx^\mu \, dx^\nu + \hat{B}_{\mu\alpha}(x) \, dx^\mu \, dy^\alpha + \frac{1}{2} \hat{B}_{\alpha\beta}(x) \, dy^\alpha \, dy^\beta. \tag{2.2.10}$$

Der Reduktionsansatz für die Skalarfelder $\hat{\theta}^q$, $q = 1, ..., 80$ ist identisch mit dem Ansatz (2.2.8), den wir für das Dilaton $\hat{\phi}$ eingeführt haben. Der Kaluza-Klein Ansatz für die Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit ergibt sich aus der folgenden Relation:

$$dS^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + G_{\alpha\beta}(x)(dy^\alpha + V_\mu^\alpha(x) dx^\mu)(dy^\beta + V_\nu^\beta(x) dx^\nu), \tag{2.2.11}$$

wobei $g_{\mu\nu}$ die Metrik der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und $G_{\alpha\beta}$ die Metrik des Torus T^2 bezeichnet.

Damit haben wir den *Kaluza-Klein Ansatz* für die Kompaktifizierung der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie hergeleitet. In den beiden folgenden Kapiteln werden wir die masselose und die massive, sechsdimensionale Supergravitationstheorie getrennt von einander kompaktifizieren. Dafür werden wir die Terme in der Wirkung (2.1.1) der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zunächst in eine Form bringen, welche dem Produktansatz (2.2.1) der sechdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht. Anschließend werden wir den Reduktionsansatz für die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie einsetzen, über die internen Koordinaten integrieren und als Ergebnis die reduzierte Wirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie erhalten.

Kapitel 3

Kaluza-Klein Reduktion der masselosen D=6 Supergravitationstheorie

In Kapitel 2 haben wir diskutiert, dass die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie im masselosen Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch ist mit der Wirkung der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einer K3 Mannigfaltigkeit [23]. In diesem Kapitel werden wir die Wirkung dieser masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie vorstellen und sie anschließend Schritt für Schritt reduzieren. Für die Kaluza-Klein Reduktion auf einem Torus T^2 werden wir die Terme in der Wirkung der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zunächst in eine Form bringen, welche dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 entspricht. Anschließend werden wir den Reduktionsansatz (2.2.8) bis (2.2.11) für die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in die Wirkung einsetzen und zeigen, dass sich die reduzierten Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der Reduktion in einer Weise anordnen, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie impliziert. Wir werden die Wirkung der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in Termen dieser redefinierten Felder schreiben, über die internen Koordinaten integrieren und auf diese Weise die reduzierte Wirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie erhalten. Dabei wird sich herausstellen, dass die dimensionale Reduktion der Wirkung der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie neue Skalar- und Vektorfelder in der Wirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert, welche in der sechsdimensionalen Theorie keine Entsprechung finden.

3.1 Die Wirkung der masselosen D=6 Supergravitationstheorie

Man erhält die Wirkung $\hat{S}_{m^I=0}$ der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie [23] aus der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, indem man den Grenzwert $m^I \mapsto 0$ bildet. Der Feldgehalt bleibt identisch mit dem Feldgehalt der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, allerdings verschwinden in der Wirkung (2.1.1) die topologischen Terme, die Massenparameter m^I enthalten und die verallgemeinerten Feldstärken (2.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ werden durch die Feldstärken $\tilde{\mathcal{F}}_2^I = d\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ ersetzt. Nach der Grenzwertbildung $m^I \mapsto 0$ nimmt die Wirkung der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie die folgende Form an:

$$\hat{S}_{m^I=0} = \int \left[\frac{1}{4} e^{-2\hat{\phi}} \left(\hat{R}^* 1 + 4\, d\hat{\phi} \wedge {}^* d\hat{\phi} - 2\,\hat{H}_3 \wedge {}^*\hat{H}_3 + \frac{1}{8} Tr(d\mathcal{M}^{-1} \wedge {}^* d\mathcal{M})\right) - \frac{1}{2}\,\tilde{\mathcal{F}}_2^I \wedge {}^*\tilde{\mathcal{F}}_2^J\,(\mathcal{M}^{-1})_{IJ} + \hat{B}_2\,\tilde{\mathcal{F}}_2^I\,\mathcal{L}_{IJ}\,\tilde{\mathcal{F}}_2^J\right]. \tag{3.1.1}$$

Die Wirkung (3.1.1) der masselosen Supergravitationstheorie setzt sich aus fünf verschiedenen Anteilen zusammen:

$$\hat{S}_{m^I=0} = \hat{S}_{\hat{g}} + \hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} + \hat{S}_{\hat{B}_2} + \hat{S}_{ska} + \hat{S}_{top}. \tag{3.1.2}$$

Wir unterscheiden:

1. die Wirkung $\hat{S}_{\hat{g}}$ des Gravitationssektors:

$$\hat{S}_{\hat{g}} = \frac{1}{4} \int e^{-2\hat{\phi}} \hat{R}^* 1, \tag{3.1.3}$$

2. die Wirkung $\hat{S}_{\hat{B}_2}$ der 2-Form $\hat{B}_2$:

$$\hat{S}_{\hat{B}_2} = -\frac{1}{2} \int e^{-2\hat{\phi}} \hat{H}_3 \wedge {}^*\hat{H}_3, \tag{3.1.4}$$

3. die Wirkung $\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$:

$$\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = -\frac{1}{2} \int \tilde{\mathcal{F}}_2^I \wedge {}^*\tilde{\mathcal{F}}_2^J\,(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}, \tag{3.1.5}$$

4. die Wirkung $\hat{S}_{ska}$ des Dilatons $\hat{\phi}$ und der Skalarfelder $\hat{\theta}^q, q = 1, ..., 80$:

$$\hat{S}_{ska} = \int e^{-2\hat{\phi}} d\hat{\phi} \wedge {}^* d\hat{\phi} + \frac{1}{32} \int e^{-2\hat{\phi}} Tr(d\mathcal{M}^{-1} \wedge {}^* d\mathcal{M}), \tag{3.1.6}$$

5. sowie die Wirkung $\hat{S}_{top}$ des topologischen Sektors:

$$\hat{S}_{top} = \int \hat{B}_2\,\tilde{\mathcal{F}}_2^I\,\mathcal{L}_{IJ}\,\tilde{\mathcal{F}}_2^J. \tag{3.1.7}$$

Wir werden die Wirkung (3.1.1) der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie kompaktifizieren, indem wir die Wirkungen (3.1.3) bis (3.1.7) Schritt für Schritt reduzieren.

3.2 Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{\hat{g}}$ des Gravitationssektors

Die masselose D=6 Supergravitationstheorie ist aus der dimensionalen Reduktion einer zehndimensionalen Supergravitationstheorie des Typs IIA auf einer K3-Mannigfaltigkeit hervorgegangen und die Wirkung (3.1.1) ist zunächst im Stringframe gegeben [23]. Wir werden daher eine Weyl-Reskalierung durchführen, um in das vertraute Einsteinframe zu kommen. Wir starten mit dem Term:

$$\hat{S}_{\hat{g}} = \frac{1}{4} \int \sqrt{-\hat{g}}\; e^{-2\hat{\phi}}\, \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\, \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\, d^6x \tag{3.2.1}$$

und reskalieren die Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit entsprechend der Vorschrift:

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \mapsto \hat{g}'_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = e^{\hat{\phi}(\hat{x})}\; \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \tag{3.2.2}$$

Diese Abbildung induziert in sechs Dimensionen die folgende Transformation:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \mapsto \hat{R}'_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &- (\partial_{\hat{\mu}}\hat{\phi})(\partial_{\hat{\nu}}\hat{\phi}) + 2\,\nabla_{\hat{\mu}}(\partial_{\hat{\nu}}\hat{\phi}) \\ &+ (\partial_{\hat{\lambda}}\hat{\phi})(\partial_{\hat{\kappa}}\hat{\phi})\; \hat{g}^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}}\; \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{2}\,(\Box\hat{\phi})\; \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Die Reskalierung (3.2.2) der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit lässt den Ricci-Tensor $\hat{R}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ also forminvariant und führt zu neuen, kinetischen Termen des skalaren Feldes $\hat{\phi}(\hat{x})$. Darüber hinaus bringt sie uns aus dem Stringframe (3.2.1) in das Einsteinframe, denn das Einsetzen der reskalierten Metrik $\hat{g}'_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ in die Wirkung (3.2.1) führt auf das folgende Ergebnis:

$$\hat{S}_{\hat{g}} = \frac{1}{4} \int \sqrt{-\hat{g}}\; \hat{R}(\hat{x})\, d^6x + \frac{5}{4} \int \sqrt{-\hat{g}}\; (\partial_{\hat{\lambda}}\hat{\phi})(\partial_{\hat{\kappa}}\hat{\phi})\, \hat{g}^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}}\, d^6x. \tag{3.2.4}$$

Die Wirkung (3.2.4) setzt sich zusammen aus der Einstein-Hilbert Wirkung $\hat{S}_{EH}$ und einem skalaren Anteil $\hat{S}_D$, welchen wir dem kinetischen Term des Dilatons $\hat{\phi}$ zuschlagen:

$$\hat{S}_{\hat{g}} = \hat{S}_{EH} + \hat{S}_{\hat{D}}, \tag{3.2.5}$$

mit

$$\hat{S}_{EH} = \frac{1}{4} \int \sqrt{-\hat{g}}\; \hat{R}(\hat{x})\, d^6x \tag{3.2.6}$$

und

$$\hat{S}_{\hat{D}} = \frac{5}{4} \int \sqrt{-\hat{g}}\; (\partial_{\hat{\lambda}}\hat{\phi})(\partial_{\hat{\kappa}}\hat{\phi})\; \hat{g}^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}}\, d^6x. \tag{3.2.7}$$

Wir betrachten nun die Kaluza-Klein Reduktion der Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6) im Vielbeinformalismus. Der Wechsel in diesen Formalismus ist angebracht, da sich die Vielbeine $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ triagonalisieren lassen und die Triagonalform die anschließenden Rechnungen erheblich vereinfacht. Der Reduktionsansatz (2.2.11) für die Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit übersetzt sich in folgende Struktur des Vielbeins $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ und seines Inversen $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$:

$$\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}} = \begin{pmatrix} e_\mu{}^m & V_\mu^\alpha E_\alpha{}^a \\ 0 & E_\alpha{}^a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} e_m{}^\mu & -e_m{}^\nu V_\nu^\alpha \\ 0 & E_a{}^\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.2.8}$$

wobei $e_\mu{}^m$ das Vielbein der Raumzeit-Mannigfaltigkeit, $E_\alpha{}^a$ das Vielbein der internen Geometrie und $e_m{}^\mu$ sowie $E_a{}^\alpha$ die zugehörigen Inversen bezeichnen [11]. Die Komponenten $V_{\mu\alpha}$ kennzeichnen die Einträge der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ mit gemischten Indizes und die flachen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$, $\hat{m} = 0, ..., 5$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 setzen sich aus den flachen Raumzeit-Koordinaten $\{x^m\}$, $m = 0, ..., 3$ und den flachen Koordinaten $\{x^a\}$, $a = 4, 5$ des Torus T^2 zusammen.

Bei der dimensionalen Reduktion des Einstein-Hilbert Terms werden wir hauptsächlich mit flachen Indizes arbeiten, in welchen die Spin-Verbindung $\hat{\omega}_{\hat{m}\hat{n}\hat{l}} = e_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}} \omega_{\hat{\mu}\hat{n}\hat{l}}$ die folgende Form annimmt [26]:

$$\hat{\omega}_{\hat{m}\hat{n}\hat{l}} = -\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}} + \hat{\Omega}_{\hat{n}\hat{l},\hat{m}} - \hat{\Omega}_{\hat{l}\hat{m},\hat{n}}, \tag{3.2.9}$$

mit den Koeffizienten $\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}}$ definiert als:

$$\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}} = \frac{1}{2} (\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}} - \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\nu}}) (\partial_{\hat{\nu}} \hat{e}_{\hat{\mu}\hat{l}}). \tag{3.2.10}$$

Unter Verwendung der Spin-Verbindung $\hat{\omega}_{\hat{m}\hat{n}\hat{l}}$ lässt sich das Krümmungsskalar $\hat{R}(\hat{x})$ in der folgenden Weise ausdrücken:

$$\hat{R}(\hat{x}) = \hat{\omega}^{\hat{m}}{}_{\hat{m}\hat{l}}\, \hat{\omega}^{\hat{n}}{}_{\hat{n}}{}^{\hat{l}} + \hat{\omega}^{\hat{n}}{}_{\hat{m}\hat{l}}\, \hat{\omega}^{\hat{m}\hat{l}}{}_{\hat{n}} + \hat{e}_{\hat{l}}{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\mu}} (\partial_{\hat{\nu}} \hat{\omega}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{n}\hat{l}} - \partial_{\hat{\mu}} \hat{\omega}_{\hat{\nu}}{}^{\hat{n}\hat{l}}). \tag{3.2.11}$$

Man kann den Reduktionsansatz (3.2.8) für das Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit nun in Gleichung (3.2.10) einsetzen, um die Koeffizienten $\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}}$ zu bestimmen. Diese legen die Komponenten der Spin-Verbindung (3.2.9) fest, welche sich wiederum in (3.2.11) einsetzen lässt, um das Krümmungsskalar $\hat{R}(\hat{x})$ zu reduzieren. Nach einer längeren Rechnung, deren Einzelheiten in Anhang A zu finden sind, erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\hat{R}(\hat{x}) = R(x) &- \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} (\partial_\mu G_{\alpha\beta})\, G^{\gamma\delta} (\partial_\nu G_{\gamma\delta}) \\ &- \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} (\partial_\mu G_{\alpha\beta}) (\partial_\nu G^{\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\, V^\gamma_{\mu\rho}\, V^\delta_{\nu\sigma}\, G_{\gamma\delta},\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

wobei $R(x)$ das Krümmungsskalar der vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit und $G_{\alpha\beta}$ die Metrik der internen Geometrie ist. Die Objekte $V^\alpha_{\mu\nu}$ sind durch die Einträge der Metrik $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit mit gemischten Indizes definiert:

$$V^\alpha_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V^\alpha_\nu - \partial_\nu V^\alpha_\mu \tag{3.2.13}$$

und lassen darauf schließen, dass es sich bei den Komponenten $V^\alpha_\mu(x)$ um Vektorfelder handelt. Wir werden in Kapitel fünf sehen, dass die Felder $V^\alpha_\mu(x)$ tatsächlich wie Vektoren transformieren und es sich bei den durch Gleichung (3.2.13) definierten Objekten $V^\alpha_{\mu\nu}$ um Vektorfeldstärken handelt.

Nach der dimensionalen Reduktion des Krümmungsskalars $\hat{R}(\hat{x})$ setzen wir den Ausdruck (3.2.12) schließlich in die Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6) der sechsdimensionalen Theorie ein und erhalten [20]:

$$\begin{aligned}S_{EH} = \frac{1}{4} \int \sqrt{g}\, \Bigg(R(x) &- \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} (\partial_\mu G_{\alpha\beta})\, G^{\gamma\delta} (\partial_\nu G_{\gamma\delta}) \\ &- \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} (\partial_\mu G_{\alpha\beta}) (\partial_\nu G^{\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\, V^\gamma_{\mu\rho}\, V^\delta_{\nu\sigma}\, G_{\gamma\delta} \Bigg)\, d^4x,\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

wobei wir die Koordinaten $\{y^\alpha\}$ auf dem Torus T^2 so gewählt haben, dass sie über eine Einheitslänge periodisch sind, d.h. $\int_{T^2} d^2y = 1$. Die reduzierte Wirkung (3.2.14) setzt sich aus drei verschiedenen Summanden zusammen:

$$S_{EH} = S_{\hat{g}} + S_G + S_V, \tag{3.2.15}$$

wobei

$$S_{\hat{g}} = \frac{1}{4}\int \sqrt{\hat{g}}\; R(x) d^4x, \tag{3.2.16}$$

$$S_V = \frac{1}{16}\int \sqrt{\hat{g}}\; g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\, V^\gamma_{\mu\rho}\, V^\delta_{\nu\sigma} G_{\gamma\delta} d^4x, \tag{3.2.17}$$

$$\begin{aligned} S_G = -\frac{1}{16}\int \sqrt{\hat{g}}\; \Big(& g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta}(\partial_\mu G_{\alpha\beta}) G^{\gamma\delta}(\partial_\nu G_{\gamma\delta}) \\ & + g^{\mu\nu}(\partial_\mu G_{\alpha\beta})(\partial_\nu G^{\alpha\beta})\Big) d^4x. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Die Wirkung (3.2.16) des Gravitationssektors weist uns darauf hin, dass wir uns nach der dimensionalen Reduktion des Einstein-Hilbert Terms in vier Dimensionen nicht im Einsteinframe wiederfinden und dem entsprechend ein weiteres Mal reskalieren müssen. Diese Aufgabe wird durch die Parametrisierung der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit erleichtert, welche es ermöglicht, die Wurzel $\sqrt{-\hat{g}}$ aus der Determinante der Metrik in der folgenden Weise zu schreiben [11]:

$$\sqrt{-\hat{g}}\; = \det \hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{r}} = \det e_\mu{}^r \det E_\alpha{}^a = \sqrt{-g}\sqrt{G}. \tag{3.2.19}$$

Wir reskalieren die Metrik $g_{\mu\nu}$ der vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit entsprechend der Vorschrift:

$$g_{\mu\nu} \mapsto g'_{\mu\nu} = e^\varphi g_{\mu\nu} \tag{3.2.20}$$

Diese Abbildung induziert in vier Dimensionen die folgende Transformation:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} \mapsto R'_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} + \nabla_\mu(\partial_\nu\varphi) + \frac{1}{2}\Box\varphi\; g_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\lambda\varphi)(\partial_\kappa\varphi) g^{\lambda\kappa} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Das Einsetzen der reskalierten Metrik $g'_{\mu\nu}$ aus Gleichung (3.2.20) und des Ansatzes (3.2.19) in die Wirkung (3.2.16) führt auf das folgende Ergebnis:

$$S_{\hat{g}} = \frac{1}{4}\int \sqrt{g}\; (\sqrt{G}\; e^\varphi) R(x)\, d^4x + \frac{3}{8}\int \sqrt{g}\; (\sqrt{G}\; e^\varphi)(\partial_\lambda\varphi)(\partial_\kappa\varphi)\, g^{\lambda\kappa} d^4x. \tag{3.2.22}$$

Um nach der Reskalierung der Metrik $g_{\mu\nu}$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit im Einsteinframe zu landen, müssen wir also fordern, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\sqrt{\det G_{\alpha\beta}}\, e^\varphi \equiv 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = -\frac{1}{2}\ln(\det G_{\alpha\beta}). \tag{3.2.23}$$

Das Einsetzen der Bedingung (3.2.23) in die reduzierte Wirkung (3.2.22) ergibt:

$$S_{\hat{g}} = \frac{1}{4}\int \sqrt{g}\; R(x)\, d^4x + \frac{3}{8}\int \sqrt{g}\; (\partial_\lambda\varphi)(\partial_\kappa\varphi)\, g^{\lambda\kappa} d^4x. \tag{3.2.24}$$

Die Wirkung (3.2.24) lässt sich also als Summe aus der Einstein-Hilbert Wirkung S_g der vierdimensionalen Theorie und der Wirkung S_{φ_1} des skalaren Feldes $\varphi(x)$ schreiben:

$$S_{\hat{g}} = S_g + S_{\varphi_1}, \tag{3.2.25}$$

wobei

$$S_g = \frac{1}{4}\int \sqrt{g}\; R(x)\, d^4x, \tag{3.2.26}$$

$$S_{\varphi_1} = \frac{3}{8}\int \sqrt{g}\; (\partial_\lambda \varphi)(\partial_\kappa \varphi)\, g^{\lambda\kappa} d^4x. \tag{3.2.27}$$

Wir wenden uns nun noch einmal der Geometrie der internen Mannigfaltigkeit zu. Die Gleichungen (3.2.23) und (3.2.27) erlauben die Schlussfolgerung, dass die Wurzel aus der Determinante der internen Metrik in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie in Form eines skalaren Feld $\varphi(x)$, dem Modulus des Torus, auftaucht. Dem entsprechend kann die Determinante $\det G_{\alpha\beta}$ aus der internen Metrik $G_{\alpha\beta}$ herausskaliert werden kann. In Einklang mit Gleichung (3.2.23) wählen wir den folgenden Ansatz:

$$G_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} e^{-\varphi}, \tag{3.2.28}$$

mit $\det M_{\alpha\beta} = 1$.

Wir werden die Terme in der Wirkung der reduzierten, vierdimensionalen Supergravitationstheorie stets unter Verwendung der internen Metrik $M_{\alpha\beta}$ schreiben. Bevor wir die Terme, welche wir bisher durch die Kompaktifizierung erhalten haben, zusammenfassen können, müssen wir die reduzierten Teilwirkungen (3.2.17) und (3.2.18) dem entsprechend umschreiben.

Wir setzten den Ansatz (3.2.28) in die Wirkungen (3.2.17) und (3.2.18) ein und erhalten nach der Reskalierung (3.2.20) der Metrik $g_{\mu\nu}$ der vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit die folgenden Ausdrücke:

$$S_V = \frac{1}{16}\int \sqrt{g}\; e^{-\varphi} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\, V^{\alpha}_{\mu\rho}\, V^{\beta}_{\nu\sigma}\, M_{\alpha\beta}, \tag{3.2.29}$$

$$S_G = -\frac{1}{8}\int \sqrt{g}\; g^{\mu\nu}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) d^4x - \frac{1}{16}\int \sqrt{g}\; g^{\mu\nu}(\partial_\mu M_{\alpha\beta})(\partial_\nu M^{\alpha\beta}) d^4x, \tag{3.2.30}$$

wobei S_G sich wiederum als Summe schreiben lässt:

$$S_G = S_{\varphi_2} + S_M, \tag{3.2.31}$$

mit

$$S_{\varphi_2} = -\frac{1}{8}\int \sqrt{g}\; g^{\mu\nu}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) d^4x, \tag{3.2.32}$$

$$S_M = -\frac{1}{16}\int \sqrt{g}\; g^{\mu\nu}(\partial_\mu M_{\alpha\beta})(\partial_\nu M^{\alpha\beta}) d^4x. \tag{3.2.33}$$

Wir können die Wirkung S_{EH}, welche aus der dimensionalen Reduktion der Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6) der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie hervorgegangen ist, schließlich als Summe ihrer Teilwirkungen schreiben [20]:

$$S_{EH} = S_g + S_M + S_V + S_\varphi, \tag{3.2.34}$$

$$S_{EH} = \frac{1}{4}\int \sqrt{g}\; R(x)\, d^4x - \frac{1}{16}\int \sqrt{g}\; g^{\mu\nu}(\partial_\mu M_{\alpha\beta})(\partial_\nu M^{\alpha\beta})\, d^4x$$
$$+ \frac{1}{4}\int \sqrt{g}\; g^{\mu\nu}(\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi)\, d^4x + \frac{1}{16}\int \sqrt{g}\; e^{-\varphi} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\, V^\alpha_{\mu\rho}\, V^\beta_{\nu\sigma}\, M_{\alpha\beta}\, d^4x. \tag{3.2.35}$$

Zum Abschluss diese Kapitels fassen wir die wichtigsten Argumente noch einmal zusammen. Wir sind in der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie im Stringframe (3.2.1) gestartet und haben eine Weyl-Resklierung durchgeführt, um in das Einsteinframe (3.2.6) zu gelangen. Dabei führte das Einsetzen der reskalierten Metrik $\hat{g}'_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ aus Gleichung (3.2.2) in die Wirkung (3.2.1) auf der einen Seite auf die Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6) der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, auf der anderen Seite generierte es die Teilwirkung (3.2.7), welche dem kinetischen Term des Dilatons $\hat{\phi}(\hat{x})$ zugeschlagen wurde.

Im Anschluss an die Weyl-Resklierung in sechs Dimensionen haben wir den Reduktionsansatz (3.2.8) für das Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit verwendet, um das Krümmungsskalar (3.2.11) und damit die Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6) zu reduzieren. Nach der Kompaktifizierung der Wirkung (3.2.6) fanden wir uns allerdings nicht im Einsteinframe wieder und mussten daher ein zweites Mal reskalieren. Diese Reskalierung (3.2.20) brachte uns unter der Bedingung (3.2.23) in das Einsteinframe (3.2.26) und führte auf einen weiteren Ausdruck (3.2.27), welchen wir als kinetischen Term des Skalarfeldes $\varphi(x)$ interpretieren.

Die Reduktion der Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6) führt insgesamt also auf drei verschiedene Beiträge zur Wirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Bei der Teilwirkung (3.2.26) handelt es sich um die Einstein-Hilbert Wirkung in vier Dimensionen, während die Teilwirkungen (3.2.27), (3.2.30) und (3.2.29) kinetischen Termen der Skalarfelder $G_{\alpha\beta}$ und der Vektorfelder V^α_μ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie entsprechen sollten. In Kapitel 5 werden wir sehen, dass die Felder V^α_μ unter Raumzeit-Diffeomorphismen tatsächlich als Vektoren und die Felder $G_{\alpha\beta}$ als Skalare transformieren. Die Reduktion generiert also neue Skalar- und Vektorfelder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche vor der Kompaktifizierung nicht vorhanden gewesen sind.

3.3 Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{\hat{B}_2}$ der Zwei-Form

Dieses Kapitel thematisiert die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$. Zu diesem Zweck werden wir die Terme in der Wirkung $\hat{S}_{\hat{B}_2}$ zunächst in eine Form bringen, welche dem Produktansatz $M_6 = M_4 \times T^2$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht. Präziser formuliert, werden wir sie in eine Form bringen, in welcher sie nur noch Indizes $\mu = 0, ..., 3$ der gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ sowie Indizes $\alpha = 4, 5$ der gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus T^2 tragen und entsprechend ihrer Indexstruktur mit der Inversen $g^{\mu\nu}$ der Raumzeit-Metrik bzw. der Inversen $G^{\alpha\beta}$ der Metrik des Torus kontrahieren. Anschließend werden wir den Reduktionsansatz (2.2.10) bzw. (2.2.11) einsetzen, über die internen Koordinaten integrieren und als Ergebnis die reduzierte Teilwirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie erhalten.

Die Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ lässt sich unter Verwendung der Komponenten $\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ in der folgenden Weise schreiben [11]:

$$-\frac{1}{2}\int e^{-2\hat{\phi}}\hat{H}_3 \wedge {}^*\hat{H}_3 = \frac{1}{12}\int \sqrt{\hat{g}}\; e^{-2\hat{\phi}}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{g}^{\hat{\kappa}\hat{\lambda}}\hat{g}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\rho}}\hat{H}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\sigma}}\; d^6x, \qquad (3.3.1)$$

wobei die Feldstärke $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$ folgender Maßen definiert ist:

$$\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \partial_{\hat{\mu}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\rho}} + \text{cycl. perms.} \qquad (3.3.2)$$

Aus Gleichung (3.3.1) kann man erkennen, dass die Feldstärke $\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}$ in der Wirkung (3.1.4) mit der Inversen $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit kontrahiert. Gemäss dem Reduktionsansatz (2.2.11) lässt sich der Tensor $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ allerdings nicht als Diagonalmatrix schreiben, welche die Inverse $g^{\mu\nu}$ der Metrik der Raumzeit-Mannigfaltigkeit bzw. die Inverse $G^{\alpha\beta}$ der Metrik des Torus in der Diagonale enthält. Vielmehr besitzt $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ Einträge $-V^{\alpha\nu}$ und $-V^{\beta\mu}$ mit gemischten Indizes, welche die Aufgabe erschweren, die reduzierten Terme in eine Form zu bringen, die dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten beim Anordnen und Zusammenfassen der reduzierten Terme, wählen wir einen alternativen Zugang zur Kaluza-Klein Reduktion, indem wir in den Vielbeinformalismus wechseln. Der Wechsel in diesen Formalismus bietet zwei Vorteile: einerseits ermöglicht er es, die Terme, welche sich durch die Reduktion der Teilwirkung (3.1.4) ergeben, direkt zu berechnen, ohne den expliziten Weg über die Wirkung (3.3.1) zu gehen. Andererseits vereinfacht er das Problem, die Komponenten $-V^{\alpha\nu}$ und $-V^{\beta\mu}$ der Inversen $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit in die reduzierten Terme zu integrieren. Wir werden dieses Standardverfahren der dimensionalen Reduktion am Beispiel der Kompaktifizierung der Wirkung (3.1.4) studieren.

Im Vielbeinformalismus kann man die Inverse $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit durch die inversen D=6 Vielbeine $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ und die Inverse $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ ausdrücken:

$$\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}}\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}, \qquad (3.3.3)$$

wobei $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}} = \text{diag}(-1, +1, ..., +1)$. Wir setzen Gleichung (3.3.3) in die Wirkung (3.3.1) ein und erhalten:

$$\hat{S}_{\hat{B}_2} = \frac{1}{12}\int \sqrt{\hat{g}}\; e^{-2\hat{\phi}}\; \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}}\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}\; \hat{e}_{\hat{k}}{}^{\hat{\kappa}}\hat{e}_{\hat{l}}{}^{\hat{\lambda}}\hat{\eta}^{\hat{k}\hat{l}}\; \hat{e}_{\hat{r}}{}^{\hat{\rho}}\hat{e}_{\hat{s}}{}^{\hat{\sigma}}\hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}}\; \hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\rho}}\,\hat{H}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\sigma}}\; d^6x. \qquad (3.3.4)$$

Ordnet man die Terme in (3.3.4) entsprechend ihrer Indexstruktur, so erkennt man, dass das Einsetzen von (3.3.3) in die Wirkung (3.3.1) einen Wechsel von den gekrümmten, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{\mu}}\}$ zu den flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$ impliziert:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\hat{B}_2} &= \frac{1}{12}\int \sqrt{\hat{g}}\; e^{-2\hat{\phi}}\; \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{k}}{}^{\hat{\kappa}}\hat{e}_{\hat{r}}{}^{\hat{\rho}}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\rho}}\; \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}}\hat{e}_{\hat{s}}{}^{\hat{\sigma}}\hat{e}_{\hat{l}}{}^{\hat{\lambda}}\hat{H}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\sigma}}\; \hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}\hat{\eta}^{\hat{k}\hat{l}}\hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}}\; d^6x \\ &= \frac{1}{12}\int \sqrt{\hat{g}}\; e^{-2\hat{\phi}}\; \hat{H}_{\hat{m}\hat{k}\hat{r}}\hat{H}_{\hat{n}\hat{l}\hat{s}}\; \hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}\hat{\eta}^{\hat{k}\hat{l}}\hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}}\; d^6x,\end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

mit der Definition:

$$\hat{H}_{\hat{m}\hat{k}\hat{r}} \equiv \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{k}}{}^{\hat{\kappa}}\hat{e}_{\hat{r}}{}^{\hat{\rho}}\hat{H}_{\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\rho}}. \qquad (3.3.6)$$

Wir können nun ausnutzen, dass die Inverse $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors eine Diagonalmatrix darstellt:

$$\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}} = \begin{pmatrix} \eta^{mn} & 0 \\ 0 & \delta^{ab} \end{pmatrix}, \tag{3.3.7}$$

wobei η^{mn} den Minkowski-Tensor in vier Dimensionen und δ^{ab} das Kronecker-Delta der internen Geometrie bezeichnet. Die Indizes $m = 0, ..., 3$ kennzeichnen dem entsprechend flache Raumzeit-Koordinaten $\{x^m\}$ und die Indizes $a = 4, 5$ flache Koordinaten $\{y^a\}$ der internen Mannigfaltigkeit. Einsetzen von Gleichung (3.3.7) in die Wirkung (3.3.5) ergibt:

$$\hat{S}_{\hat{B}_2} = \frac{1}{12} \int \sqrt{\hat{g}}\, e^{-2\hat{\phi}} \Big(\hat{H}_{mkr} \hat{H}_{nls}\, \eta^{mn}\, \eta^{kl}\, \eta^{rs} + 3\, \hat{H}_{mra} \hat{H}_{nsb}\, \eta^{mn}\, \eta^{rs}\, \delta^{ab} + 3\, \hat{H}_{mac} \hat{H}_{nbd}\, \eta^{mn}\, \delta^{ab}\, \delta^{cd} + \hat{H}_{ace} \hat{H}_{bdf}\, \delta^{ab}\, \delta^{cd}\, \delta^{ef} \Big)\, d^6x. \tag{3.3.8}$$

Die einfache Form (3.3.7) des Tensors $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ ermöglicht es also, die Terme in der Wirkung (3.3.5) in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. Nach dieser Umformung können wir wieder zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ sowie gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ der internen Mannigfaltigkeit zurücktransformieren. Dazu benötigen wir die folgenden Relationen:

$$\eta^{mn} = e_\mu{}^m e_\nu{}^n\, g^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \delta^{ab} = E_\alpha{}^a E_\beta{}^b\, G^{\alpha\beta}, \tag{3.3.9}$$

wobei $e_\mu{}^m$ das Vierbein der Raumzeit-Mannigfaltigkeit und $E_\alpha{}^a$ das Vielbein der internen Geometrie darstellt. Das Einsetzen von (3.3.9) in die Wirkung (3.3.8) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\hat{B}_2} = \frac{1}{12} \int \sqrt{\hat{g}}\, e^{-2\hat{\phi}} \Big(& e_\mu{}^m e_\kappa{}^k e_\rho{}^r \hat{H}_{mkr}\, e_\nu{}^n e_\lambda{}^l e_\sigma{}^s \hat{H}_{nls}\, g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} \\ & + 3\, e_\mu{}^m e_\rho{}^r E_\alpha{}^a \hat{H}_{mra}\, e_\nu{}^n e_\sigma{}^s E_\beta{}^b\, \hat{H}_{nsb}\, g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} G^{\alpha\beta} \\ & + 3\, e_\mu{}^m E_\alpha{}^a E_\gamma{}^c \hat{H}_{mac}\, e_\nu{}^n E_\beta{}^b E_\delta{}^d\, \hat{H}_{nbd}\, g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} \\ & + E_\alpha{}^a E_\gamma{}^c E_\epsilon{}^e \hat{H}_{ace}\, E_\beta{}^b E_\delta{}^d E_\phi{}^f\, \hat{H}_{bdf}\, G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} G^{\epsilon\phi} \Big)\, d^6x \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Aus der Struktur der Terme in (3.3.10) ist ersichtlich, dass das Einsetzen der Gleichung (3.3.9) in die Wirkung (3.3.8) einen Wechsel zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ sowie gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus impliziert. Nach diesem Koordinatenwechsel nimmt die Wirkung (3.3.10) die folgende Form an:

$$\hat{S}_{\hat{B}_2} = \frac{1}{12} \int \sqrt{\hat{g}}\, e^{-2\hat{\phi}} \Big(H_{\mu\kappa\rho} H_{\nu\lambda\sigma}\, g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} + 3\, H_{\mu\rho\alpha} H_{\nu\sigma\beta}\, g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} G^{\alpha\beta} + 3\, H_{\mu\alpha\gamma} H_{\nu\beta\delta}\, g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} + H_{\alpha\gamma\epsilon} H_{\beta\delta\phi}\, G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} G^{\epsilon\phi} \Big)\, d^6x, \tag{3.3.11}$$

mit den Definitionen:

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv e_\mu{}^m e_\nu{}^n e_\rho{}^r \hat{H}_{mnr}, \tag{3.3.12}$$

$$H_{\mu\nu\alpha} \equiv e_\mu{}^m e_\nu{}^n E_\alpha{}^a \hat{H}_{mna}, \tag{3.3.13}$$

$$H_{\mu\alpha\beta} \equiv e_\mu{}^m E_\alpha{}^a E_\beta{}^b \hat{H}_{mab}, \tag{3.3.14}$$

$$H_{\alpha\beta\gamma} \equiv E_\alpha{}^a E_\beta{}^b E_\gamma{}^c \hat{H}_{abc.} \tag{3.3.15}$$

Bevor wir mit der Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{\hat{B}_2}$ fortfahren, vergegenwärtigen wir uns noch einmal den Leitfaden der bisherigen Argumentation. Für die Kompaktifizierung der Wirkung (3.1.4) ist es hinreichend, den Reduktionsansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ in die Wirkung einzusetzen und die Terme in eine Form zu bringen, die dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 entspricht. Man kann dann über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ integrieren und erhält die reduzierte Wirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Die Wirkung $\hat{S}_{\hat{B}_2}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ enthält allerdings die Inverse $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit, welche gemäss dem Reduktionsansatz (2.2.11) Einträge $-V^{\alpha\mu}$ mit gemischten Indizes enthält. Diese Einträge erschweren die Aufgabe, die Terme in die gewünschte Form zu bringen, so dass wir einen alternativen Zugang zur Kaluza-Klein Reduktion gewählt haben.

In einem ersten Schritt sind wir mit Hilfe der inversen Vielbeine $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ zu flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$ gewechselt. Anschließend haben wir die Diagonalstruktur des sechsdimensionalen Minkowski-Tensors $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ ausgenutzt, um die Terme in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. In einem zweiten Schritt haben wir dann die Vierbeine $e_\mu{}^m$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit sowie die Vielbeine $E_\alpha{}^a$ der internen Geometrie verwendet, um wieder zu gekrümmten Koordinaten $\{x^\mu\}$ und $\{y^\alpha\}$ zurück zu transformieren. Durch diese Prozedur haben wir die Wirkung $\hat{S}_{\hat{B}_2}$ in eine Form gebracht, in welcher die Komponenten $H_{\mu\nu\rho}$ usw. entsprechend ihrer Indexstruktur mit der Inversen $g^{\mu\nu}$ der Metrik der Raumzeit-Mannigfaltigkeit sowie der Inversen $G^{\alpha\beta}$ der Metrik des Torus kontrahieren. Der Vielbeinformalismus bietet also eine elegante Methode, um die Wirkung der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in die gewünschte Form zu bringen, ohne dass man sich in detailierten Rechnungen verliert.

Wir können die Wirkung $\hat{S}_{\hat{B}_2}$ nun reduzieren, indem wir die Komponenten (3.3.12) bis (3.3.15) berechnen und sie in die Wirkung (3.3.11) einsetzen. Dafür setzen wir den Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ sowie den Ansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ in die Gleichung (3.3.6) ein und bestimmen die Komponenten $\hat{H}_{\hat{m}\hat{k}\hat{l}}$. Die Komponenten $\hat{H}_{mkl}$ usw. mit den passenden Indizes lassen sich dann in den Definitionen (3.3.12) bis (3.3.15) verwenden, um die reduzierten Komponenten $H_{\mu\nu\rho}$ usw. auszurechnen. Wir fassen die beiden Schritte zusammen und dokumentieren die Rechnungen:

1. Wir starten mit der Bestimmung des Terms $H_{\alpha\beta\gamma}$, indem wir die Komponenten $\hat{H}_{abc}$ aus Gleichung (3.3.6) in die Definition (3.3.15) einsetzen:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma} &\equiv E_\alpha{}^a E_\beta{}^b E_\gamma{}^c \hat{H}_{abc} \\ &= E_\alpha{}^a E_\beta{}^b E_\gamma{}^c \hat{e}_a{}^{\hat{\mu}} \hat{e}_b{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_c{}^{\hat{\rho}} \hat{H}_{\hat{\rho}\hat{\mu}\hat{\nu}}. \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ entnehmen wir, dass $\hat{e}_a{}^\mu = 0$ und $\hat{e}_a{}^\alpha = E_a{}^\alpha$ gilt. Einsetzen in Gleichung (3.3.16) ergibt:

$$H_{\alpha\beta\gamma} = E_\alpha{}^a E_a{}^\delta E_\beta{}^b E_b{}^\epsilon E_\gamma{}^c E_c{}^\phi \hat{H}_{\delta\epsilon\phi}. \tag{3.3.17}$$

Wir können nun die Relation $E_\alpha{}^a E_a{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta$ ausnutzen und erhalten:

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\delta \delta_\beta{}^\epsilon \delta_\gamma{}^\phi \hat{H}_{\delta\epsilon\phi} = \hat{H}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{3.3.18}$$

Der Term $H_{\alpha\beta\gamma}$ ist also gerade die Komponente $\hat{H}_{\alpha\beta\gamma}$ der Feldstärke (2.1.5). Der Reduktionsansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ besagt aber, dass die Komponenten $\hat{B}_{\alpha\beta}$ nicht von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ abhängen, so dass $H_{\alpha\beta\gamma}$ verschwindet:

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \hat{H}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha \hat{B}_{\beta\gamma} = 0. \tag{3.3.19}$$

2. Wir fahren mit der Berechnung des Terms $H_{\mu\alpha\beta}$ fort, indem wir die Komponenten $\hat{H}_{mab}$ aus Gleichung(3.3.6) in die Definition (3.3.14) einsetzen:

$$\begin{aligned} H_{\mu\alpha\beta} &\equiv e_\mu{}^m E_\alpha{}^a E_\beta{}^b \hat{H}_{mab} \\ &= e_\mu{}^m E_\alpha{}^a E_\beta{}^b \hat{e}_m{}^{\hat{\rho}} \hat{e}_a{}^{\hat{\sigma}} \hat{e}_b{}^{\hat{\nu}} \hat{H}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\nu}}. \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ folgt, dass $\hat{e}_a{}^\sigma = 0$ und $\hat{e}_a{}^\alpha = E_a{}^\alpha$ gilt. Das Einsetzen dieser Komponenten in Gleichung (3.3.16) führt auf:

$$H_{\mu\alpha\beta} = e_\mu{}^m \hat{e}_m{}^{\hat{\rho}} E_\alpha{}^a E_a{}^\gamma E_\beta{}^b E_b{}^\delta \hat{H}_{\hat{\rho}\gamma\delta}. \tag{3.3.21}$$

Wir können nun die Relation $E_\alpha{}^a E_a{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta$ ausnutzen, um den Term weiter zu vereinfachen:

$$H_{\mu\alpha\beta} = e_\mu{}^m \hat{e}_m{}^{\hat{\rho}} \hat{H}_{\hat{\rho}\alpha\beta}. \tag{3.3.22}$$

Der Reduktionsansatz (2.2.10) besagt, dass die Komponenten $\hat{B}_{\alpha\beta}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ unabhängig sind. Damit verschwindet der Ausdruck $\hat{H}_{\gamma\alpha\beta} = 0$ und wir verbleiben mit den Komponenten $\hat{H}_{\rho\alpha\beta}$:

$$H_{\mu\alpha\beta} = e_\mu{}^m \hat{e}_m{}^{\hat{\rho}} \hat{H}_{\hat{\rho}\alpha\beta} = \partial_\mu \hat{B}_{\alpha\beta}, \tag{3.3.23}$$

wobei wir die Relation $e_\mu{}^m \hat{e}_m{}^{\hat{\rho}} = \delta_\mu{}^\nu$ verwendet haben.

3. Wir bestimmen den Term $H_{\mu\nu\alpha}$ indem wir die Komponenten $\hat{H}_{rsa}$ aus Gleichung (3.3.6) in die Definition (3.3.13) einsetzen:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\alpha} &= e_\mu{}^r e_\nu{}^s E_\alpha{}^a \hat{H}_{rsa} \\ &= e_\mu{}^r e_\nu{}^s E_\alpha{}^a \hat{e}_r{}^{\hat{\rho}} \hat{e}_s{}^{\hat{\sigma}} \hat{e}_a{}^{\hat{\kappa}} \hat{H}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\kappa}}. \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Wir nutzen wiederum die Tatsache aus, dass die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ gemäss dem Reduktionsansatz (2.2.10) von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ unabhängig sind, so dass der Term $\hat{e}_r{}^\alpha \hat{H}_{\alpha\hat{\sigma}\hat{\kappa}}$ verschwindet. Aus dem Ansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein entnehmen wir die Komponenten $\hat{e}_a{}^\kappa = 0$, $\hat{e}_r{}^\rho = e_r{}^\rho$ und $\hat{e}_a{}^\beta = E_a{}^\beta$ und setzen sie in Gleichung (3.3.24) ein. Die führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\alpha} &= e_\mu{}^r e_r{}^\rho e_\nu{}^s \hat{e}_s{}^{\hat{\sigma}} E_\alpha{}^a E_a{}^\beta \hat{H}_{\rho\hat{\sigma}\beta} \\ &= \delta_\mu{}^\rho e_\nu{}^s \hat{e}_s{}^{\hat{\sigma}} \delta_\alpha{}^\beta \hat{H}_{\rho\hat{\sigma}\beta} \\ &= e_\nu{}^s \hat{e}_s{}^{\hat{\sigma}} \hat{H}_{\mu\hat{\sigma}\alpha}, \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

wobei wir $e_\mu{}^r e_r{}^\rho = \delta_\mu{}^\rho$ und $E_\alpha{}^a E_a{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta$ verwendet haben. Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ können wir die verbleibenden Komponenten $\hat{e}_s{}^\sigma = e_s{}^\sigma$ und $\hat{e}_s{}^\delta = e_s{}^\sigma V_\sigma^\delta$ entnehmen und sie in Gleichung (3.3.25) einsetzen:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\alpha} &= e_\nu{}^s e_s{}^\sigma \hat{H}_{\mu\sigma\alpha} - e_\nu{}^s e_s{}^\sigma V_\sigma^\delta \hat{H}_{\mu\delta\alpha} \\ &= \delta_\nu{}^\sigma \hat{H}_{\mu\sigma\alpha} - \delta_\nu{}^\sigma V_\sigma^\delta \hat{H}_{\mu\delta\alpha} \\ &= \hat{H}_{\mu\nu\alpha} - V_\nu^\delta \hat{H}_{\mu\delta\alpha} = \hat{H}_{\mu\nu\alpha} + V_\nu^\delta \hat{H}_{\mu\alpha\delta} \\ &= (\partial_\mu \tilde{B}_{\nu\alpha}) + V_\nu^\beta (\partial_\mu \tilde{B}_{\alpha\beta}), \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

wobei wir die Antisymmetrie $\hat{H}_{\mu\delta\alpha} = -\hat{H}_{\mu\alpha\delta}$ der Feldstärke (3.3.2) ausgenutzt haben.
Wir machen an dieser Stelle ein Intermezzo und redefinieren die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Im fünften Kapitel werden wir sehen, dass die redefinierten Felder unter den Symmetrietransformationen, welche durch Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induzierten werden, invariant sind und damit die eigentlichen physikalischen Felder darstellen. Zu diesem Zeitpunkt können wir die Transformationseigenschaften der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie allerdings nicht diskutieren, sondern geben lediglich ihre Definition an [8]:

$$B_{\mu\alpha} \equiv \hat{B}_{\mu\alpha} + V_\mu^\beta \hat{B}_{\alpha\beta}. \tag{3.3.27}$$

Verwendet man die Definition (3.3.27) der Felder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie, so lässt sich der Term $H_{\mu\nu\alpha}$ in der folgenden Weise schreiben:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\alpha} &= (\partial_\mu B_{\nu\alpha}) - \hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\mu V_\nu^\beta) \;+\; \text{perms} \\ &= \; B_{\mu\nu\alpha} - \hat{B}_{\alpha\beta}\, V_{\mu\nu}^\beta, \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

wobei die Feldstärken $V_{\mu\nu}^\alpha$ durch Gleichung (3.2.13) gegeben und die Feldstärken $B_{\mu\nu\alpha}$ folgender Maßen definiert sind:

$$B_{\mu\nu\alpha} \equiv \partial_\mu B_{\nu\alpha} - \partial_\nu B_{\mu\alpha}. \tag{3.3.29}$$

4. Wir fahren mit der Bestimmung des Terms $H_{\mu\nu\rho}$ fort, indem wir die Komponenten $\hat{H}_{mnr}$ aus Gleichung (3.3.6) in die Definition (3.3.12) einsetzen:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\rho} &= e_\mu{}^m e_\nu{}^l e_\rho{}^r \hat{H}_{mlr} \\ &= e_\mu{}^m e_\nu{}^l e_\rho{}^r \hat{e}_m{}^{\hat{\sigma}} \hat{e}_l{}^{\hat{\lambda}} \hat{e}_r{}^{\hat{\kappa}} \hat{H}_{\hat{\sigma}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}. \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Der Reduktionsansatz (2.2.10) besagt, dass die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ unabhängig sind, so dass der Term $\hat{e}_m{}^\alpha \hat{H}_{\alpha\hat{\lambda}\hat{\kappa}}$ a priori verschwindet. Dadurch verbleiben wir mit:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\rho} &= e_\mu{}^m e_m{}^\sigma e_\nu{}^l e_\rho{}^r \hat{e}_l{}^{\hat{\lambda}} \hat{e}_r{}^{\hat{\kappa}} \hat{H}_{\sigma\hat{\lambda}\hat{\kappa}} \\ &= e_\nu{}^l e_\rho{}^r \hat{e}_l{}^{\hat{\lambda}} \hat{e}_r{}^{\hat{\kappa}} \hat{H}_{\mu\hat{\lambda}\hat{\kappa}}, \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

wobei wir die Relation $e_\mu{}^m e_m{}^\sigma = \delta_\mu{}^\sigma$ verwendet haben. Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ erhalten wir die Komponenten $\hat{e}_r{}^\kappa = e_r{}^\kappa$ und $\hat{e}_r{}^\beta = e_r{}^\sigma V_\sigma^\beta$. Diese können wir in Gleichung

(3.3.31) einsetzen und den Term auf der rechen Seite des Gleichheitszeichens ausschreiben:

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu\rho} = e_\nu{}^l e_\rho{}^r \{ & e_l{}^\lambda e_r{}^\kappa \hat{H}_{\mu\lambda\kappa} - e_l{}^\lambda e_r{}^\sigma V_\sigma{}^\beta \hat{H}_{\mu\lambda\beta} \\
& - e_l{}^\sigma V_\sigma{}^\alpha e_r{}^\kappa \hat{H}_{\mu\alpha\kappa} + e_l{}^\sigma V_\sigma{}^\alpha e_r{}^\lambda V_\lambda{}^\beta \hat{H}_{\mu\alpha\beta} \}.
\end{aligned}
\tag{3.3.32}
$$

Das Ausmultiplizieren der rechten Seite von Gleichung (3.3.32) und die wiederholte Anwendung der Relation $e_\rho{}^r e_r{}^\sigma = \delta_\rho{}^\sigma$ führt auf:

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu\rho} &= \hat{H}_{\mu\nu\rho} - V_\rho^\beta \hat{H}_{\mu\nu\beta} - V_\nu^\alpha \hat{H}_{\mu\alpha\rho} + V_\nu^\alpha V_\rho^\beta \hat{H}_{\mu\alpha\beta} \\
&= (\partial_\mu \hat{B}_{\nu\rho}) + V_\nu^\alpha (\partial_\mu \hat{B}_{\rho\alpha}) - V_\rho^\alpha (\partial_\mu \hat{B}_{\nu\alpha}) + V_\nu^\alpha V_\rho^\beta (\partial_\mu \hat{B}_{\alpha\beta}).
\end{aligned}
\tag{3.3.33}
$$

Unter Verwendung der Definition (3.3.27) können wir die Komponenten $\hat{B}_{\mu\alpha}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ durch den Ausdruck $\hat{B}_{\mu\alpha} = B_{\mu\alpha} - V_\mu^\beta \hat{B}_{\alpha\beta}$ ersetzen und erhalten:

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu\rho} = & (\partial_\mu \tilde{B}_{\nu\rho}) + \frac{1}{2} V_\nu^\alpha (\partial_\mu B_{\rho\alpha}) - \frac{1}{2} V_\rho^\alpha (\partial_\mu B_{\nu\alpha}) \\
& - (\partial_\mu V_\nu^\alpha) V_\rho^\beta \hat{B}_{\alpha\beta} - V_\nu^\alpha (\partial_\mu V_\rho^\beta) \hat{B}_{\alpha\beta} - V_\nu^\alpha V_\rho^\beta (\partial_\mu \hat{B}_{\alpha\beta}) \\
& + \frac{1}{2} V_\nu^\alpha (\partial_\mu B_{\rho\alpha}) - \frac{1}{2} V_\rho^\alpha (\partial_\mu B_{\nu\alpha}).
\end{aligned}
\tag{3.3.34}
$$

Wir machen an dieser Stelle wiederum ein kurzes Intermezzo und definieren die 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie in der folgenden Weise [8]:

$$
B_{\mu\nu} \equiv \hat{B}_{\mu\nu} + V_{[\mu}^\alpha B_{\nu]\alpha} - V_\mu^\alpha V_\nu^\beta \hat{B}_{\alpha\beta}. \tag{3.3.35}
$$

Das Ersetzen der Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in Gleichung (3.3.34) durch die entsprechenden Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie führt auf den folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu\rho} = (\partial_\mu B_{\nu\rho}) & - \frac{1}{2} (\partial_\mu V_\nu{}^\alpha) B_{\rho\alpha} + \frac{1}{2} (\partial_\mu V_\rho{}^\alpha) B_{\nu\alpha} \\
& + \frac{1}{2} V_\nu{}^\alpha (\partial_\mu B_{\rho\alpha}) - \frac{1}{2} V_\rho{}^\alpha (\partial_\mu B_{\nu\alpha})
\end{aligned}
\tag{3.3.36}
$$

$$
= (\partial_\mu B_{\nu\rho}) - (\partial_\mu V_{[\nu}{}^\alpha) B_{\rho]\alpha} - (\partial_\mu B_{[\nu\alpha}) V_{\rho]}{}^\alpha + \text{perms.} \tag{3.3.37}
$$

Wir können schließlich in den Indizes (μ, ν) antisymmetrisieren und erhalten dadurch die kanonische Form der Feldstärke $H_{\mu\nu\rho}$ der 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$
H_{\mu\nu\rho} \equiv (\partial_\mu B_{\nu\rho}) - \frac{1}{2} B_{\mu\alpha} V_{\nu\rho}^\alpha - \frac{1}{2} V_\mu{}^\alpha B_{\nu\rho\alpha} + \text{cycl. perms,} \tag{3.3.38}
$$

wobei die Feldstärken $V_{\mu\nu}^\alpha$ durch die Definition (3.2.13) und die Feldstärken $B_{\mu\nu\alpha}$ durch die Definition (3.3.29) gegeben sind.

Nach der expliziten Berechnung der Komponenten $H_{\mu\alpha\beta}$, $H_{\mu\nu\alpha}$ und $H_{\mu\nu\rho}$ setzen wir die Ausdrücke (3.3.23), (3.3.28) und (3.3.38) sowie den Reduktionsansatz (2.2.8) für das Dilaton $\hat{\phi}$ in die Wirkung (3.3.11) ein und integrieren über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$. Auf diese Weise erhalten wir die Wirkung $S_{\hat{B}_2}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche aus der dimensionalen Reduktion der Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie hervorgeht. Die reduzierte Wirkung $S_{\hat{B}_2}$ setzt sich aus der Wirkung S_{B_2} der 2-Form B_2, den kinetischen Termen $S_{B_{\alpha\beta}}$ der Skalarfelder $\hat{B}_{\alpha\beta}$ sowie einer Wirkung S_{B_1} zusammen, welche eine Summe von Maxwell-Wirkungen darstellt:

$$S_{\hat{B}_2} = S_{B_2} + S_{B_1} + S_{B_{\alpha\beta}}. \tag{3.3.39}$$

Nach der Reskalierung (3.2.20) der Metrik $g_{\mu\nu}$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit nehmen die Terme S_{B_2}, S_{B_1} und $S_{B_{\alpha\beta}}$ schließlich die folgende Form an [11]:

$$\begin{aligned} S_{B_2} = \frac{1}{12} \int \sqrt{g}\; e^{-2\phi} e^{-2\varphi} \big((\partial_\mu B_{\kappa\rho}) - \frac{1}{2} B_{\mu\alpha} V^\alpha_{\kappa\rho} - \frac{1}{2} V_\mu{}^\alpha B_{\kappa\rho\alpha} \big) \\ \big((\partial_\nu B_{\lambda\sigma}) - \frac{1}{2} B_{\nu\beta} V^\beta_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} V_\nu{}^\beta B_{\lambda\sigma\beta} \big)\; g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma}\; d^4x, \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

$$S_{B_1} = \frac{1}{4} \int \sqrt{g}\; e^{-2\phi} \big(B_{\mu\rho\alpha} - \hat{B}_{\alpha\gamma} V^\gamma_{\mu\rho} \big) \big(B_{\nu\sigma\beta} - \hat{B}_{\beta\delta} V^\delta_{\nu\sigma} \big)\; g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} M^{\alpha\beta} d^4x, \tag{3.3.41}$$

$$S_{B_{\alpha\beta}} = \frac{1}{4} \int \sqrt{g}\; e^{-2\phi} e^{2\varphi} \big(\partial_\mu \hat{B}_{\alpha\gamma} \big) \big(\partial_\nu \hat{B}_{\beta\delta} \big)\; g^{\mu\nu} M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta}\; d^4x. \tag{3.3.42}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts fassen wir die Leitlinien der Argumentation und die Ergebnisse der Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ noch einmal zusammen. Wir haben argumentiert, dass die Inverse $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit Einträge $-V^{\mu\alpha}$ mit gemischten Indizes enthält, welche es erschweren, die Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ in eine Form zu bringen, welche dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht. Aus diesem Grund haben wir einen alternativen Zugang zur Kaluza-Klein Reduktion gewählt und sind in den Vielbeinformalismus gewechselt. In einem ersten Schritt haben wir das Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit verwendet, um zu flachen Koordinaten $\{\hat{x}^{\hat{m}}\}$ zu wechseln. Anschließend haben wir die Diagonalform der Inversen $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors ausgenutzt, um die Terme in der Wirkung in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. In einem zweiten Schritt haben die Vierbeine $e_\mu{}^m$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 sowie die Vielbeine $E_\alpha{}^a$ der internen Mannigfaltigkeit T^2 verwendet, um zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ und gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus zurück zu konvertieren.

Nachdem wir die Wirkung (3.1.4) in die gewünschte Form gebracht hatten, haben wir den Reduktionsansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$, den Ansatz (3.2.8) für das Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ sowie den Ansatz (2.2.8) für das Dilaton $\hat{\phi}$ in die Wirkung eingesetzt. Dabei haben wir gesehen, dass sich die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise angeordnet haben, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. Zu diesem Zeitpunkt haben wir lediglich gezeigt, dass sich die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ bei der dimensionalen Reduktion organisieren, ohne zu begründen, warum sie sich in dieser Weise anordnen. Wir haben die Terme in der Wirkung der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Verwendung der redefinierten Felder geschrieben, über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ integriert und als

Ergebnis die Wirkung $S_{\hat{B}_2}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie erhalten. Dabei hat sich herausgestellt, dass die dimensionale Reduktion neue Skalar- $\hat{B}_{\alpha\beta}$ und Vektorfelder $B_{\mu\alpha}$ generierte, welche in der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nicht vorhanden gewesen sind. Als Ergebnis der Reduktion erhielten wir die Wirkung S_{B_2} der 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie, die Wirkung $S_{B_{\alpha\beta}}$ der Skalarfelder $\hat{B}_{\alpha\beta}$ sowie die Wirkung S_{B_1}, welche eine Summe von Maxwell-Wirkungen darstellt.

In Kapitel 5 werden wir analysieren, in welcher Weise sich die Symmetrietransformationen der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der vierdimensionale Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit nicht triviale Transformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Aufgrund der Tatsache, dass die Symmetrien der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der Kaluza-Klein Reduktion erhalten bleiben, muss die vierdimensionale Supergravitationstheorie unter diesen Transformationen invariant sein. Aus diesem Grund organisieren sich die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise, in welcher die 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie über einfache Transformationseigenschaften verfügt und die Felder $B_{\mu\alpha}$ und $\hat{B}_{\alpha\beta}$ unter den induzierten Symmetrietransformationen invariant sind. Darüber hinaus werden wir im fünften Kapitel zeigen, dass die Felder $B_{\mu\alpha}$ und $\hat{B}_{\alpha\beta}$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen tatsächlich als Vektoren bzw. als Skalare transformieren.

3.4 Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ der Vektorfelder

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$. Für die Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ verwenden wir das selbe Verfahren, das wir bereits bei der Reduktion der Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ angewandt haben. In einem ersten Schritt werden wir zu flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$ transformieren und die Diagonalform des Minkowski-Tensors (3.3.7) ausnutzen, um die Terme in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. In einem zweiten Schritt werden wir die Vierbeine $e_\mu{}^m$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit und die Vielbeine $E_\alpha{}^a$ der internen Geometrie verwenden, um zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ bzw. gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus zurück zu transformieren. Durch diese Vorgehensweise nehmen die Terme in der Wirkung (3.1.5) eine Form an, die dem Produktansatz $M_6 = M_4 \times T^2$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 entspricht. Genauer gesagt, ordnen sich die Terme in einer Weise an, in welcher sie gemäss ihrer Indexstruktur mit der Inversen $g^{\mu\nu}$ der Metrik der Raumzeit-Mannigfaltigkeit bzw. der Inversen $G^{\alpha\beta}$ der Metrik des Torus kontrahieren. Nachdem wir die Wirkung (3.1.5) in die gewünschte Form gebracht haben, brauchen wir nur noch den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und den Ansatz (3.2.8) für die inversen Vielbeine $\hat{e}_{\hat{m}}{}^\mu$ einzusetzen und über die internen Koordinaten zu integrieren, um die reduzierte Teilwirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie zu erhalten.

Bevor wir mit der Kaluza-Klein Reduktion beginnen, schreiben wir die Wirkung (3.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ explizit aus:

$$\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\; \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{g}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}}\tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\; \tilde{\mathcal{F}}^J_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^6x. \tag{3.4.1}$$

In einem ersten Schritt setzen wir den Ausdruck (3.3.3) für die Inverse $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit in die Wirkung (3.4.1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} &= \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\;\; \hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}\hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}}\;\; \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{r}}{}^{\hat{\rho}}\;\tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\;\; \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}}\hat{e}_{\hat{s}}{}^{\hat{\sigma}}\;\; \tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^6x \\ &= \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\; \hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}\;\; \hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}}\;\; \tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{m}\hat{r}}\;\; \tilde{\mathcal{F}}^J_{\hat{n}\hat{s}}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^6x,\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

mit der Definition:

$$\tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{m}\hat{r}} \;\equiv\; \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}\hat{e}_{\hat{r}}{}^{\hat{\rho}}\tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\mu}\hat{\rho}}. \tag{3.4.3}$$

Das Einsetzen von (3.3.3) in die Wirkung (3.4.1) impliziert also einen Koordinatenwechsel von den gekrümmten, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{\mu}}\}$ zu den flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$. Nach dem Wechsel zu den flachen Koordinaten können wir die Tatsache ausnutzen, dass die Matrix $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ über eine Diagonalform verfügt, um die Terme in der Wirkung (3.4.2) in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. Das Einsetzen von (3.3.7) in die Wirkung (3.4.2) und das anschließende Ausschreiben der Komponenten führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\; \Big(&\tilde{\mathcal{F}}^I_{mr}\tilde{\mathcal{F}}^J_{ns}\; \eta^{mn}\eta^{rs} + \tilde{\mathcal{F}}^I_{ma}\tilde{\mathcal{F}}^J_{nb}\; \eta^{mn}\delta^{ab} \\ &+ \tilde{\mathcal{F}}^I_{ar}\tilde{\mathcal{F}}^J_{bs}\; \delta^{ab}\eta^{rs} + \tilde{\mathcal{F}}^I_{ac}\tilde{\mathcal{F}}^J_{bd}\; \delta^{ab}\delta^{cd}\Big)\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^6x.\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Nachdem wir die Terme in der Wirkung $\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ in der beschriebenen Weise umgeformt haben, können wir die Vierbeine $e_\mu{}^m$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit bzw. die Vielbeine $E_\alpha{}^a$ der internen Geometrie verwenden, um wieder zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ bzw. gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus zurück zu konvertieren. Dazu setzen wir Gleichung (3.3.9) in die Wirkung (3.4.4) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\; \Big(&\tilde{\mathcal{F}}^I_{mr}\; e_\mu{}^m e_\rho{}^r\; \tilde{\mathcal{F}}^J_{ns}\; e_\nu{}^n e_\sigma{}^s\; g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} \\ &+ \tilde{\mathcal{F}}^I_{ma}\; e_\mu{}^m E_\alpha{}^a\; \tilde{\mathcal{F}}^J_{nb}\; e_\nu{}^n E_\beta{}^b\; g^{\mu\nu}G^{\alpha\beta} \\ &+ \tilde{\mathcal{F}}^I_{am}\; E_\alpha{}^a e_\mu{}^m\; \tilde{\mathcal{F}}^J_{bn}\; E_\beta{}^b e_\nu{}^n\; G^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} \\ &+ \tilde{\mathcal{F}}^I_{ac}\; E_\alpha{}^a E_\gamma{}^c\; \tilde{\mathcal{F}}^J_{bd}\; E_\beta{}^b E_\delta{}^d\; G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}\Big)\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^6x.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Das Einsetzen der Relation (3.3.9) impliziert also einen Koordinatenwechsel von den flachen Raumzeit-Koordinaten $\{x^m\}$ bzw. den flachen Koordinaten $\{y^a\}$ des Torus zu den gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ bzw. den gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus. Die Terme in Gleichung (3.4.5) lassen sich in diese

Koordinaten umschreiben, so dass die Wirkung $\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ schließlich die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\, \Big(& \mathcal{F}^I_{\mu\rho}\mathcal{F}^J_{\nu\sigma}\; g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \mathcal{F}^I_{\mu\alpha}\mathcal{F}^J_{\nu\beta}\; g^{\mu\nu}G^{\alpha\beta} \\ & + \mathcal{F}^I_{\alpha\mu}\mathcal{F}^J_{\beta\nu}\; g^{\mu\nu}G^{\alpha\beta} + \mathcal{F}^I_{\alpha\gamma}\mathcal{F}^J_{\beta\delta}\; G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}\Big)\, (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^6x,\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

mit den Definitionen:

$$\mathcal{F}^I_{\mu\nu} \equiv e_\mu{}^m e_\nu{}^n \tilde{\mathcal{F}}^I_{mn}, \tag{3.4.7}$$

$$\mathcal{F}^I_{\mu\alpha} \equiv e_\mu{}^m E_\alpha{}^a \tilde{\mathcal{F}}^I_{ma}, \tag{3.4.8}$$

$$\mathcal{F}^I_{\alpha\mu} \equiv E_\alpha{}^a e_\mu{}^m \tilde{\mathcal{F}}^I_{am}, \tag{3.4.9}$$

$$\mathcal{F}^I_{\alpha\beta} \equiv E_\alpha{}^a E_\beta{}^b \tilde{\mathcal{F}}^I_{ab}. \tag{3.4.10}$$

Nachdem wir die Wirkung $\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ in eine Form gebracht haben, welche dem Produktansatz (2.2.1) für die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit entspricht, können wir uns der dimensionalen Reduktion zuwenden. Um die Wirkung zu reduzieren, setzen wir zunächst den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ in Gleichung (3.4.3) ein und berechnen die Komponenten $\tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{m}\hat{r}}$. Die Komponenten mit den passenden Indizes lassen sich dann in den Definitionen (3.4.7) bis (3.4.10) verwenden, um die Terme $\mathcal{F}^I_{\mu\nu}$ usw. zu reduzieren. Das Einsetzen der auf diese Weise reduzierten Ausdrücke (3.4.7) bis (3.4.10) in die Wirkung (3.4.6) und das anschließende Integrieren über die internen Koodinaten $\{y^\alpha\}$ ergibt die reduzierte Teilwirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

Wir reduzieren zunächst die Ausdrücke (3.4.7) bis (3.4.10) und dokumentieren die einzelnen Rechenschritte:

1. Wir starten mit der Berechnung des Terms $\mathcal{F}^I_{\mu\nu}$. Das Einsetzen der Komponenten $\tilde{\mathcal{F}}^I_{mr}$ aus Gleichung (3.4.3) in die Definition (3.4.7) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\mathcal{F}^I_{\mu\rho} = e_\mu{}^m e_\rho{}^r\; \tilde{\mathcal{F}}^I_{mr} = e_\mu{}^m e_\rho{}^r\; \hat{e}_m{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_n{}^{\hat{\sigma}}\; \tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}. \tag{3.4.11}$$

Der Reduktionsansatz (2.2.9) besagt, dass die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ unabhängig sind, so dass die Komponenten $\tilde{\mathcal{F}}^I_{\alpha\beta}$ a priori verschwinden. Aus dem Ansatz (3.2.8) entnehmen wir die Komponenten $\hat{e}_m{}^\mu = e_m{}^\mu$ und $\hat{e}_m{}^\alpha = e_m{}^\rho V_\rho{}^\alpha$ des inversen Vielbeins $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ und setzen sie in Gleichung (3.4.11) ein:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^I_{\mu\rho} &= e_\mu{}^m e_\rho{}^r \{ e^\nu_m e_r{}^\sigma \tilde{\mathcal{F}}^I_{\nu\sigma} - e_m{}^\rho V^\alpha_\rho e_r{}^\sigma \tilde{\mathcal{F}}^I_{\alpha\sigma} - e_m{}^\nu e_r{}^\rho V^\beta_\rho \tilde{\mathcal{F}}^I_{\nu\beta}\} \\ &= \tilde{\mathcal{F}}^I_{\mu\rho} - V^\alpha_\mu \tilde{\mathcal{F}}^I_{\alpha\rho} - V^\beta_\rho \tilde{\mathcal{F}}^I_{\mu\beta},\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

wobei wir die Identität $e_\mu{}^m e_m{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ verwendet haben. Wir nutzen nun die Antisymmetrie $\tilde{\mathcal{F}}^I_{\alpha\rho} = -\tilde{\mathcal{F}}^I_{\rho\alpha}$ der Komponenten der Feldstärke $\tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ aus und setzen den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ in Gleichung (3.4.12) ein. Dies führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^I_{\mu\rho} &= (\partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}^I_\rho) - (\partial_\rho \tilde{\mathcal{A}}^I_\mu) - V^\alpha_\rho(\partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) + V^\alpha_\mu(\partial_\rho \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) \\ &= \partial_\mu(\tilde{\mathcal{A}}^I_\rho - V^\alpha_\rho \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) - \partial_\rho(\tilde{\mathcal{A}}^I_\mu - V^\alpha_\mu \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) + (\partial_\mu V^\alpha_\rho - \partial_\rho V^\alpha_\mu)\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha.\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Bei Betrachtung der Gleichung (3.4.13) erkennen wir, dass sich die Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ bei der dimensionalen Reduktion in einer bestimmten Weise anordnen. In Kapitel 5 werden wir diese Struktur eingehender untersuchen und die Begründung für die Organisation der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nachliefern. An dieser Stelle definieren wir die Vektorfelder A_μ^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie zunächst in der folgenden Weise [8]:

$$A_\mu^I \;\equiv\; \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - V_\mu^\alpha \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \tag{3.4.14}$$

und setzen die Definition (3.4.14) in Gleichung (3.4.13) ein. Dies führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\mathcal{F}_{\mu\rho}^I = F_{\mu\rho}^I + V_{\mu\rho}^\alpha \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I, \tag{3.4.15}$$

wobei die Vektorfeldstärken $V_{\mu\nu}^\alpha$ durch Gleichung (3.2.13) gegeben und die Feldstärken $F_{\mu\nu}^I$ der Vektorfelder A_μ^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie folgender Maßen definiert sind:

$$F_{\mu\nu}^I \;\equiv\; \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I. \tag{3.4.16}$$

2. Wir fahren mit der Berechnung des Terms $\mathcal{F}_{\mu\alpha}^I$ fort, indem wir die Komponenten $\tilde{\mathcal{F}}_{ma}^I$ aus Gleichung (3.4.3) in die Definition (3.4.8) einsetzen:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\alpha} &= e_\mu{}^m E_\alpha{}^a \tilde{\mathcal{F}}_{ma} \\ &= e_\mu{}^m E_\alpha^a \; \hat{e}_m{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_a{}^{\hat{\sigma}} \; \tilde{\mathcal{F}}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}.\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein entnehmen wir, dass für die Komponenten $\hat{e}_a{}^\sigma = 0$ und $\hat{e}_a^\beta = E_a{}^\beta$ gilt. Der Ansatz (2.2.9) besagt darüber hinaus, dass die Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ unabhängig sind, so dass der Term $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}$ a priori verschwindet. Wir setzten diese Relationen in Gleichung (3.4.17) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\alpha} &= e_\mu{}^m E_\alpha{}^a e_m{}^\nu E_a{}^\beta \tilde{\mathcal{F}}_{\nu\beta} \\ &= \delta_\mu{}^\nu \delta_\alpha{}^\beta \tilde{\mathcal{F}}_{\nu\beta} = \tilde{\mathcal{F}}_{\nu\alpha}.\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Nach dem Einsetzen des Reduktionsansatzes (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ sowie des Ansatzes (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_m{}^{\hat{\mu}}$ erhält man also den folgenden Ausdruck:

$$\mathcal{F}_{\mu\alpha} = \partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I. \tag{3.4.19}$$

3. Die Berechnung des Terms $\mathcal{F}_{\alpha\mu}$ verläuft in vollständiger Analogie zur Reduktion des Ausdrucks $\mathcal{F}_{\mu\alpha}$. Aufgrund der Antisymmetrie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\alpha} = -\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\alpha}$ der Komponenten der Feldstärke $\tilde{\mathcal{F}}_2^I$ erhält man bei der Berechnung des Terms $\mathcal{F}_{\alpha\mu}$ allerdings einen Vorzeichenwechsel:

$$\mathcal{F}_{\alpha\mu} = -\partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I. \tag{3.4.20}$$

Dieses Vorzeichen ist nach dem Einsetzen von (3.4.20) in die Wirkung (3.4.6) nicht mehr bemerkbar, so dass die Terme $\mathcal{F}_{\alpha\mu}$ und $\mathcal{F}_{\mu\alpha}$ zu zwei identischen Beiträgen in der Wirkung (3.4.6) führen.

4. Zum Abschluss dieses Abschnitts studieren wir die Reduktion des Terms $\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$. Das Einsetzen der Komponenten $\tilde{\mathcal{F}}^I_{ac}$ aus Gleichung (3.4.3) in die Definition (3.4.10) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\gamma} &= E_\alpha{}^a E_\gamma{}^c \tilde{\mathcal{F}}^I_{ac} \\ &= E_\alpha{}^a E_\gamma{}^c \hat{e}_a{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_c{}^{\hat{\sigma}} \tilde{\mathcal{F}}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}. \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Durch den Reduktionsansatz (3.2.8) wird begründet, dass für die Komponenten $\hat{e}_a{}^\nu = 0$ und $\hat{e}_a{}^\alpha = E_a{}^\alpha$ gilt. Das Einsetzen dieser Relationen in Gleichung (3.4.21) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\gamma} &= E_\alpha{}^a E_\gamma{}^c E_a{}^\beta E_c{}^\delta \tilde{\mathcal{F}}_{\beta\delta} \\ &= \delta_\alpha{}^\beta \delta_\gamma{}^\delta \tilde{\mathcal{F}}_{\beta\delta} = \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\gamma} = 0, \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

wobei wir den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder ausgenutzt haben, welcher besagt, dass die Komponenten $\tilde{\mathcal{A}}^I_{\alpha\beta}$ nicht von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ abhängen und damit $\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha\gamma} = 0$ gilt.

Nachdem wir die Terme (3.4.7) bis (3.4.10) reduziert haben, können wir diese in die Wirkung (3.4.6) einsetzen, über die internen Koordinaten integrieren und erhalten auf diese Weise die reduzierte Teilwirkung $S_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Die reduzierte Wirkung setzt sich aus den kinetischen Termen $S_{\mathcal{A}_\alpha}$ der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ und einer Wirkung $S_{A^I_1}$ zusammen, welche eine Summe von Maxwell-Termen darstellt. Nach der Reskalierung (3.2.2) bzw. (3.2.20) nimmt die Teilwirkung $S_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie die folgende Form an [8]:

$$S_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1} = S_{A^I_1} + S_{\mathcal{A}_\alpha}, \tag{3.4.23}$$

wobei $S_{A^I_1}$ und $S_{\mathcal{A}_\alpha}$ folgender Maßen definiert sind:

$$S_{A^I_1} = \frac{1}{4} \int \sqrt{-g}\; e^\phi e^{-\varphi}\; (F^I_{\mu\rho} + V^\alpha_{\mu\rho} \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha)(F^J_{\nu\sigma} + V^\beta_{\nu\sigma} \tilde{\mathcal{A}}^J_\beta)\; g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^4x, \tag{3.4.24}$$

$$S_{\mathcal{A}_\alpha} = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}\; e^\phi e^\varphi\; (\partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha)(\partial_\nu \tilde{\mathcal{A}}^J_\beta)\; g^{\mu\nu} M^{\alpha\beta}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^4x. \tag{3.4.25}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts fassen wir die Leitlinien der Argumentation und die Ergebnisse der Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ zusammen. Für die Reduktion der Wirkung (3.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie haben wir die selbe Methode verwendet, welche wir bereits bei der Reduktion der Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ verwendet haben. In einem ersten Schritt haben wir die Vielbeine $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 verwendet, um zu flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{\hat{x}^{\hat{m}}\}$ zu transformieren. Anschließend haben wir die Diagonalform der Inversen $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors ausgenutzt, um die Terme in der Teilwirkung der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. Nachdem wir die Terme in dieser Weise umgeformt hatten, haben wir die Vierbeine $e_\mu{}^m$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit und die Vielbeine $E_\alpha{}^a$

des Torus verwendet, um zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten x^μ bzw. gekrümmten Koordinaten y^α des Torus zurück zu konvertieren. Auf diese Weise erhielt die Wirkung (3.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie eine Form, welche dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit M_6 entspricht.

Nachdem wir die Wirkung (3.1.5) in die gewünschte Form gebracht hatten, haben wir den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ sowie die Ansätze (3.2.8) und (2.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ und das Dilaton $\hat{\phi}$ in die Wirkung eingesetzt. Dabei haben wir gesehen, dass sich die Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise angeordnet haben, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. Wir haben die Teilwirkung (3.1.5) der sechsdimensionalen Theorie in Termen dieser redefinierten Felder geschrieben, über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ integriert und als Ergebnis die Wirkung $S_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ der reduzierten, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erhalten. Dabei hat sich herausgestellt, dass die dimensionale Reduktion zusätzliche Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ generierte, welche vor der Kompaktifizierung in der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nicht vorhanden gewesen sind. Als Ergebnis der Reduktion erhielten wir die kinetischen Terme $S_{\mathcal{A}_\alpha}$ dieser Skalarfelder sowie eine Wirkung $S_{A_1^I}$, welche eine Summe von Maxwell-Wirkungen darstellt.

Zu diesem Zeitpunkt haben wir lediglich gezeigt, dass sich die Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der dimensionalen Reduktion in einer bestimmten Weise anordnen und dass diese Anordnung eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie impliziert. Wir haben bisher noch nicht hinreichend begründet, aus welchem Grund sich die Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ in der beschriebenen Weise organisieren. Zudem haben wir vorweggenommen, dass es sich bei den neuen Feldern $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$, welche durch die dimensionale Reduktion generiert werden, um Skalarfelder handelt. In Kapitel fünf werden wir analysieren, in welcher Weise sich die Symmetrietransformationen der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit nicht triviale Symmetrietransformationen der Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ induzieren und dass die Vektorfelder A_μ^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter diesen Transformationen invariant sind. Zudem werden wir zeigen, dass die Felder A_μ^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter Raumzeit-Diffeomorphismen tatsächlich als Vektoren und die Felder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ als Skalare transformieren.

3.5 Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{ska}$ der Skalarfelder

Die Wirkung (3.1.6) setzt sich aus der Wirkung $\hat{S}_{\hat{\phi}}$ des Dilatons $\hat{\phi}$ und der Wirkung $\hat{S}_{\hat{\theta}}$ der Skalarfelder $\hat{\theta}^q$, $q = 1, ..., 80$ zusammen:

$$\hat{S}_{ska} = \hat{S}_{\hat{\phi}} + \hat{S}_{\hat{\theta}}. \tag{3.5.1}$$

Wir werden die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.6) am Beispiel der Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{\hat{\phi}}$ des Dilatons studieren, da die Kompaktifizierung der Teilwirkung $\hat{S}_{\hat{\theta}}$ in vollständiger Analogie dazu verläuft. Die Reskalierung (3.2.2) der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit führt auf den Term (3.2.7), welchen wir der Wirkung $\hat{S}_{\hat{\phi}}$ des Dilatons zuschlagen können. Danach nimmt $\hat{S}_{\hat{\phi}}$ die folgende Form an:

$$\hat{S}_{\hat{\phi}} = -\frac{1}{4}\int d\hat{\phi}\wedge {}^*d\hat{\phi} = \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\ \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\ (\partial_{\hat{\mu}}\hat{\phi})\ (\partial_{\hat{\nu}}\hat{\phi})\ d^6x. \tag{3.5.2}$$

Wir setzen den Reduktionsansatz (2.2.11) für die Inverse der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit in Gleichung (3.5.2) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{4}\int \sqrt{-\hat{g}}\ \Big(& g^{\mu\nu}(\partial_\mu\hat{\phi})(\partial_\nu\hat{\phi}) - V^{\mu\beta}(\partial_\mu\hat{\phi})(\partial_\beta\hat{\phi}) - V^{\nu\alpha}(\partial_\alpha\hat{\phi})(\partial_\nu\hat{\phi}) \\ &+ G^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\hat{\phi})(\partial_\beta\hat{\phi}) + V^{\rho\alpha}V^{\beta}_{\rho}(\partial_\alpha\hat{\phi})(\partial_\beta\hat{\phi})\Big) d^6x.\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Der Reduktionsansatz (2.2.8) für das Dilaton besagt, dass das Skalarfeld $\hat{\phi}$ von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ unabhängig ist. Das Einsetzen des Ansatzes (2.2.8) in Gleichung (3.5.3), das Reskalieren (3.2.20) der Metrik $g_{\mu\nu}$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit und das anschließende Integrieren über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ führt auf das folgende Ergebnis [8]:

$$S_\phi = \frac{1}{4}\int \sqrt{-g}\ (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)d^4x. \tag{3.5.4}$$

Die Reduktion der Skalarfelder ist insofern als einfach zu bezeichnen, als dass der Reduktionsansatz direkt auf das gewünschte Ergebnis führt und die Kompaktifizierung keine neuen Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert. Die kinetischen Terme der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie werden durch die dimensionale Reduktion in natürlicher Weise zu kinetischen Termen der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Aus diesem Grund können wir die Wirkung S_θ, welche aus der Kompaktifizierung der Wirkung $\hat{S}_{\hat{\theta}}$ der Skalarfelder $\hat{\theta}^q$, $q = 1, ..., 80$ hervorgeht, ohne eine lange Rechnung angeben:

$$S_\theta = -\frac{1}{32}\int \sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}(\partial_\mu\mathcal{M}^{-1}_{IJ})(\partial_\nu\mathcal{M}^{IJ})d^4x. \tag{3.5.5}$$

3.6 Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{top}$ des topologischen Sektors

Die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.7) des topologischen Sektors ist relativ unkompliziert, weil in topologischen Termen per Definition kein metrischer Tensor involviert ist. Für die dimensionale Reduktion der Wirkung (3.1.7) ist es daher hinreichend, den Reduktionsansatz (3.2.6) für die 2-Form $\hat{B}_2$ sowie den Ansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ einzusetzen und die Abhängigkeit von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ auszuintegrieren. Aufgrund der Antisymmetrie verschwinden Dachprodukte $dx^\mu \wedge ... \wedge dx^\nu$ mit mehr als vier Basisformen dx^μ, so dass sich die Terme der reduzierten Wirkung durch einfaches Ausmultiplizieren ergeben.

Die Wirkung $\hat{S}_{top}$ des topologischen Sektors der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ist gegeben durch:

$$\hat{S}_{top} = \int \hat{B}_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2^I \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ}. \tag{3.6.1}$$

Wir setzen den Reduktionsansatz (3.2.6) für die 2-Form $\hat{B}_2$ sowie den Ansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ in die Wirkung (3.6.1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{top} = &- \int \hat{B}_2' \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\beta^J \wedge dy^\alpha \wedge dy^\beta \, \mathcal{L}_{IJ} \\ &- 2 \int \hat{B}_{1\alpha}' \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2'^I \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\beta^J \wedge dy^\alpha \wedge dy^\beta \, \mathcal{L}_{IJ} \\ &+ \frac{1}{2} \int \hat{B}_{\alpha\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2'^I \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2'^J \wedge dy^\alpha \wedge dy^\beta \, \mathcal{L}_{IJ},\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

wobei wir die Notationen $\tilde{\mathcal{F}}_1'^I = \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I \, dx^\mu$, $\hat{B}_{1\alpha}' = \hat{B}_{\mu\alpha} \, dx^\mu$ und $\hat{B}_2' = \frac{1}{2} \hat{B}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu$ verwendet haben. Normieren wir das Maß auf dem Torus, so dass $\int \sqrt{G} \, dy^\alpha \wedge dy^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}$ gilt, reduziert sich der Ausdruck (3.6.2) zu:

$$\begin{aligned}S_{top} = - \int \hat{B}_2' \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\beta^J \, \varepsilon^{\alpha\beta} \, \mathcal{L}_{IJ} - 2 \int \varepsilon^{\alpha\beta} \, \hat{B}_{1\alpha}' \wedge \tilde{\mathcal{F}}_1'^I \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\beta^J \, \mathcal{L}_{IJ} \\ + \frac{1}{2} \int (\varepsilon^{\alpha\beta} \, \hat{B}_{\alpha\beta}) \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2'^I \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2'^J \, \mathcal{L}_{IJ}.\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Die dimensionale Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{top}$ des topologischen Sektors führt also auf drei verschiedene Terme, in welchen die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen. Bei der Reduktion der Wirkung (3.1.7) organisieren sich diese Komponenten allerdings nicht in der selben Weise, in welcher sie sich bei der Reduktion der Wirkung (3.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ organisiert haben. Vielmehr müssen die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Theorie nachträglich durch die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie ersetzt werden. An dieser Stelle lassen wir die topologischen Terme zunächst in der Form stehen, in welcher sie aus der dimensionalen Reduktion hervorgegangen sind.

3.7 Die Wirkung der masselosen D=4 Supergravitationstheorie

Wir präsentieren nun die Wirkung $S_{m^I=0}$ der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche sich durch die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.1) der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 ergeben hat [2]. Der bosonische Feldgehalt der vierdimensionalen Supergravitationstheorie besteht aus dem Graviton $g_{\mu\nu}$, $\mu = 0, ..., 3$, der 2-Form B_2, 28 Vektorfeldern A_μ^I, $I = 1, ..., 24$, $B_{\mu\alpha}$, ${V_\mu}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, dem Dilaton $\phi(x)$ und 134 weiteren Skalarfeldern φ, θ^q, $q = 1, ..., 80$, $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$, $\hat{B}_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$. Die reduzierte Wirkung $S_{m^I=0}$ setzt sich aus der Graviton-Dilaton-2-Form Wirkung

S_A, der Wirkung S_B der Vektorfelder, der Wirkung S_C der Skalarfelder und der Wirkung S_D des topologischen Sektors der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie zusammen:

$$S_{m^I=0} = S_A + S_B + S_C + S_D. \tag{3.7.1}$$

Die Metrik-Dilaton-2-Form Wirkung S_A ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_A &\equiv S_g + S_\phi + S_{B_2} \\ &= \frac{1}{4}\int \Big(R(x)^*1 - d\phi \wedge {}^*d\phi - 2\, e^{-2\phi}\, e^{-2\varphi}\, H_3 \wedge {}^*H_3 \Big). \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Die Wirkung S_B der Vektorfelder ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_B &\equiv S_V + S_{B_1} + S_{A_1^I} \\ &= -\frac{1}{2}\int \Big(e^{-2\phi}\ (H_{2\alpha} - \hat{B}_{\alpha\gamma}\, V_2{}^\gamma) \wedge {}^*(H_{2\beta} - \hat{B}_{\beta\delta}\, V_2{}^\delta)\, M^{\alpha\beta} \\ &\qquad + e^\phi\, e^{-\varphi}\, (F_2^I + \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I\, V_2{}^\alpha) \wedge {}^*(F_2^J + \tilde{\mathcal{A}}_\beta^J\, V_2{}^\beta)\, (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{8}\, e^{-\varphi}\, V_2{}^\alpha \wedge {}^*V_2{}^\beta\, M_{\alpha\beta} \Big). \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

Die Wirkung S_C der Skalarfelder ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_C &\equiv S_\theta + S_\varphi + S_M + S_{B_{\alpha\beta}} + S_{\mathcal{A}_\alpha} \\ &= \frac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{8}\, Tr(d\mathcal{M}^{-1} \wedge {}^*d\mathcal{M}) - d\varphi \wedge {}^*d\varphi + \frac{1}{4}\, Tr(dM^{-1} \wedge {}^*dM) \\ &\qquad - e^{-2\phi}\, e^{2\varphi}\, d\hat{B}_{\alpha\gamma} \wedge {}^*d\hat{B}_{\beta\delta}\, M^{\alpha\beta}\, M^{\gamma\delta} \\ &\qquad - 2\, e^\phi\, e^\varphi\, d\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \wedge {}^*d\tilde{\mathcal{A}}_\beta^J\, M^{\alpha\beta}\, (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} \Big). \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

Die Wirkung S_D des topologischen Sektors ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_D &\equiv S_{top} \\ &= -\int \tilde{B}_2' \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\beta^J\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} - 2\int \hat{B}_{1\alpha}' \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_1'^I \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_\beta^J\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\int \hat{B}_{\alpha\beta} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_1'^I \wedge d\tilde{\mathcal{A}}_1'^J\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ}. \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

Die Signatur der Metrik $g_{\mu\nu}$ ist durch $(-+++)$, das Volumenelement durch ${}^*1 = \sqrt{-g}\, d^4x$ gegeben und für p-Formen $(p \leq 4)$ verwenden wir die Konvention:

$$F_p = \frac{1}{p!} F_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \tag{3.7.6}$$

mit dem Hodge-Dualen definiert durch:

$${}^*F_p = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{p!(4-p)} F_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\mu_{p+1} \dots \mu_4} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_4}. \tag{3.7.7}$$

Das Krümmungsskalar in vier Dimensionen wird mit $R(x)$ bezeichnet und durch Kontraktion der Inversen $g^{\mu\nu}$ der Metrik mit dem Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ gebildet:

$$R(x) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{3.7.8}$$

Die Vektorfelder A_1^I, $B_{1\alpha}$ und V_1^α der vierdimensionalen Supergravitationstheorie sind durch die folgenden Definitionen gegeben:

$$A_1^I \equiv A_\mu \, dx^\mu, \quad B_{1\alpha} \equiv B_{\mu\alpha} \, dx^\mu, \quad V_1{}^\alpha \equiv V_\mu{}^\alpha \, dx^\mu, \tag{3.7.9}$$

wobei die Komponenten der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie in der folgenden Weise durch die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie definiert sind:

$$A_\mu^I = \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - V_\mu{}^\alpha \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I, \tag{3.7.10}$$

$$B_{\mu\alpha} = \hat{B}_{\mu\alpha} + V_\mu{}^\beta \hat{B}_{\alpha\beta} \tag{3.7.11}$$

und $V_{\mu\alpha}$ Einträge der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit mit gemischten Indizes bezeichnen. Die Feldstärken F_2^I, $H_{2\alpha}$ und $V_2{}^\alpha$ der Vektorfelder A_1^I, $B_{1\alpha}$ und $V_1{}^\alpha$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie sind folgender Maßen definiert:

$$F_2^I \equiv dA_1^I, \quad H_{2\alpha} \equiv dB_{1\alpha}, \quad V_2{}^\alpha \equiv dV_1^\alpha. \tag{3.7.12}$$

Die 2-Form B_2 ist durch die folgende Definition gegeben:

$$B_2 \equiv \frac{1}{2} \, B_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{3.7.13}$$

wobei die Komponenten $B_{\mu\nu}$ der 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie in der folgenden Weise durch die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie definiert sind:

$$B_{\mu\nu} \equiv \hat{B}_{\mu\nu} + V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha} - V_\mu{}^\alpha V_\nu{}^\beta \hat{B}_{\alpha\beta}. \tag{3.7.14}$$

Die verallgemeinerte Feldstärke der 2-Form B_2 ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$H_3 \equiv dB_2 - \frac{1}{2} B_{1\alpha} \wedge dV_1^\alpha - \frac{1}{2} V_1^\alpha \wedge dB_{1\alpha}. \tag{3.7.15}$$

Die Formen $\tilde{\mathcal{F}}_2'^I$, $\hat{B}_2'$ und $\hat{B}_{1\alpha}'$, welche in den topologischen Termen erscheinen, sind durch die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie definiert:

$$\tilde{\mathcal{F}}_2'^I \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}_\nu^I - \partial_\nu \tilde{\mathcal{A}}_\nu^I) \, dx^\alpha \wedge dx^\beta, \tag{3.7.16}$$

$$\hat{B}_2' \equiv \frac{1}{2} \hat{B}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{3.7.17}$$

$$\hat{B}_{1\alpha}' \equiv \hat{B}_{\mu\alpha} \, dx^\mu, \tag{3.7.18}$$

wobei die $\hat{B}_{\mu\nu}$, $\hat{B}_{\mu\alpha}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ und der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bezeichnen. Die Matrix $\mathcal{M}_{IJ}$ wird durch die skalaren Felder $\theta^q(x)$, $q = 1, ..., 80$ parametrisiert und lässt sich durch eine $O(4,20)$-wertige Matrix $\mathcal{V}$ ausdrücken:

$$\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{V}^T \mathcal{V}. \tag{3.7.19}$$

Die Matrizen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{V}$ genügen den folgenden Relationen:

$$\mathcal{V}\mathcal{L}\mathcal{V}^T = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{M}^T = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{M}^T = \mathcal{M}, \tag{3.7.20}$$

wobei $\mathcal{L}$ die $O(4, 20)$-Metrik bezeichnet. Die kinetischen Terme der Skalarfelder $\theta^q(x)$, $q = 0, ..., 80$ lassen sich unter Verwendung dieser Definitionen in der folgenden Weise schreiben:

$$\frac{1}{32}\int e^{-2\phi}\mathrm{Tr}(d\mathcal{M}^{-1*}d\mathcal{M})) = -\frac{1}{32}\int \sqrt{-g}\; e^{-2\phi}(\partial_\mu \mathcal{M}^{-1}_{IJ})(\partial^\mu \mathcal{M}^{IJ})d^6x. \tag{3.7.21}$$

Die Matrix $M_{\alpha\beta}$ erhält man nach dem Herausskalieren der Wurzel $\sqrt{G}$ aus der Metrik $G_{\alpha\beta}$ der internen Geometrie. Der Term $Tr(dM^{-1} \wedge {}^*dM)$ lässt sich dann in der folgenden Art und Weise schreiben:

$$\frac{1}{16}\int Tr(dM^{-1} \wedge {}^*dM) = -\frac{1}{16}\int g^{\mu\nu}(\partial_\mu M^{\alpha\beta})(\partial_\nu M_{\alpha\beta}). \tag{3.7.22}$$

Die Kaluza-Klein Reduktion der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 generiert einerseits neue *Skalar-* und *Vektorfelder*, andererseits führt sie zu einer *Korrektur der Feldstärke* der 2-Form B_2 der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Im fünften Kapitel werden wir studieren, in welcher Weise sich die Symmetrietransformationen der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion Symmetrietransformationen der vierdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren, unter welchen die verallgemeinerte Feldstärke (3.7.15) der 2-Form B_2 invariant ist.

Die Struktur der Wirkung (3.7.3) der Vektorfelder deutet bereits auf einen höherdimensionalen Ursprung der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie hin. J. Schön und M. Weidner haben gezeigt [21], dass die kinetischen Terme der Vektorfelder einer masselosen, vierdimensionalen N=4 Supergravitationstheorie im Allgemeinen in der folgenden Form geschrieben werden können:

$$S_B = -\frac{1}{4}\int \sqrt{g}\,\big(\,\mathrm{Im}(\tau)M_{MN}F^M_{\mu\nu}\;F^{N\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tau)\eta_{MN}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^M_{\mu\nu}\;F^N_{\rho\sigma}\,\big)\,d^4x, \tag{3.7.23}$$

wobei $F^M_{\mu\nu}$ die Feldstärken der Vektorfelder A^M_μ und τ eine komplexe Zahl mit $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ bezeichnen.

Für den Vergleich der Wirkung (3.7.1) mit der Literatur ist es daher notwendig, die Felder A^I_μ, $B_{\mu\alpha}$ und ${V_\mu}^\alpha$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie in einem Vektor A^M_μ zusammenzufassen, dessen Index M über multiple Indizes läuft und in dessen Feldstärke $F^M_{\mu\nu}$ die Feldstärken $F^I_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu\alpha}$ und $V^\alpha_{\mu\nu}$ der Vektorfelder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen:

$$A^M_\mu \equiv \begin{pmatrix} {V_\mu}^\alpha \\ B_{\mu\alpha} \\ A^I_\mu \end{pmatrix}, \qquad F^M_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} V^\alpha_{\mu\nu} \\ H_{\mu\nu\alpha} \\ F^I_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{3.7.24}$$

Die Maxwell-Terme in der Wirkung (3.7.3) der Vektorfelder lassen sich dann ausmultiplizieren und in eine Form bringen, welche die Bestimmung der Koeffizienten-Matrix M_{MN} ermöglicht [2, 25]. Für den Vergleich mit der Literatur ist es darüber hinaus notwendig, die Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$, $\hat{B}_{\mu\alpha}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, welche in der Wirkung (3.7.5) der topologischen Terme erscheinen, durch die Felder $B_{\mu\nu}$, $B_{\mu\alpha}$ und A_μ^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie zu ersetzen. Diese Substitution erlaubt es, die Wirkung (3.7.5) der topologischen Terme vollständig auszuarbeiten und in eine Form zu bringen, welche die Bestimmung der Koeffizienten-Matrix η_{MN} und damit den Vergleich mit der Wirkung (3.7.23) erlaubt. Die 2-Form B_2 kann durch das Ausnutzen ihrer Bewegungsgleichung dualisiert werden und erscheint anschließend als Skalarfeld in der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

Kapitel 4

Kaluza-Klein Reduktion der massiven D=6 Supergravitationstheorie

Dieses Kapitel thematisiert die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2. Wir haben im zweiten Kapitel diskutiert, dass sich die Wirkung $\hat{S}_{m^I}$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie aus einem masselosen $\hat{S}_{m^I=0}$ und einem massiven Anteil $\delta\hat{S}_{m^I=0}$ zusammensetzt:

$$\hat{S}_{m^I} = \hat{S}_{m^I=0} + \delta\hat{S}_{m^I=0} \tag{4.0.1}$$

und im masselosen Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch ist mit der Wirkung (3.1.1) der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einer K3 Mannigfaltigkeit [23]. Im dritten Kapitel haben wir die dimensionale Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{m^I=0}$ der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie studiert, so dass wir uns in diesem Kapitel auf die Reduktion des massiven Anteils $\delta\hat{S}_{m^I=0}$ der Wirkung $\hat{S}_{m^I}$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie konzentrieren werden. Bevor wir mit der Kaluza-Klein Reduktion beginnen, geben wir den massiven Teil der Wirkung (2.1.1) explizit an:

$$\delta\hat{S}_{m^I=0} = \delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} + \delta\hat{S}_{top} + \delta\hat{S}_m, \tag{4.0.2}$$

wobei $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$, $\delta\hat{S}_{top}$ und $\delta\hat{S}_m$ folgender Maßen definiert sind:

$$\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = -2\int \tilde{\mathcal{F}}_2^I \wedge^* \hat{B}_2 \, (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} \, m^J \, -2\int \hat{B}_2 \wedge^* \hat{B}_2 \, m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} \, m^J, \tag{4.0.3}$$

$$\delta\hat{S}_{top} = +2\int \hat{B}_2^2 \, m^I \mathcal{L}_{IJ} \, \tilde{\mathcal{F}}_2^J + \frac{4}{3}\int \hat{B}_2^3 \, m^I \mathcal{L}_{IJ} \, m^J, \tag{4.0.4}$$

$$\delta\hat{S}_m = -\frac{1}{2}\int m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} {}^* m^J. \tag{4.0.5}$$

Die Reduktion der Wirkung $\delta\hat{S}_{m^I}$ führt auf keine neuen Terme in der Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Der Reduktionsansatz (2.2.8) für die Skalarfelder $\hat{\theta}^q$, $q = 1, ..., 80$, welche die Matrix $(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}$

parametrisieren, besagt lediglich, dass die Felder θ^q nach der Kompaktifizierung nicht von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ abhängen. Die dimensionale Reduktion der beiden Teilwirkungen $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ und $\delta\hat{S}_{top}$ führt hingegen auf neue Terme in der Wirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie, so dass wir ihre Reduktion in diesem Kapitel ausführlich studieren werden. Zum Abschluss des Kapitels fassen wir die Ergebnisse zusammen und geben die vollständige Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie an, welche aus der Kaluza-Klein Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 hervorgegangen ist.

4.1 Reduktion der Wirkung $\hat{S}'_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ der Vektorfelder

Wir haben diskutiert, dass die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie im Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch ist mit der Wirkung (3.1.1) der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einer K3-Mannigfaltigkeit. In der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheint die Wirkung (3.1.5) als kinetischer Term der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$. In der massiven Supergravitationstheorie werden diese kinetischen Terme verallgemeinert und nehmen die folgende Form an:

$$\hat{S}'_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = -\frac{1}{2}\int \hat{\mathcal{F}}_2^I \ \wedge \ \hat{\mathcal{F}}_2^J \ (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}, \tag{4.1.1}$$

wobei $\hat{\mathcal{F}}_2^I$ die verallgemeinerten Vektorfeldstärken (2.1.5) bezeichnen. In der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie stellt die Wirkung (4.0.3) also den massiven Anteil der Wirkung $\hat{S}'_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ dar:

$$\hat{S}'_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = \hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} + \delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}. \tag{4.1.2}$$

Für die Kaluza-Klein Reduktion des massiven Anteils $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ der Wirkung (4.1.1) der Vektorfelder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie benutzen wir die selbe Methode, die wir bereits bei der Reduktion der Wirkung (3.1.5) der Vektorfelder der masselosen Supergravitationstheorie angewandt haben. In einem ersten Schritt verwenden wir die inversen Vielbeine $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit, um zu flachen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$ zu transformieren. Anschließend nutzen wir die Diagonalform der Inversen $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors aus, um die Terme in der Wirkung $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. In einem zweiten Schritt verwenden wir die Vierbeine $e_\mu{}^m$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit sowie die Vielbeine $E_\alpha{}^a$ der internen Geometrie, um zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ bzw. gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus zurückzutransformieren. Durch dieses Verfahren erhält die Wirkung $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ eine Form, in welcher die Terme gemäss ihrer Indexstruktur mit der Inversen $g^{\mu\nu}$ der Metrik der Raumzeit-Mannigfaltigkeit bzw. der Inversen $G^{\alpha\beta}$ der Metrik der internen Geomtrie kontrahieren. In einem dritten Schritt setzen wir die Reduktionsansätze (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$, (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$, (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ sowie (2.2.8) für das Dilaton $\hat{\phi}$ in die Wirkung $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ ein und integrieren über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$. Als Ergebnis erhalten wir die Wirkung $\delta S_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche aus der dimensionalen Reduktion der Teilwirkung (4.0.3) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie hervorgeht.

Bevor wir mit der Kaluza-Klein Reduktion beginnen, schreiben wir die Wirkung $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I}$ als Summe ihrer beiden Teilwirkungen $\delta\hat{S}_1$ und $\delta\hat{S}_2$:

$$\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}_1^I} = \delta\hat{S}_1 + \delta\hat{S}_2, \tag{4.1.3}$$

mit den Definitionen:

$$\delta\hat{S}_1 \equiv -2\int \hat{B}_2 \wedge {}^*\hat{B}_2 \; m^I(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\, m^J \tag{4.1.4}$$

und

$$\delta\hat{S}_2 \equiv -2\int \tilde{\mathcal{F}}_2^I \wedge {}^*\hat{B}_2 \; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\, m^J. \tag{4.1.5}$$

Wir beginnen mit der Reduktion der Wirkung $\delta\hat{S}_1$, indem wir die Relation (3.3.3) in die Wirkung (4.1.4) einsetzen. Durch das Einsetzen der Gleichung (3.3.3) wird ein Wechsel zu flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$ induziert:

$$\delta\hat{S}_1 = \int \sqrt{-\hat{g}}\;\; \hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}\; \hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}}\; \hat{B}_{\hat{m}\hat{r}}\; \hat{B}_{\hat{n}\hat{s}}\; m^I(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^6x, \tag{4.1.6}$$

mit der Definition:

$$\hat{B}_{\hat{m}\hat{n}} \equiv \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}} \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \tag{4.1.7}$$

In den flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$ können wir die Diagonalform (3.3.7) der Inversen $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors ausnutzen, um die Terme in der Wirkung (4.1.6) in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. Das Einsetzen der Relation (3.3.7) in die Wirkung (4.1.6) führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\delta\hat{S}_1 = \int \sqrt{-\hat{g}}\,\Big(&\eta^{mn}\,\eta^{rs}\,\hat{B}_{mr}\,\hat{B}_{ns} + \eta^{mn}\,\delta^{ab}\,\hat{B}^{ma}\,\hat{B}_{nb}\\ &+ \delta^{ab}\,\eta^{mn}\,\hat{B}_{am}\,\hat{B}_{bn} + \delta^{ab}\,\delta^{cd}\,\hat{B}_{ac}\,\hat{B}_{bd}\Big)\, m^I(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\, m^J\, d^6x.\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Nachdem wir die Terme in der Wirkung $\delta\hat{S}_1$ in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Koordinaten aufgeteilt haben, können wir die Vierbeine $e_\mu{}^m$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit bzw. die Vielbeine $E_\alpha{}^a$ der internen Geomtrie verwenden, um wieder zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^\mu\}$ bzw. gekrümmten Koordinaten $\{y^\alpha\}$ des Torus T^2 zurück zu konvertieren. Das Einsetzen der Relation (3.3.9) in die Wirkung (4.1.8) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\delta\hat{S}_1 = \int \sqrt{-\hat{g}}\,\Big(&g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\; e_\mu{}^m e_\rho{}^r\, \hat{B}_{mr}\, e_\nu{}^n e_\sigma{}^s\, \hat{B}_{ns}\\ &+ g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta}\; e_\mu{}^m E_\alpha{}^a\, \hat{B}_{ma}\, e_\nu{}^n E_\beta{}^b\, \hat{B}_{nb}\\ &+ G^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}\; E_\alpha{}^a e_\mu{}^m\, \hat{B}_{am}\, E_\beta{}^b e_\nu{}^n\, \hat{B}_{bn}\\ &+ G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta}\; E_\alpha{}^a E_\gamma{}^c\, \hat{B}_{ac}\, E_\beta{}^b E_\delta{}^d\, \hat{B}_{bd}\Big)\; m^I(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^6x.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Die Relation (3.3.9) induziert also einen Koordinatenwechsel, nach welchem die Wirkung (4.1.9) die folgende Form annimmt [1]:

$$\delta\hat{S}_1 = \int \sqrt{-\hat{g}} \left(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} C_{\mu\rho} C_{\nu\sigma} + g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} C_{\mu\alpha} C_{\nu\beta} \right. \\ \left. + G^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} C_{\alpha\mu} C_{\beta\nu} + G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} C_{\alpha\gamma} C_{\beta\delta} \right) m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\, m^J d^6x, \tag{4.1.10}$$

mit den Definitionen:

$$C_{\mu\nu} \equiv e_\mu{}^m e_\nu{}^n \hat{B}_{mn}, \tag{4.1.11}$$

$$C_{\mu\alpha} \equiv e_\mu{}^m E_\alpha{}^a \hat{B}_{ma}, \tag{4.1.12}$$

$$C_{\alpha\mu} \equiv E_\alpha{}^a e_\mu{}^m \hat{B}_{am}, \tag{4.1.13}$$

$$C_{\alpha\beta} \equiv E_\alpha{}^a E_\beta{}^b \hat{B}_{ab}. \tag{4.1.14}$$

Nachdem wir die Wirkung $\delta\hat{S}_1$ in eine Form gebracht haben, welche dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit Rechnung trägt, beschäftigen wir uns mit der Reduktion der Terme (4.1.11) bis (4.1.14). Zu diesem Zweck werden wir die Komponenten $\hat{B}_{mn}$ usw. mit den geeigneten Indizes aus Gleichung (4.1.7), in die Definitionen (4.1.11) bis (4.1.14) einsetzen, um die Terme $C_{\mu\nu}$ usw. zu berechnen. Im Anschluss werden wir diese Terme reduzieren, indem wir den Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ sowie den Ansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ einsetzen. Um die reduzierte Teilwirkung δS_1 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie zu erhalten, brauchen wir die auf diese Weise reduzierten Komponenten $C_{\mu\nu}$ usw. nur noch in die Wirkung (4.1.10) einzusetzen und über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ zu integrieren.

1. Wir beginnen mit der Reduktion des Terms $C_{\mu\nu}$. Das Einsetzen der Komponenten $\hat{B}_{mn}$ aus Gleichung (4.1.7) in die Definition (4.1.11) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$C_{\mu\nu} = e_\mu{}^m e_\nu{}^n \hat{B}_{mn} = e_\mu{}^m e_\nu{}^n e_m{}^\rho e_n{}^\sigma \hat{B}_{\rho\sigma}. \tag{4.1.15}$$

Der Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ besagt, dass für die Komponenten $\hat{e}_m{}^\mu = e_m{}^\mu$ und $\hat{e}_m{}^\alpha = e_m{}^\sigma V_\sigma{}^\alpha$ gilt. Das Einsetzen dieser Relationen in (4.1.15) ergibt:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= e_\mu{}^m e_\nu{}^n \Big(e_m{}^\rho e_n{}^\sigma \hat{B}_{\rho\sigma} - e_m{}^\rho e_n{}^\sigma V_\sigma{}^\gamma \hat{B}_{\rho\gamma} \\ &\quad - e_m{}^\rho V_\rho{}^\gamma e_n{}^\sigma \hat{B}_{\gamma\sigma} + e_m{}^\rho V_\rho{}^\gamma e_n{}^\sigma V_\sigma{}^\delta \hat{B}_{\gamma\delta} \Big) \\ &= \hat{B}_{\mu\nu} + V_\mu{}^\gamma \hat{B}_{\nu\gamma} - V_\nu{}^\gamma \hat{B}_{\mu\gamma} + V_\mu{}^\gamma V_\nu{}^\delta \hat{B}_{\gamma\delta}\,, \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

wobei wir die Identität $e_\mu{}^m e_m{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ verwendet haben. Wir können die Komponenten $\hat{B}_{\mu\alpha}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nun durch die Vektorfelder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen

[1] Die Hilfsfelder $C_{\mu\nu}$ usw. treten bei der dimensionalen Reduktion der masselosen Supergravitationstheorie nicht auf, statt dessen haben wir im dritten Kapitel mit den Hilfsfeldern $H_{\rho\mu\nu}$ usw. gearbeitet.

Supergravitationstheorie substituieren. Unter Verwendung der Definition (3.3.27) erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= \hat{B}_{\mu\nu} + V_{[\mu}{}^{\gamma} B_{\nu]\gamma} + V_{\mu}{}^{\gamma} V_{\nu}{}^{\delta} \hat{B}_{\gamma\delta} + V_{[\mu}{}^{\gamma} B_{\nu]\gamma} \\ &= B_{\mu\nu} + V_{[\mu}{}^{\gamma} B_{\nu]\gamma} \,, \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

wobei wir die Definition (3.3.35) für die 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie verwendet haben.

2. Für die Reduktion des Terms $C_{\mu\alpha}$ setzen wir zunächst die Komponenten B_{ma} aus Gleichung (4.1.7) in die Definition (4.1.12) ein:

$$C_{\mu\alpha} = e_{\mu}{}^{m} E_{\alpha}{}^{a} \hat{B}_{ma} = e_{\mu}{}^{m} E_{\alpha}{}^{a} \hat{e}_{m}{}^{\hat{\rho}} \hat{e}_{a}{}^{\hat{\sigma}} \hat{B}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}. \tag{4.1.18}$$

Das Einsetzen des Reduktionsansatzes (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} C_{\mu\alpha} &= e_{\mu}{}^{m} E_{\alpha}{}^{a} \Big(e_{m}{}^{\rho} E_{a}{}^{\gamma} \hat{B}_{\rho\gamma} - e_{m}{}^{\rho} V_{\rho}{}^{\gamma} E_{a}{}^{\delta} \hat{B}_{\gamma\delta} \Big) \\ &= \hat{B}_{\mu\alpha} - V_{\mu}{}^{\gamma} \hat{B}_{\gamma\alpha} \,, \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

wobei wir die Relation $e_{\mu}{}^{m} e_{m}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu}$ verwendet haben. Das Ausnutzen der Antisymmtrie der Komponenten $\hat{B}_{\alpha\beta}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie und der Definition (3.3.27) für das Vektorfeld $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie führt auf das folgende Ergebnis:

$$C_{\mu\alpha} = \hat{B}_{\mu\alpha} + V_{\mu}{}^{\gamma} \hat{B}_{\alpha\gamma} = B_{\mu\alpha}. \tag{4.1.20}$$

Die Reduktion des Terms $C_{\alpha\mu}$ erfolgt in vollständiger Analogie zur dimensionalen Reduktion des Terms $C_{\mu\alpha}$. Aufgrund der Antisymmetrie der Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ erhält man lediglich einen Vorzeichenwechsel, so dass die Reduktion des Terms $C_{\alpha\mu}$ den folgenden Ausdruck ergibt:

$$C_{\alpha\mu} = -\hat{B}_{\mu\alpha} - V_{\mu}{}^{\gamma} \hat{B}_{\alpha\gamma} = -B_{\mu\alpha}. \tag{4.1.21}$$

3. Zur Bestimmung des Terms $C_{\alpha\beta}$ setzen wir die Komponenten $\hat{B}_{ab}$ aus Gleichung (4.1.7) in die Definition (4.1.14) ein und erhalten:

$$C_{\alpha\beta} = E_{\alpha}{}^{a} E_{\beta}{}^{b} \hat{B}_{ab} = E_{\alpha}{}^{a} E_{\beta}{}^{b} \hat{e}_{a}{}^{\hat{\rho}} \hat{e}_{b}{}^{\hat{\sigma}} \hat{B}_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}. \tag{4.1.22}$$

Der Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ besagt, dass für die Komponenten $\hat{e}_{a}{}^{\rho} = 0$ und $\hat{e}_{a}{}^{\alpha} = E_{a}{}^{\alpha}$ gilt. Das Einsetzen dieser Relationen in Gleichung (4.1.22) führt auf das folgende Ergebnis:

$$C_{\alpha\beta} = E_{\alpha}{}^{a} E_{\beta}{}^{b} E_{a}{}^{\gamma} E_{b}{}^{\delta} \hat{B}_{\gamma\delta} = \hat{B}_{\alpha\beta}, \tag{4.1.23}$$

wobei wir die Identität $E_{\alpha}{}^{a} E_{a}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta}$ verwendet haben.

Nachdem wir die Terme (4.1.11) bis (4.1.14) reduziert haben, können wir sie in die Wirkung (4.1.10) einsetzen und über die Koordinaten $\{y^{\alpha}\}$ der internen Mannigfaltigkeit integrieren. Als Ergebnis erhalten wir die Wirkung δS_1

der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche aus der Reduktion der Teilwirkung $\delta\hat{S}_1$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie hervorgeht. Wir reskalieren die Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit entsprechend der Vorschrift (3.2.2), die Raumzeit-Metrik $g_{\mu\nu}$ entsprechend der Vorschrift (3.2.20) und verwenden die Relation (3.2.28). Die Teilwirkung δS_1 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie nimmt dann die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\delta S_1 = \int \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} e^{\phi} e^{-\varphi} (B_{\mu\rho} + V_{[\mu}{}^{\alpha} B_{\rho]\alpha})& \\ (B_{\nu\sigma} + V_{[\nu}{}^{\beta} B_{\sigma]\beta})\; m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x& \\ + 2 \int \sqrt{-g}\; e^{\phi}\; e^{\varphi}\; g^{\mu\nu} M^{\alpha\beta} B_{\mu\alpha} B_{\nu\beta}\; m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x& \\ + 2 \int \sqrt{-g}\; e^{\phi} e^{3\varphi} M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta} \hat{B}_{\alpha\gamma} \hat{B}_{\beta\delta}\; m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x.&\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Wir können nun mit der Reduktion der Wirkung $\delta\hat{S}_2$ fortfahren, indem wir die Relation (3.3.3) in die Wirkung (4.1.5) einsetzen:

$$\begin{aligned}\delta\hat{S}_2 &= \int \sqrt{-\hat{g}}\; \hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{g}^{\hat{\rho}\hat{\sigma}}\; \tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\; \hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^6x \\ &= \int \sqrt{-\hat{g}}\; \hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}} \hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}} \hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}} \hat{e}_{\hat{r}}{}^{\hat{\rho}}\; \tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\; \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}} \hat{e}_{\hat{s}}{}^{\hat{\sigma}}\; \hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^6x \\ &= \int \sqrt{-\hat{g}}\; \hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}} \hat{\eta}^{\hat{r}\hat{s}} \tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{m}\hat{r}}\; \hat{B}_{\hat{n}\hat{s}}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^6x,\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

wobei die Komponenten $\tilde{\mathcal{F}}^I_{\hat{m}\hat{n}}$ und $\hat{B}_{\hat{m}\hat{n}}$ durch die Definitionen (3.4.3) und (4.1.7) gegeben sind. Die Relation (3.3.3) induziert einen Wechsel zu flachen, sechsdimensionalen Koordinaten $\{x^{\hat{m}}\}$ und gibt uns die Möglichkeit, die Diagonalform der Inversen $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors auszunutzen, um die Terme in der Wirkung $\delta\hat{S}_2$ in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufzuteilen. Das Einsetzen der Definition (3.3.7) für die Inverse $\hat{\eta}^{\hat{m}\hat{n}}$ des Minkowski-Tensors in die Wirkung (4.1.25) führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\delta\hat{S}_2 = \int \sqrt{-\hat{g}}\; \Big(&\eta^{mn} \eta^{rs} \tilde{\mathcal{F}}^I_{mr} \hat{B}_{ns} + \eta^{mn} \delta^{ab} \tilde{\mathcal{F}}^I_{ma} \hat{B}_{nb} \\ &+ \delta^{ab} \eta^{mn} \tilde{\mathcal{F}}^I_{am} \hat{B}_{bn} + \delta^{ab} \delta^{cd} \tilde{\mathcal{F}}^I_{ac} \hat{B}_{bd}\Big) (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J\; d^6x.\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Nachdem wir die Wirkung $\delta\hat{S}_2$ in eine Form gebracht haben, welche dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht, verwenden wir die Vierbeine $e_{\mu}{}^{m}$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit sowie die Vielbeine $E_{\alpha}{}^{a}$ der internen Geometrie, um zu gekrümmten Raumzeit-Koordinaten $\{x^{\mu}\}$ bzw. gekrümmten Koordinaten $\{y^{\alpha}\}$ des Torus zurück zu konvertieren. Dies führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\delta\hat{S}_2 = \int \sqrt{-\hat{g}}\; \Big(&g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \mathcal{F}^I_{\mu\rho} C_{\nu\sigma} + g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} \mathcal{F}^I_{\mu\alpha} C_{\nu\beta} \\ &+ G^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \mathcal{F}^I_{\alpha\mu} C_{\beta\nu} + G^{\alpha\beta} G^{\gamma\delta} \mathcal{F}^I_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta}\Big)\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J\; d^6x,\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

wobei die Terme $\mathcal{F}^I_{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu}$ usw. durch die Definitionen (3.4.7) bis (3.4.10) sowie (4.1.11) bis (4.1.14) gegeben sind. Die Reduktion dieser Terme ist bereits ausführlich diskutiert worden, so dass wir die reduzierten Komponenten an dieser Stelle lediglich zusammenfassen:

$$\mathcal{F}^I_{\mu\nu} = F^I_{\mu\nu} + V^\alpha_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha \quad , \quad C_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + V^\alpha_{[\mu}B_{\nu]\alpha}, \tag{4.1.28}$$

$$\mathcal{F}^I_{\mu\alpha} = +\partial_\mu\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha \quad , \quad C_{\mu\alpha} = +B_{\mu\alpha}, \tag{4.1.29}$$

$$\mathcal{F}^I_{\alpha\mu} = -\partial_\mu\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha \quad , \quad C_{\alpha\mu} = -B_{\mu\alpha}, \tag{4.1.30}$$

$$\mathcal{F}^I_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad C_{\alpha\beta} = \hat{B}_{\alpha\beta}. \tag{4.1.31}$$

Wir können die reduzierten Terme (4.1.28) bis (4.1.31) nun in die Wirkung (4.1.27) einsetzen und über die internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ integrieren. Als Ergebnis erhalten wir die Wirkung δS_2 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche aus der dimensionalen Reduktion der Teilwirkung $\delta\hat{S}_2$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie hervorgeht. Nach der Reskalierung (3.2.2) der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit und der Reskalierung (3.2.20) der Metrik $g_{\mu\nu}$ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit nimmt die Wirkung δS_2 die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\delta S_2 = &\int \sqrt{-g}\; e^{\phi}e^{-\varphi}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(F^I_{\mu\rho} + V^\alpha_{\mu\rho}\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha)\;(B_{\nu\sigma} + V_{[\nu}{}^{\beta}B_{\sigma]\beta})d^4x \\ &+ 2\int \sqrt{-g}\; e^{\phi}e^{\varphi}g^{\mu\nu}M^{\alpha\beta}((\partial_\mu\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha)\;B_{\nu\beta})\;(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\;m^J d^4x,\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

wobei wir die Relation (3.2.28) verwendet haben.

Die Wirkung $\delta S_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche sich durch die dimensionale Reduktion des massiven Anteils $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ der Wirkung $\hat{S}'_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ der Vektorfelder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ergeben hat, setzt sich aus den beiden Teilwirkungen δS_1 und δS_2 zusammen:

$$\begin{aligned}\delta S_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1} = &\;\; \delta S_1 \;+\; \delta S_2 \\ = &\int \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}e^{\phi}e^{-\varphi}(B_{\mu\rho} + V_{[\mu}{}^{\alpha}B_{\rho]\alpha}) \\ &\qquad (B_{\nu\sigma} + V_{[\nu}{}^{\beta}B_{\sigma]\beta})\; m^I(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x \\ &+ \int \sqrt{-g}\; e^{\phi}e^{-\varphi}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(F^I_{\mu\rho} + V^\alpha_{\mu\rho}\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha)\;(B_{\nu\sigma} + V_{[\nu}{}^{\beta}B_{\sigma]\beta})d^4x \\ &+ 2\int \sqrt{-g}\; e^{\phi}\; e^{\varphi}\; g^{\mu\nu}M^{\alpha\beta}B_{\mu\alpha}B_{\nu\beta}\; m^I(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x \\ &+ 2\int \sqrt{-g}\; e^{\phi}e^{\varphi}g^{\mu\nu}M^{\alpha\beta}((\partial_\mu\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha)\;B_{\nu\beta})\;(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x \\ &+ 2\int \sqrt{-g}\; e^{\phi}e^{3\varphi}M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}\hat{B}_{\alpha\gamma}\hat{B}_{\beta\delta}\; m^I(\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x.\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

Nachdem wir den massiven Anteil $\delta\hat{S}_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ der Wirkung $\hat{S}'_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ reduziert haben, sind wir in der Lage die Wirkung $S'_{\mathcal{A}^I_1}$ anzugeben, welche sich durch die dimensionale Reduktion der Wirkung $\hat{S}'_{\tilde{\mathcal{A}}^I_1}$ der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ergeben hat. Die Teilwirkung $S'_{\mathcal{A}^I_1}$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie setzt sich aus der Wirkung $S'_{A_1^I}$ der Vektorfelder A_1^I, der Wirkung $S'_{\mathcal{A}_\alpha^I}$ der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ und einem skalaren Potential S'_{pot} zusammen:

$$S'_{\mathcal{A}_1^I} = S'_{A_1^I} + S'_{\mathcal{A}_\alpha^I} + S'_{pot}, \tag{4.1.34}$$

wobei die Teilwirkungen $S'_{A_1^I}$, $S'_{\mathcal{A}_\alpha^I}$ und S'_{pot} folgender Maßen definiert sind:

$$\begin{aligned} S'_{A_1^I} = \frac{1}{4} \int \sqrt{-g}\; e^{\phi} e^{-\varphi} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \Big((F^I_{\mu\rho} + V^\alpha_{\mu\rho} \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) + 2m^I (B_{\mu\rho} + V_{[\mu}{}^{\alpha} B_{\rho]\alpha}) \Big) \times \\ \Big((F^J_{\nu\sigma} + V^\beta_{\nu\sigma} \tilde{\mathcal{A}}^J_\beta) + 2m^J (B_{\nu\sigma} + V_{[\nu}{}^{\beta} B_{\sigma]\beta}) \Big) \, (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^4x, \end{aligned} \tag{4.1.35}$$

$$\begin{aligned} S'_{\mathcal{A}_\alpha^I} = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g}\; e^{\phi} e^{\varphi} g^{\mu\nu} M^{\alpha\beta} \Big((\partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) + 2m^I B_{\mu\alpha} \Big) \\ \Big((\partial_\nu \tilde{\mathcal{A}}^J_\beta) + 2m^J B_{\nu\beta} \Big) \, (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; d^4x, \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

$$S'_{pot} = 2 \int \sqrt{-g}\; e^{\phi} e^{3\varphi} M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta} \hat{B}_{\alpha\gamma}\; \hat{B}_{\beta\delta}\; m^I (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\; m^J d^4x. \tag{4.1.37}$$

In Analogie zur Kaluza-Klein Reduktion der Teilwirkung (3.1.5) der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erzeugt die Reduktion der Teilwirkung (4.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie eine Summe von Maxwell-Wirkungen der verschiedenen Vektorfelder und kinetische Terme der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$. Darüber hinaus führt die dimensionale Reduktion der Wirkung (4.1.1) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf eine Korrektur der *verallgemeinerten Feldstärke* der Vektorfelder A^I_1 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, auf eine *kovariante Ableitung* in der Wirkung (4.1.36) der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ und auf ein *skalares Potential* (4.1.37).

In vollständiger Analogie zur Reduktion der Teilwirkung (3.1.5) der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie organisieren sich die Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ und der 2-Form $\hat{B}_2$ bei der dimensionalen Reduktion der Teilwirkung (4.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in einer Weise, welche eine Redefinition der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie impliziert. Im fünften Kapitel werden wir zeigen, dass die Vektorfelder A^I_1, $B_{1\alpha}$ und die 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, über einfache Transformationseigenschaften verfügen und die Wirkung (4.1.34) unter diesen Transformationen invariant ist. Darüber hinaus werden wir studieren, in welcher Weise sich die Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass die Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ und die Vektorfelder $B_{\mu\alpha}$ unter den *induzierten Tensortransformationen* transformieren, und es sich in der Wirkung (4.1.36) um eine *kovariante Ableitung* bezüglich dieser Symmetrietransformationen handelt.

4.2 Reduktion der Wirkung $\hat{S}'_{top}$ der topologischen Terme

Die Wirkung $\hat{S}'_{top}$ des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie setzt sich aus einem masselosen $\hat{S}_{top}$ und einem massiven Anteil $\delta\hat{S}_{top}$ zusammen:

$$\hat{S}'_{top} = \hat{S}_{top} + \delta\hat{S}_{top}. \tag{4.2.1}$$

Die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{top}$ des topologischen Sektors der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie wurde im dritten Kapitel bereits eingehend studiert, so dass wir uns in diesem Abschnitt auf die dimensionale Reduktion des massiven Anteils $\delta\hat{S}_{top}$ der Wirkung $\hat{S}'_{top}$ der topologischen Terme konzentrieren werden.

Die Kompaktifizierung der Wirkung $\delta\hat{S}_{top}$ verläuft in vollständiger Analogie zur Kompaktifizierung der Wirkung $\hat{S}_{top}$ des topologischen Sektors der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie. Für die dimensionale Reduktion ist es hinreichend, den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und den Ansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ in die Wirkung (4.0.4) einzusetzen. Aufgrund der Antisymmetrie der Basisformen dx^μ und dy^α verschwinden Terme, die mehr als vier Raumzeit-Indizes μ oder mehr als zwei interne Indizes α enthalten. Die Abhängigkeit von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ lässt sich schließlich ausintegrieren und als Ergebnis erhält man die reduzierte Teilwirkung δS_{top} der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

Bevor wir mit der Reduktion beginnen, schreiben wir die Wirkung $\delta\hat{S}_{top}$ als Summer seiner beiden Summanden:

$$\delta\hat{S}_{top} = \delta\hat{S}_3 + \delta\hat{S}_4, \tag{4.2.2}$$

wobei $\delta\hat{S}_3$ und $\delta\hat{S}_4$ folgender Maßen definiert sind:

$$\delta\hat{S}_3 = 2\int \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}_2^I \; \mathcal{L}_{IJ} \; m^J, \tag{4.2.3}$$

$$\delta\hat{S}_4 = \frac{4}{3}\int \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \; m^I \; \mathcal{L}_{IJ} \; m^J. \tag{4.2.4}$$

Wir beginnen mit der Reduktion der Wirkung $\delta\hat{S}_3$, indem wir den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und den Ansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ in die Wirkung (4.2.3) einsetzen. Das Ausschreiben der Terme führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\delta\hat{S}_3 = &- \;4\int \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta \wedge dy^\alpha \wedge dy^\beta \; \mathcal{L}_{IJ} \; m^J \\ &- \;2\int \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge dy^\alpha \wedge dy^\beta \; \mathcal{L}_{IJ} \; m^J \\ &+ \;2\int \hat{B}'_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge \hat{B}_{\alpha\beta} \; dy^\alpha \wedge dy^\beta \; \mathcal{L}_{IJ} \; m^J,\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

wobei wir die Notation $\tilde{\mathcal{F}}'^I_2 = d\tilde{\mathcal{A}}^I_\mu \, dx^\mu$, $\hat{B}'_2 = \frac{1}{2}\hat{B}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu$ und $\hat{B}'_{1\alpha} = \hat{B}_{\mu\alpha} \, dx^\mu$ verwendet haben. Das Ausnutzen der Beziehung $\int \sqrt{G} \, dy^\alpha \wedge dy^\beta =$

$\varepsilon^{\alpha\beta}$ führt schließlich auf die Teilwirkung δS_3 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\delta\hat{S}_3 = -\,4\int \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J -\; 2\int \varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J$$
$$+\; 2\int (\hat{B}_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta})\, \hat{B}'_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J. \tag{4.2.6}$$

Wir fahren mit der Reduktion der Wirkung $\delta\hat{S}_4$ fort, indem wir den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ und den Ansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ in die Wirkung (4.2.4) einsetzen:

$$\begin{aligned} \delta S_4 =&\; 2\int \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \wedge dy^\beta\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\ &-\; 4\int \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge dy^\alpha \wedge dy^\beta\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Die Verwendung der Relation $\int \sqrt{G}\, dy^\alpha \wedge dy^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}$ führt auf die Teilwirkung δS_4 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\begin{aligned} \delta S_4 =&\; 2\int (\varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta})\, \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_2\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\ &-\; 4\int \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Die Wirkung δS_{top} der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche sich aus der Reduktion des massiven Anteils $\delta\hat{S}_{top}$ der Wirkung des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ergeben hat, setzt sich aus den beiden Teilwirkungen δS_3 und δS_4 zusammen:

$$\begin{aligned} \delta S_{top} =&\; \delta S_3 \;+\; \delta S_4 \\ =&\, -\,4\int \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J -\; 2\int \varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\ &+\; 2\int (\hat{B}_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta})\, \hat{B}'_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J +\; 2\int (\varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta})\, \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_2\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\ &-\; 4\int \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir die vollständige Wirkung S'_{top} an, die sich durch dimensionale Reduktion der Wirkung $\hat{S}'_{top}$ des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ergibt:

$$\begin{aligned} S'_{top} =&\; S_{top} \;+\; \delta S_{top} \\ =&\; \int \Big(-\,\hat{B}'_2 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta} \;-\; 2\, \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta} \\ &+\; \frac{1}{2}\, (\varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta}) \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^J_2 \Big)\, \mathcal{L}_{IJ} \;+ \int \Big(-\,4\, \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta} \\ &-\; 2\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \;+\; 2\, (\varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta})\, \hat{B}'_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \Big)\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \end{aligned}$$

$$+\int \left(2\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\hat{B}_{\alpha\beta})\,\hat{B}_2'\wedge\hat{B}_2' \;-\; 4\,\hat{B}_2'\wedge\hat{B}_{1\alpha}'\wedge\hat{B}_{1\beta}'\,\varepsilon^{\alpha\beta}\right) m^I\,\mathcal{L}_{IJ}\,m^J. \tag{4.2.10}$$

Die dimensionale Reduktion der Wirkung $\hat{S}_{top}'$ des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie führt auf eine Reihe von Termen, in welchen die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen. Bei der Reduktion der Wirkung (4.0.4) organisieren sich diese Komponenten allerdings nicht in der selben Weise, in welcher sie sich bei der Reduktion der verallgemeinerten kinetischen Terme (4.1.1) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ organisiert haben. Vielmehr müssen die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Theorie nachträglich durch die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie ersetzt werden. An dieser Stelle lassen wir die topologischen Terme zunächst in der Form stehen, in welcher sie aus der dimensionalen Reduktion hervorgegangen sind. Im fünften Kapitel werden wir analysieren, in welcher Weise sich die Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass die Wirkung (4.2.10) des topologischen Sektors der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den *induzierten Tensortransformationen* invariant sind.

4.3 Die Wirkung der massiven D=4 Supergravitationstheorie

Wir präsentieren nun die Wirkung S_{m^I} der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welche sich durch die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 ergeben hat. Die Wirkung S_{m^I} setzt sich aus einem masselosen $S_{m^I=0}$ und einem massiven Anteil $\delta S_{m^I=0}$ zusammen und ist im masselosen Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch mit der Wirkung (3.7.1) der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einem Produkt $K3 \times T^2$ von Mannigfaltigkeiten [2]. Der bosonische Feldgehalt besteht aus dem Graviton $g_{\mu\nu}$, $\mu = 0, ..., 3$, der 2-Form B_2, 28 Vektorfeldern A_μ^I, $I = 1, ..., 24$, $B_{\mu\alpha}$, ${V_\mu}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, dem Dilaton $\phi(x)$ und 134 weiteren Skalarfeldern φ, θ^q, $q = 1, ..., 80$, $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$, $\hat{B}_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$. Die Wirkung S_{m^I} setzt sich aus der Graviton-Dilaton-2-Form Wirkung S_A', der Wirkung S_B' der Vektorfelder, der Wirkung S_C' der Skalarfelder und der Wirkung S_D' des topologischen Sektors der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie zusammen:

$$S_{m^I} \;=\; S_{m^I=0} \,+\, \delta S_{m^I=0} \;=\; S_A' \,+\, S_B' \,+\, S_C' \,+\, S_D'. \tag{4.3.1}$$

Die Metrik-Dilaton-2-Form Wirkung S_A' ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_A' \;&\equiv\; S_g \,+\, S_\phi \,+\, S_{B_2} \\ &=\; \frac{1}{4}\int \Big(R(x)^*1 - d\phi\wedge{}^*d\phi - 2\,e^{-2\phi}\,e^{-2\varphi}\,H_3\wedge{}^*H_3\Big). \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Die Wirkung S'_B der Vektorfelder ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
S'_B \;&\equiv\; S_V \;+\; S_{B_1} \;+\; S'_{A_1^I} \\
&= -\frac{1}{2}\int e^{\phi}\, e^{-\varphi}\left(f_2^I + \tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha\; {V_2}^\alpha\right) \wedge {}^*\!\left(f_2^J + \tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\; {V_2}^\beta\right)(\mathcal{M}^{-1})_{IJ} \\
&\quad - \frac{1}{2}\int e^{-2\phi}\;\; (H_{2\alpha} - \hat{B}_{\alpha\gamma}\, {V_2}^\gamma) \wedge {}^*(H_{2\beta} - \hat{B}_{\beta\delta}\, {V_2}^\delta)\; M^{\alpha\beta} \\
&\quad - \frac{1}{16}\int e^{-\varphi}\; {V_2}^\alpha \wedge {}^*{V_2}^\beta\; M_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

Die Wirkung S'_C der Skalarfelder ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
S'_C \;&\equiv\; S_\theta \;+\; S_\varphi \;+\; S_M \;+\; S_{B_{\alpha\beta}} \;+\; S'_{\mathcal{A}^I_\alpha} \;+\; S'_{pot} \\
&= \frac{1}{4}\int \Bigg(-\,2\; e^{\phi}\; e^{\varphi}\; (d\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha + 2m^I B_{1\alpha}) \wedge {}^*(d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta + 2m^J B_{1\beta})\; M^{\alpha\beta}\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ} \\
&\qquad\qquad +\; \frac{1}{8}\; Tr(d\mathcal{M}^{-1} \wedge {}^*d\mathcal{M}) \;-\; d\varphi \wedge {}^*d\varphi \;+\; \frac{1}{4}\; Tr(dM^{-1} \wedge {}^*dM) \\
&\qquad\qquad -\; e^{-2\phi}\; e^{2\varphi}\; d\hat{B}_{\alpha\gamma} \wedge {}^*d\hat{B}_{\beta\delta}\; M^{\alpha\beta}\; M^{\gamma\delta}\Bigg) \\
&\quad -2\int e^{\phi}\; e^{3\varphi}\; M^{\alpha\beta}\, M^{\gamma\delta}\, \hat{B}_{\alpha\gamma}\, {}^*\hat{B}_{\beta\delta}\; m^I\; (\mathcal{M}^{-1})_{IJ}\, m^J.
\end{aligned}
\tag{4.3.4}
$$

Die Wirkung S'_D des topologischen Sektors ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
S'_D \;&\equiv\; S'_{top} \\
&= \int \Bigg(-\,\hat{B}'_2 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta} \;-\; 2\; \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta} \\
&\quad +\; \frac{1}{2}\; (\varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta})\tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^J_2\Bigg)\; \mathcal{L}_{IJ} \;+\int \Bigg(-\,4\; \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\; \varepsilon^{\alpha\beta} \\
&\quad -\; 2\; \varepsilon^{\alpha\beta}\; \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \;+\; 2\; (\varepsilon^{\alpha\beta}\; \hat{B}_{\alpha\beta})\; \hat{B}'_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\Bigg)\; \mathcal{L}_{IJ}\; m^J \\
&\quad + \int \Bigg(2\; \varepsilon^{\alpha\beta}\; \hat{B}_{\alpha\beta})\; \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_2 \;-\; 4\; \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta}\; \varepsilon^{\alpha\beta}\Bigg)\; m^I\; \mathcal{L}_{IJ}\; m^J.
\end{aligned}
\tag{4.3.5}
$$

Die Signatur der Metrik $g_{\mu\nu}$ ist durch $(-+++)$, das Volumenelement durch ${}^*1 = \sqrt{-g}\; d^4x$ gegeben und für p-Formen ($p \leq 4$) verwenden wir die Konvention:

$$
F_p = \frac{1}{p!} F_{\mu_1 \ldots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}, \tag{4.3.6}
$$

mit dem Hodge-Dualen definiert durch:

$$
{}^*F_p = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{p!(4-p)} F_{\mu_1 \ldots \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\mu_{p+1} \ldots \mu_4} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_4}. \tag{4.3.7}
$$

Das Krümmungsskalar in vier Dimensionen wird mit $R(x)$ bezeichnet und durch Kontraktion der Inversen $g^{\mu\nu}$ der Metrik mit dem Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ gebildet:

$$
R(x) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{4.3.8}
$$

Die Vektorfelder A_1^I, $B_{1\alpha}$ und V_1^α der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie sind durch die folgenden Definitionen gegeben:

$$A_1^I \equiv A_\mu \, dx^\mu, \quad B_{1\alpha} \equiv B_{\mu\alpha} \, dx^\mu, \quad V_1{}^\alpha \equiv V_\mu{}^\alpha \, dx^\mu, \tag{4.3.9}$$

wobei die Komponenten der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie in der folgenden Weise durch die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie definiert sind:

$$A_\mu^I = \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - V_\mu{}^\alpha \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I, \tag{4.3.10}$$

$$B_{\mu\alpha} = \hat{B}_{\mu\alpha} + V_\mu{}^\beta \hat{B}_{\alpha\beta} \tag{4.3.11}$$

und $V_{\mu\alpha}$ Einträge der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit mit gemischten Indizes bezeichnen. Die Feldstärken $H_{2\alpha}$, $V_2{}^\alpha$ der Vektorfelder $B_{1\alpha}$, $V_1{}^\alpha$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie sind folgender Maßen definiert:

$$H_{2\alpha} \equiv dB_{1\alpha}, \qquad V_2{}^\alpha \equiv dV_1^\alpha. \tag{4.3.12}$$

Die verallgemeinerten Feldstärken f_2^I der Vektorfelder A_1^I der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie sind hingegen durch die folgende Definition gegeben:

$$f_2^I \equiv d A_1^I + 2 m^I B_2 + m^I V_1^\alpha \wedge B_{1\alpha}. \tag{4.3.13}$$

Die 2-Form B_2 ist in der folgenden Art und Weise definiert:

$$B_2 \equiv \frac{1}{2} \, B_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{4.3.14}$$

wobei die Komponenten der 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie durch die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie definiert sind:

$$B_{\mu\nu} \equiv \hat{B}_{\mu\nu} + V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha} - V_\mu{}^\alpha V_\nu{}^\beta \hat{B}_{\alpha\beta}. \tag{4.3.15}$$

Die verallgemeinerte Feldstärke der 2-Form B_2 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$H_3 \equiv dB_2 - \frac{1}{2} B_{1\alpha} \wedge dV_1^\alpha - \frac{1}{2} V_1^\alpha \wedge dB_{1\alpha}. \tag{4.3.16}$$

Die Formen $\tilde{\mathcal{F}}_2'^I$, $\hat{B}_2'$ und $\hat{B}_{1\alpha}'$, welche in den topologischen Termen erscheinen, sind durch die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie definiert:

$$\tilde{\mathcal{F}}_2'^I \equiv \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\mathcal{A}}_\nu^I - \partial_\nu \tilde{\mathcal{A}}_\nu^I) \, dx^\alpha \wedge dx^\beta, \tag{4.3.17}$$

$$\hat{B}_2' \equiv \frac{1}{2} \hat{B}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{4.3.18}$$

$$\hat{B}_{1\alpha}' \equiv \hat{B}_{\mu\alpha} \, dx^\mu, \tag{4.3.19}$$

wobei $\hat{B}_{\mu\nu}$, $\hat{B}_{\mu\alpha}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ und der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bezeichnen. Die Matrix

$\mathcal{M}_{IJ}$ wird durch die skalaren Felder $\theta^q(x)$, $q = 1, ..., 80$ parametrisiert und lässt sich durch eine $O(4,20)$-wertige Matrix $\mathcal{V}$ ausdrücken:

$$\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{V}^T \mathcal{V}. \tag{4.3.20}$$

Die Matrizen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{V}$ genügen den folgenden Relationen:

$$\mathcal{V}\mathcal{L}\mathcal{V}^T = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{M}^T = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{M}^T = \mathcal{M}, \tag{4.3.21}$$

wobei $\mathcal{L}$ die $O(4,20)$-Metrik bezeichnet. Die kinetischen Terme der Skalarfelder $\theta^q(x)$, $q = 0, ..., 80$ lassen sich unter Verwendung dieser Definitionen in der folgenden Weise schreiben:

$$\frac{1}{32}\int e^{-2\phi}\mathrm{Tr}(d\mathcal{M}^{-1*}d\mathcal{M})) = -\frac{1}{32}\int \sqrt{-g}\; e^{-2\phi}(\partial_\mu \mathcal{M}^{-1}_{IJ})(\partial^\mu \mathcal{M}^{IJ})d^6x. \tag{4.3.22}$$

Die Matrix $M_{\alpha\beta}$ erhält man nach dem Herausskalieren der Wurzel $\sqrt{G}$ aus der Metrik $G_{\alpha\beta}$ der internen Geometrie. Der Term $Tr(dM^{-1} \wedge {}^*dM)$ lässt sich dann in der folgenden Art und Weise schreiben:

$$\frac{1}{16}\int Tr(dM^{-1} \wedge {}^*dM) = -\frac{1}{16}\int g^{\mu\nu}(\partial_\mu M^{\alpha\beta})(\partial_\nu M_{\alpha\beta}). \tag{4.3.23}$$

Die Kaluza-Klein Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 generiert einerseits neue *Skalar- und Vektorfelder* der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Andererseits führt die Reduktion auf ein *skalares Potential*, eine *kovariante Ableitung* in der Wirkung der Skalarfelder und eine Korrektur der *verallgemeinerten Feldstärken* der 2-Form B_2 und der Vektorfelder A_1^I. Im fünften Kapitel werden wir studieren, in welcher Weise sich die Symmetrien der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergraviationstheorie wiederfinden. Es wird sich herausstellen, dass die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit nicht triviale Symmetrietransformationen der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren, unter welchen die verallgemeinerten Feldstärken (4.3.16) und (4.3.13) invariant sind. Darüber hinaus werden wir zeigen, dass die Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) *gekoppelte Tensortransformationen* der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Es wird sich herausstellen, dass die verallgemeinerten Feldstärken (4.3.13) der Vektorfelder A_1^I unter den Tensortransformationen über einfache Transformationseigenschaften verfügen und in der Wirkung der Skalarfelder (4.3.4) eine *kovariante Ableitung* bezüglich dieser Symmetrietransformationen auftritt.

Die Struktur der Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder deutet bereits auf einen höherdimensionalen Ursprung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie hin. J. Schön und M. Weidner haben gezeigt [21], dass die kinetischen Terme der Vektorfelder einer massiven, vierdimensionalen N=4 Supergravitationstheorie im Allgemeinen in der folgenden Form geschrieben werden können:

$$S_B = -\frac{1}{4}\int \sqrt{g}\;\big(\,\mathrm{Im}(\tau)M_{MN}H^M_{\mu\nu}\;H^{N\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tau)\eta_{MN}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H^M_{\mu\nu}\;H^N_{\rho\sigma}\,\big)\;d^4x, \tag{4.3.24}$$

wobei $H^M_{\mu\nu}$ die verallgemeinerten Feldstärken der Vektorfelder A^M_μ und τ eine komplexe Zahl mit $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ bezeichnen.

Für den Vergleich der Wirkung (4.3.1) mit der Literatur ist es notwendig, die Felder A_μ^I, $B_{\mu\alpha}$ und ${V_\mu}^\alpha$ in einem Vektor A_μ^M zusammenzufassen, dessen Index M über multiple Indizes läuft und in dessen Feldstärke $H_{\mu\nu}^M$ die verallgemeinerten Feldstärken $f_{\mu\nu}^I$, $H_{\mu\nu\alpha}$ und $V_{\mu\nu}^\alpha$ der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen:

$$A_\mu^M \equiv \begin{pmatrix} {V_\mu}^\alpha \\ B_{\mu\alpha} \\ A_\mu^I \end{pmatrix}, \qquad H_{\mu\nu}^M \equiv \begin{pmatrix} V_{\mu\nu}^\alpha \\ H_{\mu\nu\alpha} \\ f_{\mu\nu}^I \end{pmatrix}. \tag{4.3.25}$$

Die Maxwell-Terme in der Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder lassen sich dann ausmultiplizieren und in eine Form bringen, welche die Bestimmung der Koeffizienten-Matrix M_{MN} ermöglicht. Für den Vergleich mit der Literatur ist es darüber hinaus notwendig, die Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$, $\hat{B}_{\mu\alpha}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, welche in der Wirkung (4.3.5) der topologischen Terme erscheinen, durch die Felder $B_{\mu\nu}$, $B_{\mu\alpha}$ und A_μ^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie zu ersetzen. Diese Substitution erlaubt es, die Wirkung (4.3.5) der topologischen Terme vollständig auszuarbeiten und anschließend in eine Form zu bringen, welche die Bestimmung der Koeffizienten-Matrix η_{MN} und damit den Vergleich mit der Wirkung (4.3.24) erlaubt. Die 2-Form B_2 kann durch das Ausnutzen ihrer Bewegungsgleichung dualisiert werden und erscheint schließlich als Skalarfeld in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

Kapitel 5

Symmetriebetrachtungen

Die massive, sechsdimensionale Supergravitationstheorie verfügt über drei verschiedene Arten von Symmetrien: eine Symmetrie unter Diffeomorphismen, eine Symmetrie unter Stückelberg-Eichtransformationen und eine globale Symmetrie unter der $O(4,20)$-Symmetriegruppe [6]. Wir haben in der Einleitung diskutiert, dass die Symmetrien der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der Kaluza-Klein Reduktion auf einem Torus T^2 erhalten bleiben [20]. Dieses Kapitel thematisiert die Fragestellung, in welcher Weise sich sich die Symmetrietransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden.
Im ersten Abschnitt werden wir analysieren, in welcher Weise sich die Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion als Symmetrietransformationen in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass sich die Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit in einer natürlichen Weise auf die vierdimensionalen Supergravitationstheorie vererben und die Felder, welche bei der dimensionalen Reduktion erzeugt worden sind, unter Raumzeit-Transformationen als *Vektoren* bzw. *Skalare* transformieren [20]. Darüber hinaus werden wir zeigen, dass die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit auf der einen Seite *Eichtransformationen* und auf der anderen Seite nicht triviale Transformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Es wird sich jedoch herausstellen, dass die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Symmetrietransformationen über einfache Transformationseigenschaften verfügen [8]. Diese Eigenschaft der redefinierten Felder ermöglicht es, die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie in einer manifest invarianten Form zu schreiben.
Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden wir untersuchen, in welcher Weise sich die Stückelberg-Eichtransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Es wird sich herausstellen, dass sie zwei verschiedene Typen von *Tensortransformationen* induzieren, unter welchen die Felder der reduzierten Supergravitationstheorie transformieren. Um die Invarianz der Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den gekoppelten Tensortransformationen zu zeigen,

werden wir unsere Aufmerksamkeit besonders auf die verallgemeinerten, kinetischen Terme der Vektorfelder sowie den topologischen Sektor der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie richten.

5.1 Diffeomorphismen der D=6 Mannigfaltigkeit

Die Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit setzen sich gemäss dem Produktansatz (2.2.1) aus Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und Diffeomorphismen des Torus T^2 zusammen [20]. In der Einleitung haben wir diskutiert, dass die massive, sechsdimensionale Supergravitationstheorie aufgrund der Super-Poincaré Algebra invariant unter Diffeomorphismen der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit ist. Wir werden dieses Argument aufgreifen und untersuchen, in welcher Weise sich die Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion als Symmetrietransformationen in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass sich die Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 in einer natürlichen Weise auf die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie vererben und dass die Felder, welche bei der dimensionalen Reduktion generiert worden sind, unter Raumzeit-Diffeomorphismen als *Vektoren* bzw. als *Skalare* transformieren [20]. Darüber hinaus werden wir sehen, dass die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion *Eichtransformationen* und nicht triviale Transformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Es wird sich zeigen, dass die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Symmetrietransformationen über einfache Transformationseigenschaften verfügen [8]. Diese Eigenschaft der Felder der reduzierten Theorie ermöglicht es, die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie in einer manifest invarianten Form zu schreiben.

Bevor wir mit dem Studium der Symmetrietransformationen beginnen, erinnern wir den Leser daran, in welcher Weise Vektorfelder Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit induzieren. Ein Vektorfeld ist eine stetig differenzierbare Abbildung [22], welche jedem Punkt P einer Mannigfaltigkeit einen Vektor $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ in dem entsprechenden Tangentialraum T_P zuordnet. Die Integralkurven (auch Kongruenzen genannt) der Vektorfelder füllen die gesamte Mannigfaltigkeit aus, ohne sich gegenseitig zu überschneiden. Jeder Punkt P der Mannigfaltigkeit M befindet sich auf genau einer Kongruenz, so dass die Integralkurven in einer natürlichen Weise eine bijektive Abbildung der Mannigfaltigkeit auf sich selbst induzieren. Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ den Parameter einer Kongruenz bezeichnet, so definiert jedes hinreichend kleine $\triangle\lambda$ eine Abbildung, die jeden Punkt P der Kongruenz auf einen Punkt P' abgebildet wird, welcher sich eine Parameterdistanz $\triangle\lambda$ entfernt entlang derselben Kongruenz befindet. Solange das Vektorfeld in einer Umgebung U $\subseteq$ M stetig differenzierbar ist, ist diese Abbildung bijektiv und für den Fall eines C^{∞}-Vektorfeldes definiert sie einen Diffeomorphismus. Aufgrund der Tatsache, dass Diffeomorphismen für gewöhnlich unter Verwendung der Integralkurven der Vektorfelder $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ definiert werden, bezeichnet man sie häufig mit dem selben Symbol, mit welchem man die Vektorfelder $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ bezeichnet. Diese Notation wird durch die Tatsache begünstigt, dass die Variation, welche durch das Lie dragging eines Tensorfeldes entlang einer Kongruenz induziert wird, in dieser Umgebung durch die *Lie-Ableitung* gegeben ist.

5.1.1 Transformationsverhalten der Komponenten der Felder der D=6 Supergravitationstheorie unter induzierten Symmetrietransformationen

Nach der Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Theorie in der Wirkung (4.3.1) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. In diesem Abschnitt studieren wir das Transformationsverhalten dieser Komponenten unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit induziert werden. Zu diesem Zweck werden wir zunächst die Variation der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Diffeomorphismen der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit bestimmen, indem wir die Lie-Ableitung nach den Vektorfeldern $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ bilden, welche diese Diffeomorphismen induzieren. In einem zweiten Schritt werden wir den Kaluza-Klein Ansatz für das Vektorfeld $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ sowie den Reduktionsansatz für die Felder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in die Lie-Ableitungen einsetzen und die Variationen der einzelnen Komponenten berechnen. Diese Vorgehensweise wird es uns auf der einen Seite ermöglichen, das Transformationsverhalten der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Raumzeit-Diffeomorphismen zu bestimmen. Auf der anderen Seite werden wir die Symmetrietransformationen der vierdimensionalen Supergravitationstheorie identifizieren können, welche durch die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert werden.

Wir beginnen die Analyse der Symmetrietransformationen, indem wir die Variation der Felder $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$, $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und $\hat{B}_2$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Diffeomorphismen der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit bestimmen. Die Lie-Ableitungen dieser Felder nach den Vektorfeldern $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$, welche die Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit induzieren, sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben [22]:

$$\delta \tilde{\mathcal{A}}^I_{\hat{\mu}} = \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}} \tilde{\mathcal{A}}_{\hat{\mu}}) + (\partial_{\hat{\mu}} \hat{\xi}^{\hat{\rho}}) \tilde{\mathcal{A}}^I_{\hat{\rho}}, \tag{5.1.1}$$

$$\delta \hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}} = \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}} \hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}) + (\partial_{\hat{\mu}} \xi^{\hat{\rho}}) \hat{e}_{\hat{\rho}}{}^{\hat{m}}, \tag{5.1.2}$$

$$\delta \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}} \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}) + \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\nu}} \hat{\xi}^{\hat{\rho}}) + \hat{B}_{\hat{\rho}\hat{\nu}}(\partial_{\hat{\mu}} \hat{\xi}^{\hat{\rho}}). \tag{5.1.3}$$

Der Produktansatz (2.2.1) für die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit führt auf die folgende Zerlegung der Vektorfelder $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$:

$$\hat{\xi}^{\hat{\mu}}(\hat{x})\, \partial_{\hat{\mu}} = \hat{\xi}^{\mu}(\hat{x})\, \partial_{\mu} + \hat{\xi}^{\alpha}(\hat{x})\, \partial_{\alpha}, \tag{5.1.4}$$

wobei sich die Basis $\{\partial_{\hat{\mu}}\}$, $\hat{\mu} = 0, ..., 5$ des Tangentialraums $\hat{T}_p$ der Mannigfaltigkeit M_6 am Punkt $P \in M_6$ aus der kanonischen Basis $\{\partial_{\mu}\}$, $\mu = 0, ..., 3$ des Tangentialraums T_p der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und der kanonischen Basis $\{\partial_{\alpha}\}$, $\alpha = 4, 5$ des Tangentialraums T'_p der internen Mannigfaltigkeit T^2 zusammensetzt.

Die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit setzen sich also aus den Raumzeit-Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\mu}$ und den Diffeomorphismen

$\hat{\xi}^\alpha$ des Torus T^2 zusammen. Der Kaluza-Klein Ansatz (2.2.7) postuliert darüber hinaus, dass die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie von den internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ unabhängig sind, so dass der Reduktionsansatz für die Vektorfelder $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ die folgende Form annimmt:

$$\hat{\xi}^{\hat{\mu}}(x)\,\partial_{\hat{\mu}} = \xi^\mu(x)\,\partial_\mu + \xi^\alpha(x)\,\partial_\alpha. \tag{5.1.5}$$

Wir werden den Ansatz (5.1.5) für die Vektorfelder $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$, welche die Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit M_6 induzieren, sowie die Reduktionsansätze für die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nun in die Ableitungen (5.1.1) bis (5.1.3) einsetzen und die reduzierten Terme nach den auftretenden Indizes sortieren. Auf diese Weise lassen sich die Variationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bestimmen, welche nach der dimensionalen Reduktion in der Wirkung der vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen.

Wir setzen zunächst den Ansatz (5.1.5) für das Vektorfeld $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ sowie den Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in die Ableitung (5.1.1) ein und bestimmen die Variation der Komponenten. Dies führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I &= \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}}\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I) + \tilde{\mathcal{A}}_{\hat{\rho}}^I(\partial_\mu\hat{\xi}^{\hat{\rho}}) \\ &= \hat{\xi}^{\rho}(\partial_{\rho}\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I) + \tilde{\mathcal{A}}_{\rho}^I(\partial_\mu\xi^{\rho}) + \tilde{\mathcal{A}}_{\alpha}^I(\partial_\mu\xi^{\alpha}), \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I &= \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}}\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I) + \tilde{\mathcal{A}}_{\hat{\rho}}^I(\partial_\alpha\hat{\xi}^{\hat{\rho}}) \\ &= \xi^{\rho}(\partial_{\rho}\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I), \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass Ableitungen nach internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ verschwinden.

Wir können uns das Transformationsverhalten der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche nach der dimensionalen Reduktion durch die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit induziert werden, am Beispiel der Transformation (5.1.6) der Komponenten $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ verdeutlichen. Während die Komponenten $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen $\xi^\mu(x)$ als Vektoren transformieren, induzieren die Diffeomorphismen $\xi^\alpha(x)$ der internen Mannigfaltigkeit nicht triviale Symmetrietransformationen [8]:

$$\delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I = \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I(\partial_\mu\xi^\alpha). \tag{5.1.8}$$

Bei der Transformation (5.1.8) handelt es sich nicht um eine Eichtransformation im klassischen Sinne, sondern um eine „schlechte“ Symmetrietransformation, welche in der Feldtheorie keine Entsprechung findet. Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass sich die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie impliziert. In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie nach der Redefinition über einfache Transformationseigenschaften unter den induzierten Symmetrietransformationen verfügen. Diese Redefinition der Felder ermöglicht es, die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie in einer manifest invarianten Form zu schreiben.

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit dem Transformationsverhalten der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie beschäftigen, werden wir in diesem Abschnitt zunächst die Variation der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Symmetrietransformationen herleiten. Zu diesem Zweck setzen wir den Reduktionsansatz (3.2.8) für das Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ sowie den Ansatz (5.1.5) für das Vektorfeld $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ in die Lie-Ableitung (5.1.2) ein und bestimmen die Variation der Komponenten mit internen, externen und gemischten Indizes.

1. Die Variation der Komponenten $\hat{e}_\mu{}^m$ unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit induziert werden, ergibt sich aus der folgenden Relation:

$$\begin{aligned} \delta\hat{e}_\mu{}^m &= \xi^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}}\hat{e}_\mu{}^m) + \hat{e}_{\hat{\rho}}{}^m(\partial_\mu\hat{\xi}^{\hat{\rho}}) \\ &= \xi^\rho(\partial_\rho\hat{e}_\mu{}^m) + \hat{e}_\rho{}^m(\partial_\mu\xi^\rho), \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

   wobei wir ausgenutzt haben, dass Ableitungen nach internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ verschwinden und für die Komponenten $\hat{e}_\alpha{}^m = 0$ gilt. Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) für das Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ entnehmen wir die Komponenten $\hat{e}_\mu{}^m = e_\mu{}^m$, so dass Gleichung (5.1.9) die folgende Form annimmt:

$$\delta e_\mu{}^m = \xi^\rho(\partial_\rho e_\mu{}^m) + e_\rho{}^m(\partial_\mu\xi^\rho). \tag{5.1.10}$$

2. Die Variation der Komponenten $\hat{e}_\alpha{}^a$ unter den induzierten Transformationen ergibt sich aus der folgenden Relation:

$$\delta\hat{e}_\alpha{}^a = \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}}\hat{e}_\alpha{}^a) = \xi^\rho(\partial_\rho\hat{e}_\alpha{}^a), \tag{5.1.11}$$

   wobei wir wiederum ausgenutzt haben, dass Ableitungen nach internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ verschwinden. Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) für das Vielbein $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ entnehmen wir, dass für die Komponenten $\hat{e}_\alpha{}^a = E_\alpha{}^a$ gilt. Das Einsetzen in Gleichung (5.1.11) führt auf das folgende Ergebnis:

$$\delta E_\alpha{}^a = \xi^\rho(\partial_\rho E_\alpha{}^a). \tag{5.1.12}$$

3. Die Variation der Komponenten $\hat{e}_\mu{}^a$ des Vielbeins $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit M_6 induziert werden, ergibt sich aus der folgenden Beziehung:

$$\begin{aligned} \delta\hat{e}_\mu{}^a &= \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}}\hat{e}_\mu{}^a) + \hat{e}_{\hat{\rho}}{}^a(\partial_\mu\hat{\xi}^{\hat{\rho}}) \\ &= \xi^\rho(\partial_\rho\hat{e}_\mu{}^a) + \hat{e}_\rho{}^a(\partial_\mu\xi^\rho) \\ &\quad + \hat{e}_\alpha{}^a(\partial_\mu\xi^\alpha), \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

   wobei wir ausgenutzt haben, dass Ableitungen nach internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ verschwinden. Aus dem Reduktionsansatz (3.2.8) entnehmen wir die Komponenten $\hat{e}_\mu{}^a = V_\mu{}^a$ und $\hat{e}_\alpha{}^a = E_\alpha{}^a$. Das Einsetzen dieser Relationen in Gleichung (5.1.13) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\delta V_\mu{}^a = \xi^\rho(\partial_\rho V_\mu{}^a) + V_\rho{}^a(\partial_\mu\xi^\rho) + E_\alpha{}^a(\partial_\mu\xi^\alpha). \tag{5.1.14}$$

   Die Variation (5.1.14) bestimmt das Transformationsverhalten der Komponenten $\hat{e}_\mu{}^a$ des Vielbeins der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit unter

Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ und Diffeomorphismen ξ^α des Torus. Wir interessieren uns besonders für das Transformationsverhalten der Einträge $V_{\mu\alpha}$ der Metrik der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit und schreiben die Variation $\delta V_\mu{}^a$ daher explizit aus:

$$\begin{aligned}\delta V_\mu{}^a &= (\delta V_\mu{}^\alpha) E_\alpha{}^a + V_\mu{}^\alpha (\delta E_\alpha{}^a) \\ &= \ \xi^\rho\,(\partial_\rho V_\mu{}^\alpha)\ E_\alpha{}^a + (\partial_\mu \xi^\rho)\ V_\rho{}^\alpha\ E_\alpha{}^a \\ &\quad + E_\alpha{}^a\ (\partial_\mu \xi^\alpha) + V_\mu{}^\alpha\ \xi^\rho\ (\partial_\rho\ E_\alpha{}^a) \\ &= \Big(\xi^\rho (\partial_\rho V_\mu{}^\alpha) + (\partial_\mu \xi^\rho) V_\rho{}^\alpha + (\partial_\mu \xi^\alpha)\Big) E_\alpha{}^a \\ &\qquad + V_\mu{}^\alpha\, \xi^\rho\ (\partial_\rho\, E_\alpha{}^a).\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Das Einsetzen der Beziehung (5.1.12) in die Gleichung (5.1.15) bestimmt die Variation der Komponenten $V_\mu{}^\alpha$ unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit und Diffeomorphismen ξ^α des Torus T^2:

$$\delta V_\mu{}^\alpha = \xi^\rho (\partial_\rho\, V_\mu{}^\alpha) + (\partial_\mu\, \xi^\rho) V_\rho{}^\alpha + (\partial_\mu\, \xi^\alpha). \tag{5.1.16}$$

Wir schließen die Analyse des Transformationsverhaltens der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Symmetrietransformationen ab, indem wir die Variation der Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ bestimmen. Zu diesem Zweck verwenden wir das selbe Verfahren, welches wir bereits bei der Analyse des Transformationsverhaltens der Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und des Vielbeins $\hat{e}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{m}}$ angewandt haben. Wir setzen den Reduktionsansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ sowie den Ansatz (5.1.5) für das Vektorfeld $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$, welches die Diffeomorphismen der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit induziert, in die Ableitung (5.1.3) ein und betrachten die Variation der Komponenten mit internen, externen und gemischten Indizes.

1. Die Variation der Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ ergibt sich aus der folgenden Relation:

$$\delta \hat{B}_{\mu\nu} = \hat{\xi}^{\hat{\rho}} (\partial_{\hat{\rho}} \hat{B}_{\mu\nu}) + \hat{B}_{\mu\hat{\rho}} (\partial_\nu \hat{\xi}^{\hat{\rho}}) + \hat{B}_{\hat{\rho}\nu} (\partial_\mu \hat{\xi}^{\hat{\rho}}). \tag{5.1.17}$$

   Einsetzen des Reduktionsansatzes (5.1.5) für das Vektorfeld $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ sowie des Ansatzes (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\delta \hat{B}_{\mu\nu} = \xi^\rho (\partial_\rho \hat{B}_{\mu\nu}) + \hat{B}_{\mu\rho} (\partial_\nu \xi^\rho) + \hat{B}_{\rho\nu} (\partial_\mu \xi^\rho) \\ + \hat{B}_{\mu\alpha} (\partial_\nu \xi^\alpha) - \hat{B}_{\nu\alpha} (\partial_\mu \xi^\alpha),\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

   wobei wir ausgenutzt haben, dass $(\partial_\alpha \hat{B}_{\mu\nu}) = 0$ und $\hat{B}_{\mu\alpha} = -\hat{B}_{\alpha\mu}$ gilt.

2. Die Variation der Komponenten $\hat{B}_{\mu\alpha}$ ergibt sich aus der folgenden Relation:

$$\delta \hat{B}_{\mu\alpha} = \hat{\xi}^{\hat{\rho}} (\partial_{\hat{\rho}} \hat{B}_{\mu\alpha}) + \hat{B}_{\mu\hat{\rho}} (\partial_\alpha \hat{\xi}^{\hat{\rho}}) + \hat{B}_{\hat{\rho}\alpha} (\partial_\mu \hat{\xi}^{\hat{\rho}}). \tag{5.1.19}$$

   Einsetzen des Reduktionsansatzes (5.1.5) für das Vektorfeld $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ sowie des Ansatzes (2.2.10) führt auf das folgende Ergebnis:

$$\delta \hat{B}_{\mu\alpha} = \xi^\rho (\partial_\rho \hat{B}_{\mu\alpha}) + \hat{B}_{\rho\alpha} (\partial_\mu \xi^\rho) - \hat{B}_{\alpha\beta} (\partial_\mu \xi^\beta), \tag{5.1.20}$$

   wobei wir die Antisymmetrie der Komponenten $\hat{B}_{\alpha\beta}$ ausgenutzt haben sowie die Tatsache, dass Ableitungen nach internen Koordinaten $\{y^\alpha\}$ verschwinden.

3. Die Variation der Komponenten $\hat{B}_{\alpha\beta}$ unter Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit ist geben durch:

$$\delta\hat{B}_{\alpha\beta} = \hat{\xi}^{\hat{\rho}}(\partial_{\hat{\rho}}\hat{B}_{\alpha\beta}) + \hat{B}_{\alpha\hat{\rho}}(\partial_{\beta}\hat{\xi}^{\hat{\rho}}) + \hat{B}_{\hat{\rho}\beta}(\partial_{\alpha}\hat{\xi}^{\hat{\rho}}). \tag{5.1.21}$$

Einsetzen des Reduktionsansatzes (5.1.5) für das Vektorfeld $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ und des Ansatzes (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ führt auf das folgende Ergebnis:

$$\delta\hat{B}_{\alpha\beta} = \xi^{\rho}(\partial_{\rho}\hat{B}_{\alpha\beta}). \tag{5.1.22}$$

Damit haben wir das Transformationsverhalten der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen hergeleitet, welche durch die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit induziert werden. Wir haben gezeigt, dass sich die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie einerseits als Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^{μ} und andererseits als nicht triviale Symmetrietransformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass sich diese Komponenten bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie impliziert. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass die redefinierten Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie über einfache Transformationseigenschaften unter den induzierten Symmetrietransformationen verfügen. Diese Eigenschaft der Felder ermöglicht es, die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie in einer manifest invarianten Form zu schreiben.

5.1.2 Transformationsverhalten der Felder der D=4 Supergravitationstheorie unter induzierten Symmetrietransformationen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels haben wir studiert, in welcher Weise sich die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei hat sich herausgestellt, dass sie einerseits Diffeomorphismen ξ^{μ} der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und andererseits nicht triviale Transformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass sich diese Komponenten bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. In diesem Abschnitt werden wir das Transformationsverhalten der redefinierten Felder unter Diffeomorphismen ξ^{μ} der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 studieren und beweisen, dass die Felder, welche bei der dimesionalen Reduktion erzeugt worden sind, als *Skalare* bzw. *Vektoren* transformieren. Darüber hinaus werden wir untersuchen, in welcher Weise die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^{α} der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, transformieren. Dabei wird sich herausstellen, dass die redefinierten Felder über einfache Transformationseigenschaften unter den induzierten Symmetrietransformationen verfügen und sich die Diffeomorphismen ξ^{α} der internen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion als *Eichtransformationen* in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Diese Eigenschaft der redefinierten Felder ermöglicht es, die Wirkung (4.3.1) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie in einer manifest invarianten Form zu schreiben.

Wir beginnen das Studium der Symmetrietransformationen der vierdimensionalen Supergravitationstheorie mit der Analyse des Transformationsverhaltens der Felder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$, $\hat{B}_{\alpha\beta}$ und $G_{\alpha\beta}$, welche bei der dimensionale Reduktion der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erzeugt worden sind. Aus den Gleichungen (5.1.7), (5.1.12) und (5.1.22) schließen wir, dass die Felder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$, $\hat{B}_{\alpha\beta}$ und $E_\alpha{}^a$ unter den Transformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, invariant sind und unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 als Skalare transformieren. Damit haben wir gezeigt, dass die dimensionale Reduktion *Skalarfelder* der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert.

Wir fahren mit der Analyse der induzierten Symmetrietransformationen fort, indem wir die Transformationseigenschaften der Einträge der Metrik $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit mit gemischten Indizes studieren. Aus Gleichung (5.1.16) können wir schließen, dass die Komponenten $V_\mu{}^\alpha$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ als Vektoren transformieren:

$$\delta V_\mu{}^\alpha = \xi^\rho(\partial_\rho\, V_\mu{}^\alpha) + (\partial_\mu\, \xi^\rho) V_\rho{}^\alpha. \tag{5.1.23}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ bei der Kaluza-Klein Reduktion höherdimensionaler Theorien notwendiger Weise generiert werden, bezeichnet man sie in der Literatur für gewöhnlich als *Kaluza-Klein Vektorfelder*. Aus Gleichung (5.1.16) lässt sich auf der einen Seite das Transformationsverhalten der Felder $V_\mu{}^\alpha$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ herleiten. Auf der anderen Seite können wir aus (5.1.16) schließen, dass die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion *Eichtransformationen* der Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ induzieren [20]:

$$V_\mu{}^\alpha \mapsto V_\mu{}^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha. \tag{5.1.24}$$

Das Transformationsverhalten (5.1.24) der Kaluza-Klein Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ unter den induzierten Symmetrietransformationen verdeutlicht uns in einer besonders anschaulichen Weise, in welcher Weise Supergravitationstheorien die grundlegenden Konzepte von Eichtheorien und Gravitationstheorien mit einander verbinden. Die Eichung von Supersymmetrie führt auf Feldtheorien, welche in einer natürlichen Weise invariant unter Raumzeit-Diffeomorphismen sind. Die Invarianz der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Diffeomorphismen der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit führt nach der Kompaktifizierung hingegen auf Feldtheorien, welche in vier Dimensionen als Eichtheorien aufzufassen sind. Im Rahmen von Supergravitationstheorien verschmelzen die auf den ersten Blick grundverschiedenen Prinzipien von Eichtheorien und Gravitationstheorien also mit einander und erscheinen als zwei Seiten ein und derselben Medallie. Dabei kann man die Kompaktifizierung in gewissem Sinne als eine neue Art von Symmetriebrechung auffassen. Vor der Kompaktifizierung erschienen die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit gleichberechtigt mit den Raumzeit-Diffeomorphismen als geometrische Symmetrien der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie. Die Kompaktifizierung bricht diese Symmetrie, so dass die

Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit nach der dimensionalen Reduktion als Eichsymmetrien in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen.

Wir fahren mit dem Studium der Symmetrien der vierdimensionalen Supergravitationstheorie fort, indem wir das Transformationsverhalten der Felder A_1^I analysieren. Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass sich die Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche die Definition (4.3.10) der Felder A_1^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. Aus den Variationen (5.1.6), (5.1.7) und (5.1.14) der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie lässt sich folglich das Transformationsverhalten der Felder A_1^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ und Transformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, herleiten. Für das Transformationsverhalten unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^I &= \delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - (\delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I)\, V_\mu{}^\alpha - \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I\, (\delta V_\mu{}^\alpha) \\ &= \xi^\rho\, (\partial_\rho \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I) + \tilde{\mathcal{A}}_\rho^I\, (\partial_\mu \xi^\rho) - \xi^\rho\, (\partial_\rho \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I)\, V_\mu{}^\alpha \\ &\quad - \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I\, \xi^\rho\, (\partial_\rho V_\mu{}^\alpha) - \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I\, V_\rho{}^\alpha\, (\partial_\mu \xi^\rho).\end{aligned} \tag{5.1.25}$$

Die Verwendung der Definition (4.3.10) und das geschickte Zusammenfassen der Terme führt auf die folgende Variation der Felder A_μ^I unter Raumzeit-Transformationen:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^I &= \xi^\rho\, \partial_\rho\, (\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I V_\mu{}^\alpha) + (\tilde{\mathcal{A}}_\rho^I - \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I V_\rho{}^\alpha)\, (\partial_\mu \xi^\rho) \\ &= \xi^\rho\, (\partial_\rho A_\mu^I) + A_\rho^I\, (\partial_\mu \xi^\rho).\end{aligned} \tag{5.1.26}$$

Für das Transformationsverhalten der Felder A_μ^I unter Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^I &= \delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I\, (\delta V_\mu{}^\alpha) - (\delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I)\, V_\mu{}^\alpha \\ &= \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I\, (\partial_\mu \xi^\alpha) - \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I\, (\partial_\mu \xi^\alpha) = 0.\end{aligned} \tag{5.1.27}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Felder A_1^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induzieren werden, invariant sind. Zudem haben wir bewiesen, dass die Felder A_1^I unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ als *Vektoren* transformieren und die dimensionale Reduktion der Wirkung (4.1.1) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie damit in natürlicher Weise *Vektorfelder* A_1^I der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert.

Wir fahren mit der Analyse des Transformationsverhaltens der Felder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Symmetrietransformationen fort. Wir haben im dritten Kapitel gesehen, dass die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie neue Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generierte. Dabei hat sich herausgestellt, dass sich die Komponenten der

2-Form $\hat{B}_2$ bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisiert haben, welche die Definition (4.3.11) der Felder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. Aus der Variation (5.1.20), (5.1.22) der Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ und der Variation (5.1.14) der Kaluza-Klein Vektorfelder V_μ^α lässt sich folglich das Transformationsverhalten der Felder $B_{\mu\alpha}$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ und Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, bestimmen. Für das Transformationsverhalten der Felder $B_{\mu\alpha}$ unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta B_{\mu\alpha} &= \delta\hat{B}_{\mu\alpha} + \delta\hat{B}_{\alpha\beta}\, V_\mu{}^\beta + \hat{B}_{\alpha\beta}\, \delta V_\mu{}^\beta \\ &= \xi^\rho\,(\partial_\rho \hat{B}_{\mu\alpha}) + \hat{B}_{\rho\alpha}\,(\partial_\mu \xi^\rho) + \xi^\rho\,(\partial_\rho \hat{B}_{\alpha\beta})\, V_\mu{}^\beta \\ &\quad + \hat{B}_{\alpha\beta}\,\xi^\rho\,(\partial_\rho V_\mu{}^\beta) + \hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\mu \xi^\rho)\, V_\rho{}^\beta .\end{aligned} \tag{5.1.28}$$

Die Verwendung der Definition (4.3.11) und das geschickte Zusammenfassen der Terme führt auf die folgende Variation der Felder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ:

$$\begin{aligned}\delta B_{\mu\alpha} &= \xi^\rho\,\partial_\rho(\hat{B}_{\mu\alpha} + \hat{B}_{\alpha\beta} V_\mu{}^\beta) + (\hat{B}_{\rho\alpha} + \hat{B}_{\alpha\beta} V_\mu{}^\beta)\,(\partial_\mu \xi^\rho) \\ &= \xi^\rho\,(\partial_\rho B_{\mu\alpha}) + B_{\rho\alpha}\,(\partial_\mu \xi^\rho).\end{aligned} \tag{5.1.29}$$

Das Transformationsverhalten der Felder $B_{\mu\alpha}$ unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, ergibt sich durch die Verwendung der Relationen (5.1.20), (5.1.22) und (5.1.14):

$$\begin{aligned}\delta B_{\mu\alpha} &= \delta\hat{B}_{\mu\alpha} + \delta\hat{B}_{\alpha\beta}\, V_\mu{}^\beta + \hat{B}_{\alpha\beta}\, \delta V_\mu{}^\beta \\ &= -\hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\mu \xi^\beta) + \hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\mu \xi^\beta) = 0.\end{aligned} \tag{5.1.30}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Felder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, invariant sind. Zudem haben wir bewiesen, dass die Felder $B_{\mu\alpha}$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ als *Vektoren* transformieren und die dimensionale Reduktion der Wirkung (3.1.4) der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in natürlicher Weise *Vektorfelder* $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert.

Wir fahren mit der Analyse fort, indem wir das Transformationsverhalten der 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen studieren, welche durch die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit induziert werden. Wir haben im dritten Kapitel gesehen, dass sich die Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche die Definition (4.3.15) der 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. Das Transformationsverhalten des Feldes B_2 unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ und Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, lässt sich dem entsprechend aus der Variation (5.1.14) der Kaluza-Klein Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ und der Variation (5.1.18), (5.1.20) und (5.1.22) der Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie herleiten. Aufgrund der Tatsache, dass die 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Symmetrietransformationen nicht trivial transformiert, werden wir die Variation der Ausdrücke, welche in der Definition (4.3.15) erscheinen, getrennt von einander analysieren. Wir studieren zunächst das Transformationsverhalten der einzelnen Terme unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ und beschäftigen uns anschließend mit den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden.

1. Das Transformationsverhalten der Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit ergibt sich aus Gleichung (5.1.18):

$$\delta\hat{B}_{\mu\nu} = \xi^\rho\,(\partial_\rho\hat{B}_{\mu\nu}) + \hat{B}_{\mu\rho}\,(\partial_\nu\xi^\rho) + \hat{B}_{\rho\nu}\,(\partial_\mu\xi^\rho). \tag{5.1.31}$$

   Die reduzierten Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie transformieren nach der dimensionalen Reduktion also wie die Komponenten einer 2-Form der vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

2. Die Variation des Ausdrucks $V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha}$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ wird durch die Variation (5.1.23) der Kaluza-Klein Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ und (5.1.29) der Vektorfelder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie bestimmt:

$$\begin{aligned}\delta V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha} + V_{[\mu}{}^\alpha\delta B_{\nu]\alpha} &= \xi^\rho\,(\partial_\rho V_{[\mu}{}^\alpha)B_{\nu]\alpha} + (\partial_\mu\xi^\rho)V_{[\rho}{}^\alpha B_{\nu]\alpha}\\ &\quad - \xi^\rho\,(\partial_\rho B_{[\nu\alpha})\,V_{\mu]}{}^\alpha - (\partial_\nu\xi^\rho)\,B_{[\rho\alpha}V_{\mu]}{}^\alpha.\end{aligned} \tag{5.1.32}$$

   Das Anordnen der Terme zeigt, dass der Ausdruck $V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha}$ in der folgenden Weise unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit transformiert:

$$\begin{aligned}\delta V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha} + V_{[\mu}{}^\alpha\delta B_{\nu]\alpha} &= \xi^\rho\,\partial_\rho(V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha}) + V_{[\rho}{}^\alpha B_{\nu]\alpha}\,(\partial_\mu\xi^\rho)\\ &\quad + V_{[\mu}{}^\alpha B_{\rho]\alpha}\,(\partial_\nu\xi^\rho).\end{aligned} \tag{5.1.33}$$

3. Das Transformationsverhalten des Terms $V_\mu{}^\alpha V_\nu{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta}$ unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit ergibt sich aus der Variation (5.1.23) der Kaluza-Klein Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ und der Variation (5.1.22) der Skalarfelder $\hat{B}_{\alpha\beta}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\begin{aligned}&\delta V_\mu{}^\alpha\,V_\nu{}^\beta\,\hat{B}_{\alpha\beta} + V_\mu{}^\alpha\,\delta V_\nu{}^\beta\,\hat{B}_{\alpha\beta} + V_\mu{}^\alpha\,V_\nu{}^\beta\,\delta\hat{B}_{\alpha\beta}\\ &= \xi^\rho\,(\partial_\rho V_\mu{}^\alpha)\,V_\nu{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta} + \xi^\rho\,V_\mu{}^\alpha\,(\partial_\rho V_\nu{}^\beta)\,\hat{B}_{\alpha\beta} + \xi^\rho\,V_\mu{}^\alpha\,V_\nu{}^\beta\,(\partial_\rho\hat{B}_{\alpha\beta})\\ &\qquad + V_\rho{}^\alpha V_\nu{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\mu\xi^\rho) + V_\mu{}^\alpha V_\rho{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\nu\xi^\rho).\end{aligned} \tag{5.1.34}$$

   Das Zusammenfassen der Terme zeigt, dass $V_\mu{}^\alpha V_\nu{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta}$ unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ wie die Komponenten einer 2-Form der vierdimensionalen Supergravitationstheorie transformiert:

$$\begin{aligned}&\delta V_\mu{}^\alpha\,V_\nu{}^\beta\,\hat{B}_{\alpha\beta} + V_\mu{}^\alpha\,\delta V_\nu{}^\beta\,\hat{B}_{\alpha\beta} + V_\mu{}^\alpha\,V_\nu{}^\beta\,\delta\hat{B}_{\alpha\beta}\\ &= \xi^\rho\,\partial_\rho\,(V_\mu{}^\alpha\,V_\nu{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta}) + V_\rho{}^\alpha\,V_\nu{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\mu\xi^\rho) + V_\mu{}^\alpha\,V_\rho{}^\beta\hat{B}_{\alpha\beta}\,(\partial_\nu\xi^\rho).\end{aligned} \tag{5.1.35}$$

Damit haben wir bewiesen, dass das Feld B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie, welches in Gleichung (4.3.15) definiert worden ist, unter Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit wie eine 2-Form transformiert. Nachdem wir die Variation der 2-Form B_2 unter Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ hergeleitet haben, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden. Wir haben in den Gleichungen (5.1.22) und (5.1.30) bewiesen, dass die Skalarfelder $\hat{B}_{\alpha\beta}$ und die Vektorfelder $B_{\mu\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter diesen Transformationen invariant sind. Das Transformationsverhalten der 2-Form B_2 unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, ergibt sich folglich aus der Variation (5.1.24) der Kaluza-Klein Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ und der Variation (5.1.18) der Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu} &= \delta\hat{B}_{\mu\nu} + \delta V_{[\mu}{}^\alpha B_{\nu]\alpha} - \delta V_\mu{}^\alpha\, V_\nu{}^\beta\, \hat{B}_{\alpha\beta} - V_\mu{}^\alpha\, \delta V_\nu{}^\beta\, \hat{B}_{\alpha\beta} \\ &= \hat{B}_{\mu\alpha}\,(\partial_\nu\xi^\alpha) - \hat{B}_{\nu\alpha}\,(\partial_\mu\xi^\alpha) + (\partial_{[\mu}\xi^\alpha)\,B_{\nu]\alpha} \\ &\quad - (\partial_\mu\xi^\alpha)\,V_\nu{}^\beta\,\hat{B}_{\alpha\beta} - V_\mu{}^\alpha\,(\partial_\nu\xi^\beta)\,\hat{B}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{5.1.36}$$

Die Verwendung der Definition (4.3.11) für die Vektorfelder $B_{\mu\alpha}$ führt auf das folgende Transformationsverhalten der 2-Form B_2 der vierdimensionalen Supergravitationstheorie [11]:

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu} &= B_{\mu\alpha}\,(\partial_\nu\xi^\alpha) - B_{\nu\alpha}\,(\partial_\mu\xi^\alpha) + (\partial_{[\mu}\xi^\alpha)\,B_{\nu]\alpha} \\ &= \frac{1}{2}B_{\mu\alpha}\,(\partial_\nu\xi^\alpha) - \frac{1}{2}B_{\nu\alpha}\,(\partial_\mu\xi^\alpha) \\ &= \ B_{[\mu\alpha}\,(\partial_{\nu]}\xi^\alpha). \end{aligned} \tag{5.1.37}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die 2-Form der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, über ein einfaches Transformationsverhalten verfügt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts erläutern wir noch einmal die Leitlinien der Argumentation und fassen die Ergebnisse der Analyse des Transformationsverhaltens der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie zusammen. Wir haben argumentiert, dass die massive, sechsdimensionale Supergravitationstheorie aufgrund der zugrunde liegenden Super-Poincarè Algebra unter Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit invariant ist. Es hat sich herausgestellt, dass sich die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie einerseits als Raumzeit-Diffeomorphismen ξ^μ und andererseits als nicht triviale Transformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass sich diese Komponenten bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. Die Analyse hat ergeben, dass die redefinierten *Skalar-* und *Vektorfelder* der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, invariant sind und sich die Diffeomorphismen ξ^α des Torus T^2 nach der Reduktion als *Eichtransformationen* in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Das Transformationsverhalten der 2-Form B_2 stellt in gewisser Hinsicht eine Ausnahme dar, zumal sie nach der Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie weiterhin über einfache Transformationseigenschaften unter den Symmetrien verfügt, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden.

5.1.3 Invarianz der Wirkung der massiven D=4 Supergravitationstheorie unter den induzierten Symmetrietransformationen

Wir haben diskutiert, dass sich die Diffeomorphismen $\hat{\xi}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit aufgrund des Produktansatzes (2.2.1) aus Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und Diffeomorphismen des Torus T^2 zusammensetzen. Die Diffeomorphismen ξ^μ der Raumzeit-Mannigfaltigkeit vererben sich bei der dimensionalen Reduktion in einer natürlichen Weise auf die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie. Die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induzieren hingegen *Eichtransformationen* und nicht triviale Transformationen der Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie. Wir haben im dritten und vierten Kapitel gesehen, dass sich diese Komponenten bei der dimensionalen Reduktion in einer Weise organisieren, welche eine Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie implizierte. Es hat sich herausgestellt, dass die *Skalar-* und *Vektorfelder* der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, invariant sind und sich die Diffeomorphismen des Torus T^2 nach der dimensionalen Reduktion als *Eichtransformationen* der Kaluza-Klein Vektorfelder in der vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Die 2-Form B_2 stellt in gewisser Hinsicht eine Ausnahme dar, zumal sie nach der Redefinition der Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie über einfache Transformationseigenschaften unter den Symmetrietransformationen verfügt, welche durch die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert werden. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass sich die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie trotz der *Anomalie* im Transformationsverhalten der 2-Form B_2 in einer manifest invarianten Form schreiben lässt und die reduzierte Supergravitationstheorie dadurch eine *Eichfreiheit* bezüglich der Kaluza-Klein Vektorfelder gewinnt.

Wir haben gesehen, dass die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.1) der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 auf die Wirkung (3.7.1) der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie führt. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Vektorfelder A_1^I nach der dimensionalen Reduktion durch ihre Feldstärken (3.7.12) in der Teilwirkung (3.7.3) der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen, so dass die masselose Theorie bezüglich dieser Vektorfelder über eine Eichfreiheit verfügt. Präziser formuliert ist die masselose, vierdimensionalen Supergravitationstheorie invariant unter den folgenden Transformationen:

$$A_1^I \mapsto A_1^I + d\Lambda^I, \tag{5.1.38}$$

wobei Λ^I beliebige C^1-Funktionen bezeichnen.

Die Vektorfelder V_1^α, $B_{1\alpha}$, welche bei der Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (3.1.1) der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erzeugt worden sind, erscheinen nach der dimensionalen Reduktion hingegen ohne Ableitung in der verallgemeinerten Feldstärke (3.7.15) der 2-Form B_2. Die masselose, vierdimensionale Supergravitationstheorie verfügt daher auf den ersten Blick über keine Eichfreiheit bezüglich dieser Vektorfelder. Die Eichtransformationen (5.1.24) der Kaluza-Klein Vektorfelder V_μ^α werden jedoch durch die Diffeomorphismen ξ^α des Torus T^2 induziert und sind damit an die Transformationen (5.1.37) der 2-Form B_2 unter den induzierten Symmetrietransformationen gekoppelt. Wir müssen die Invarianz der verallgemeinerten Feldstärke (3.7.15) der 2-Form B_2 unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, daher explizit zeigen.

Wir haben im letzten Abschnitt bewiesen, dass die Vektorfelder $B_{1\alpha}$ der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Transformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α des Torus T^2 induziert werden, invariant sind. Die Variation der Feldstärke H_3 ergibt sich dem entsprechend aus dem Transformationsverhalten (5.1.37) der 2-Form B_2 unter den induzierten Symmetrietransformationen und der Variation (5.1.24) der Kaluza-Klein Vektorfelder ${V_\mu}^\alpha$ unter den zugehörigen Eichtransformationen [11]:

$$\begin{aligned} \delta H_3 = &\ d\left(\delta B_2\right) - \frac{1}{2}\, d\left(\delta V_1^\alpha\right) \wedge B_{1\alpha} - \frac{1}{2}\, dB_{1\alpha} \wedge \delta V_1^\alpha \\ = &\ \frac{1}{2}\, d\left(B_{1\alpha} \wedge d\xi^\alpha\right) - \frac{1}{2}\, dB_{1\alpha} \wedge d\xi^\alpha \\ = &\ \frac{1}{2}\, dB_{1\alpha} \wedge d\xi^\alpha - \frac{1}{2}\, dB_{1\alpha} \wedge d\xi^\alpha = 0\,, \end{aligned} \tag{5.1.39}$$

wobei wir die Identität $dd\xi^\alpha = 0$ verwendet haben.

Durch die Invarianz der Feldstärke H_3 der 2-Form B_2 unter den gekoppelten Transformationen (5.1.37) und (5.1.24) rekuperiert die masselose, vierdimensionale Supergravitationstheorie die Eichfreiheit bezüglich der Kaluza-Klein Vektorfelder V_1^α und die Wirkung (3.7.1) wird manifest invariant unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden. Die 2-Form B_2 kann durch das Ausnutzen ihrer Bewegungsgleichung dualisiert werden und erscheint anschließend als Skalarfeld in der Wirkung (3.7.1) der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Um die Wirkung vollständig auszuarbeiten, muss man die Komponenten der Felder der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, welche in der Wirkung (3.7.5) des topologischen Sektors erscheinen, durch die Felder der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie ersetzen. Die Terme in der Wirkung (3.7.5) des topologischen Sektors lassen sich dann in eine Form bringen, welche den Vergleich mit der Literatur [21] ermöglicht.

Wir haben diskutiert, dass die Kaluza-Klein Reduktion der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf einem Torus T^2 auf die Wirkung (4.3.1) einer massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie führt. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Vektorfelder A_1^I nach der dimensionalen Reduktion durch ihre Ableitungen in der Teilwirkung (4.3.3) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen und die massive Theorie damit die selbe Eichfreiheit (5.1.38) besitzt, über welche die masselose, vierdimensionale Supergravitationstheorie verfügt. Darüber hinaus führt die dimensionale Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zu einer Korrektur der verallgemeinerten Feldstärken der Vektorfelder A_1^I der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

Die Vektorfelder $B_{1\alpha}$, V_1^α, welche bei der dimensionalen Reduktion erzeugt worden sind, erscheinen nach der Kaluza-Klein Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ohne Ableitung in den verallgemeinerten Feldstärken (4.3.13) der Vektorfelder A_1^I. Dem Anschein nach besitzt die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie daher über keine Eichfreiheit bezüglich dieser Vektorfelder. Die Eichtransformationen (5.1.24) der Kaluza-Klein Vektorfelder V_1^α werden jedoch durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert und sind in diesem Sinne an die Transformationen (5.1.37) der 2-Form B_2 gekoppelt. Wir müssen die Invarianz der verallgemeinerten Feldstärken der Vektorfelder A_1^I der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α des Torus T^2 induziert werden, daher explizit zeigen.

Wir haben im letzten Abschnitt bewiesen, dass die Vektorfelder A_1^I unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, invariant sind. Die Variation der verallgemeinerten Feldstärken f_2^I ergibt sich dem entsprechend aus der Variation (5.1.37) der 2-Form B_2 unter den induzierten Symmetrietransformationen und der Variation (5.1.24) der Kaluza-Klein Vektorfelder $V_\mu{}^\alpha$ unter den zugehörigen Eichtransformationen:

$$\begin{aligned}
\delta f_2^I &= 2m^I\,\delta B_2 + m^I\,\delta V_1^\alpha \wedge B_{1\alpha} \\
&= 2m^I\,\frac{1}{2}B_{1\alpha}\wedge d\xi^\alpha + m^I\,d\xi^\alpha \wedge B_{1\alpha} \\
&= m^I\,B_{1\alpha}\wedge d\xi^\alpha - m^I\,B_{1\alpha}\wedge d\xi^\alpha = 0\,,
\end{aligned} \tag{5.1.40}$$

wobei wir die Antisymmetrie des Dachprodukts ausgenutzt haben.

Durch die Invarianz der verallgemeinerten Feldstärken der Vektorfelder A_1^I rekuperiert die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie die Eichfreiheit bezüglich der Kaluza-Klein Vektorfelder V_1^α und die Wirkung (4.3.1) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wird manifest invariant unter den Symmetrietransformationen, welche durch die Diffeomorphismen ξ^α der internen Mannigfaltigkeit induziert werden. Die 2-Form B_2 kann durch das Ausnutzen ihrer Bewegungsgleichung dualisiert werden und erscheint anschließend als Skalarfeld in der Wirkung (4.3.1) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Um die Wirkung vollständig auszuarbeiten, muss man die Komponenten der Felder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, welche in der Wirkung (4.3.5) des topologischen Sektors erscheinen, durch die Felder der vierdimensionalen Supergravitationstheorie ersetzen. Die Terme in der Wirkung (4.3.5) des topologischen Sektors lassen sich dann in eine Form bringen, die den Vergleich mit der Literatur [21] ermöglicht.

5.2 Stückelberg-Eichtransformationen

Wir haben diskutiert, dass die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ und die 2-Form $\hat{B}_2$ durch ihre Ableitungen in der Wirkung (3.1.1) der masselosen, sechsdimensionalen Supergraviationstheorie erscheinen und die masselose Supergravitationstheorie damit über eine Eichfreiheit verfügt, d.h. unter den Transformationen (2.1.11) invariant ist. In der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheint die 2-Form $\hat{B}_2$ allerdings in den verallgemeinerten Feldstärken (2.1.5), so dass die massive Supergravitationstheorie nicht mehr die selbe Eichfreiheit besitzt, über welche die masselose Supergravitationstheorie verfügte. Die Einführung der Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12), d.h. gekoppelter Tensortransformationen der 2-Form $\hat{B}_2$ und der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ stellt die „Eichfreiheit" der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie jedoch wieder her [6]. In diesem Kapitel werden zeigen, dass die massive, sechsdimensionale Supergravitationstheorie unter der gekoppelten Tensortransformationen (2.1.12) invariant ist. Anschließend werden wir untersuchen, in welcher Weise sich die Stückelberg-Eichtransformationen bei der dimensionalen Reduktion auf die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie vererben. Es wird sich herausstellen, dass sie zwei verschiedene Typen von *Tensortransformationen* der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. Wir werden das Transformationsverhalten der Felder der reduzierten Supergravitationstheorie unter den induzierten Transformationen herleiten unter zeigen, dass die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie unter den gekoppelten Tensortransformationen invariant ist.

5.2.1 Invarianz der massiven D=6 Supergravitationstheorie unter Stückelberg-Eichtransformationen

Im diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) invariant ist. Die verallgemeinerten Feldstärken (2.1.5) der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ sind unter den gekoppelten Tensortransformationen manifest invariant. In den topologischen Termen (4.2.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen die Feldstärken $\hat{\mathcal{F}}_2^I$ allerdings gemeinsam mit der 2-Form $\hat{B}_2$, welche unter den Stückelberg-Eichtransformationen transformiert. Um die Invarianz der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter gekoppelten Tensortransformationen zu beweisen, ist es daher hinreichend die Invarianz der Wirkung (4.2.1) des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zu zeigen.

Die Wirkung (4.2.1) des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie setzt sich aus drei verschiedenen Anteilen zusammen. Wir analysieren die Variation der einzelnen Terme unter den Stückelberg-Eichtransformationen getrennt von einander:

1. Die Variation des Terms $\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ}$ ergibt sich aus der Variation der 2-Form $\hat{B}_2$ unter den Tensortransformationen (2.1.12):

$$\delta \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ} = d\Sigma_1 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ}. \tag{5.2.1}$$

   Das Einsetzen dieses Ausdrucks in die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ermöglicht es, partiell zu integrieren. Nach der partiellen Intergration erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\delta \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ} = \Sigma_1 \wedge d\hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ} + \Sigma_1 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge d\hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ}. \tag{5.2.2}$$

Die Verwendung der Identität $d\hat{\mathcal{F}}_2^I = 2m^I \hat{B}_2$ führt auf die folgenden Variation des Terms $\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ}$ unter den Stückelberg-Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \delta \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ} &= 2m^I \Sigma_1 \wedge d\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ} + 2m^J \Sigma_1 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \wedge d\hat{B}_2 \, \mathcal{L}_{IJ} \\ &= 4m^I \Sigma_1 \wedge d\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J \, \mathcal{L}_{IJ}, \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

wobei wir die Terme im letzten Schritt zusammengefasst haben.

2. Die Variation des Terms $-2\hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} m^J$ unter den Stückelberg-Eichtransformationen erhält man durch die Variation der 2-Form $\hat{B}_2$. Das Transformationsverhalten der 2-Form $\hat{B}_2$ unter den gekoppelten Tensortransformationen (2.1.12) führt auf den folgenden Ausdruck:

$$-4\delta \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J = -4 \, d\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J . \tag{5.2.4}$$

Das Einsetzen dieser Relation in die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ermöglicht es, partiell zu integrieren. Nach der partiellen Integration erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} -4\delta \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J = &- 4\Sigma_1 \wedge d\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J \\ &- 4\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge d\hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J . \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Die Verwendung der Relation $d\hat{\mathcal{F}}_2^I = 2m^I d\hat{B}_2$ führt auf die Variation des Terms $-2\hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} m^J$ unter den gekoppelten Tensortransformationen:

$$\begin{aligned} -4\delta \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J = &- 4\Sigma_1 \wedge d\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J \\ &- 8\,\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge d\hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J . \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

3. Die Variation des Terms $\frac{3}{4}\hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L} \, m^J$ unter den Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) ergibt sich aus der Variation der 2-Form $\hat{B}_2$ unter diesen gekoppelten Tensortransformationen:

$$4\,\delta \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L} \, m^J = 4\, d\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J . \tag{5.2.7}$$

Das Einsetzen des Ausdrucks (5.2.7) in die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie ermöglicht es, partiell zu integrieren. Nach der partiellen Integration erhält man das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} 4\,\delta \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L} \, m^J &= 4\,\Sigma_1 \wedge d\hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J \\ &\quad + 4\,\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge d\hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J \\ &= 8\,\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge d\hat{B}_2 \, m^I \, \mathcal{L}_{IJ} \, m^J . \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Nachdem wir die Variation der einzelnen Terme unter den gekoppelten Tensortransformationen hergeleitet haben haben, können wir die Variation der Wirkung (4.2.1) des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie bestimmen. Aus den Gleichungen (5.2.3), (5.2.6) und (5.2.8) folgt, dass die Variation der Wirkung des topologischen Sektors der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Stückelberg-Eichtransformationen verschwindet:

$$\begin{aligned}\triangle\hat{S}'_{top} = & \int 4m^I \Sigma_1 \wedge d\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^J\, \mathcal{L}_{IJ} - \int 4\Sigma_1 \wedge d\hat{B}_2 \wedge \hat{\mathcal{F}}_2^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\ & - \int 8\,\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge d\hat{B}_2\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J + \int 8\,\Sigma_1 \wedge \hat{B}_2 \wedge d\hat{B}_2\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J = 0.\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Stückelberg-Eichtransformationen invariant ist [6]. Im folgenden Abschnitt werden wir studieren, in welcher Weise sich die gekoppelten Tensortransformationen (2.1.12) nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Dabei wird sich herausstellen, dass sie zwei verschiedene Typen von *Tensortransformationen* induzieren, unter welchen die Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie transformieren.

5.2.2 Transformationsverhalten der Felder der massiven D=4 Supergravitationstheorie unter gekoppelten Tensortransformationen

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, in welcher Weise sich die Stückelberg-Eichtransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach den dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Zu diesem Zweck werden wir zunächst das Transformationsverhalten der 2-Form $\hat{B}_2$ und der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter den gekoppelten Tensortransformationen (2.1.12) betrachten. Anschließend werden wir den Kaluza-Klein Ansatz für die Stückelberg-Eichtransformationen vorstellen und ihn in die Variation der Felder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie einsetzen. Diese Vorgehensweise wird es uns ermöglichen, die induzierten Symmetrietransformationen der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie zu identifizieren und die Variation der reduzierten Komponenten der Felder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zu bestimmen. Dabei wird sich herausstellen, dass die Stückelberg-Eichtransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zwei verschiedene Typen von gekoppelten Tensortransformationen induzieren. Wir werden das Transformationsverhalten der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den *induzierten Tensortransformationen* herleiten und im dritten Abschnitt die Invarianz der Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den gekoppelten Tensortransformationen zeigen.

Wir betrachten zunächst das Transformationsverhalten der 2-Form $\hat{B}_2$ unter den Stückelberg-Eichtransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\delta\hat{B}_2 = d\Sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\partial_{\hat{\mu}}\Sigma_{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}}\Sigma_{\hat{\mu}}\right) dx^{\hat{\mu}} \wedge dx^{\hat{\nu}}. \tag{5.2.10}$$

Der Reduktionsansatz postuliert, dass die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie von den internen Koordinaten unabhängig sind und sich die sechsdimensionale Mannigfaltigkeit M_6 als Produkt (2.2.1) aus der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M_4 und einem Torus T^2 schreiben lässt. Wir dehnen diesen Ansatz auf die gekoppelten Tensortransformationen aus und nehmen an, dass sie von den Koordinaten der internen Mannigfaltigkeit unabhängig sind:

$$\Sigma_1(x, y) = \Sigma_1(x). \tag{5.2.11}$$

Das Einsetzen des Reduktionsansatzes (5.2.11) für die Stückelberg-Eichtransformationen in die Variation der 2-Form $\hat{B}_2$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \delta\hat{B}_2 &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\Sigma_\nu - \partial_\nu\Sigma_\mu)\,dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{1}{2}\,\partial_\mu\Sigma_\alpha\,dx^\mu \wedge dx^\alpha - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\Sigma_\alpha\,dx^\alpha \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\Sigma_\nu - \partial_\nu\Sigma_\mu)\,dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_\mu\Sigma_\alpha\,dx^\mu \wedge dx^\alpha. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Der Vergleich mit dem Reduktionsansatz (2.2.10) für die 2-Form $\hat{B}_2$ erlaubt die Schlussfolgerung, dass die Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ und $\hat{B}_{\mu\alpha}$ unter den induzierten Symmetrietransformationen der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie in der folgenden Weise transformieren:

$$\delta\hat{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu\Sigma_\nu - \partial_\nu\Sigma_\mu, \quad \delta\hat{B}_{\mu\alpha} = \partial_\mu\Sigma_\alpha. \tag{5.2.13}$$

Wir betrachten als nächstes das Transformationsverhalten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ unter den Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\delta\tilde{\mathcal{A}}_1^I = d\Lambda^I - 2m^I\,\Sigma_1 = (\partial_{\hat{\mu}}\Lambda^I - 2m^I\,\Sigma_{\hat{\mu}})\,dx^{\hat{\mu}}. \tag{5.2.14}$$

Der Kaluza-Klein Ansatz für die Eichtransformationen und die gekoppelten Tensortransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie führt auf das folgende Transformationsverhalten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$:

$$\delta\tilde{\mathcal{A}}_1^I = (\partial_\mu\Lambda^I - 2m^I\,\Sigma_\mu)\,dx^\mu - 2m^I\,\Sigma_\alpha\,dx^\alpha. \tag{5.2.15}$$

Der Vergleich mit dem Reduktionsansatz (2.2.9) für die Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ erlaubt die Schlussfolgerung, dass die reduzierten Komponenten $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ unter den induzierten Symmetrietransformationen der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie in der folgenden Weise transformieren:

$$\delta\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I = \partial_\mu\Lambda^I - 2m^I\,\Sigma_\mu, \quad \delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I = -2m^I\,\Sigma_\alpha. \tag{5.2.16}$$

Der Reduktionsansatz (5.2.11) für die Stückelberg-Eichtransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induziert also zwei verschiedene Arten von Tensortransformationen der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Die Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^I$ transformieren unter *Tensortransformationen erster Art* und reproduzieren in einem gewissen Sinne die Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie. Die reduzierten Komponenten $\hat{B}_{\mu\alpha}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ transformieren hingegen unter *Tensortransformationen zweiter Art* und eröffnen damit die Möglichkeit einer zusätzlichen Symmetrie der vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Wir werden zunächst das Transformationsverhalten der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter *Tensortransformationen erster und zweiter Art* herleiten und im dritten Abschnitt zeigen, dass die Wirkung der reduzierten Supergravitationstheorie unter den *induzierten Tensortransformationen* invariant ist.

Das Transformationsverhalten (5.2.13) der Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ und die Variation (5.2.16) der Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Tensortransformationen erster Art führt auf die folgende Variation der Komponenten der 2-Form B_2 und der Vektorfelder A_1^I der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^I &= \delta \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - \delta \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \, V_\mu^\alpha \\ &= \partial_\mu \Lambda^I - 2m^I \, \Sigma_\mu, \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu} &= \delta \hat{B}_{\mu\nu} + V_{[\mu}^\alpha \delta B_{\nu]\alpha} + V_\mu^\alpha \, V_\nu^\beta \, \delta \hat{B}_{\alpha\beta} \\ &= \partial_\mu \Sigma_\nu - \partial_\nu \Sigma_\mu. \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Die 2-Form B_2 und die Vektorfelder A_1^I der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie transformieren unter den gekoppelten Tensortransformationen erster Art also in der folgenden Weise:

$$\delta B_2 = d\Sigma_1', \qquad \delta A_1^I = d\Lambda'^I - 2m^I \, \Sigma_1', \tag{5.2.19}$$

wobei wir die Notationen $\Sigma_1' = \Sigma_\mu(x) \, dx^\mu$ und $\Lambda'^I = \Lambda^I(x)$ verwendet haben.

Das Transformationsverhalten (5.2.16) der Komponenten der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}_1^I$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Tensortransformationen zweiter Art führt auf die folgende Variation der Komponenten der Vektorfelder A_1^I und der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\delta \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I = -2m^I \, \Sigma_\alpha, \tag{5.2.20}$$

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^I &= \delta \tilde{\mathcal{A}}_\mu^I - V_\mu^\alpha \, \delta \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \\ &= 2m^I \, V_\mu^\alpha \, \Sigma_\alpha. \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Das Transformationsverhalten (5.2.13) der Komponenten der 2-Form $\hat{B}_2$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie unter Tensortransformationen zweiter Art führt auf die folgende Variation der Komponenten der 2-Form B_2 und der Vektorfelder $B_{1\alpha}$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\alpha} &= \delta \hat{B}_{\mu\alpha} + V_\mu^\beta \, \delta \hat{B}_{\alpha\beta} \\ &= \ \partial_\mu \Sigma_\alpha, \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu} &= \delta \hat{B}_{\mu\nu} + V_{[\mu}^\alpha \, \delta B_{\nu]\alpha} - V_\mu^\alpha \, V_\nu^\beta \, \delta \hat{B}_{\alpha\beta} \\ &= \ V_{[\mu}^\alpha (\partial_{\nu]} \Sigma_\alpha). \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Die 2-Form B_2, die Vektorfelder $B_{1\alpha}$, A_1^I und die Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie transformieren unter den gekoppelten Tensortransformationen zweiter Art also in der folgenden Weise:

$$\delta B_2 = \frac{1}{2} V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha, \quad \delta B_{1\alpha} = d\Sigma_\alpha, \quad \delta A_1^I = 2m^I V_1^\alpha \Sigma_\alpha, \quad \delta \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I = -2m^I \Sigma_\alpha. \tag{5.2.24}$$

Damit haben wir das Transformationsverhalten der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den *induzierten Tensortransformationen* hergeleitet. Die gekoppelten Tensortransformationen (5.2.19) erster

Art reproduzieren in einem gewissen Sinne die Stückelberg-Eichtransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie. Bei den Tensortransformationen (5.2.24) zweiter Art handelt es sich hingegen um eine neue Art von Transformationen, welche auf den Skalar- $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ und Vektorfeldern $B_{1\alpha}$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wirken. Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie unter gekoppelten Tensortransformationen erster und zweiter Art invariant ist.

5.2.3 Invarianz der massiven D=4 Supergravitationstheorie unter gekoppelten Tensortransformationen

Wir haben diskutiert, dass die Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion zwei verschiedene Typen von *gekoppelten Tensortransformationen* der Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren. In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Tensortransformationen invariant ist. Zu diesem Zweck werden wir zunächst zeigen, dass die verallgemeinerte Feldstärke (4.3.16) der 2-Form B_2 unter Tensortransformationen erster und zweiter Art invariant ist. Anschließend werden wir die Invarianz der Wirkungen der Vektor- und Skalarfelder sowie des topologischen Sektors der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Tensortransformationen herleiten.

Wir zeigen zunächst die Invarianz der verallgemeinerten Feldstärke der 2-Form B_2 unter den induzierten Tensortransformationen erster und zweiter Art. Die verallgemeinerte Feldstärke H_3 ist invariant unter Tensortransformationen erster Art, weil die 2-Form B_2 durch ihre Ableitung in die Definition (4.3.16) eingeht. Die Variation unter gekoppelten Tensortransformationen zweiter Art ergibt sich aus dem Transformationsverhalten (5.2.24) der 2-Form B_2 und der Vektorfelder $B_{1\alpha}$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\begin{aligned}\delta H_3 &= d(\delta B_2) - \frac{1}{2} dV_1^\alpha \wedge \delta B_{1\alpha} \\ &= \frac{1}{2} d(V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha) - \frac{1}{2} dV_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha \\ &= \frac{1}{2} dV_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha - \frac{1}{2} dV_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha = 0.\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

Nachdem wir die Invarianz der verallgemeinerten Feldstärke der 2-Form B_2 unter den induzierten Tensortransformationen erster und zweiter Art gezeigt haben, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie. Die Feldstärke $H_{2\alpha}$, welche in Gleichung (4.3.12) definiert worden ist, enthält eine Ableitung, so dass sie unter Tensortransformationen zweiter Art invariant ist. Die Vektorfelder $B_{1\alpha}$ erscheinen allerdings ohne Ableitung in den verallgemeinerten Feldstärken (4.3.13) der Vektorfelder A_1^I, ebenso wie die Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ ohne Ableitung in der Teilwirkung (4.3.3) erscheinen. Um die Invarianz der Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder unter induzierten Tensortransformationen zu zeigen, müssen wir daher die Invarianz der verallgemeinerten Feldstärke f_2^I der Vektorfelder A_1^I unter Tensortransformationen erster Art und die Invarianz der gesamten Teilwirkung unter Tensortransformationen zweiter Art zeigen.

Die Variation der verallgemeinerten Feldstärken (4.3.13) der Vektorfelder A_1^I unter Tensortransformationen erster Art ergibt sich durch das Transformationsverhalten (5.2.19) der Vektorfelder A_1^I und der 2-Form B_2 der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\delta f_2^I = d(\delta A_1^I) + 2m^I \delta B_2 = -2m^I d\Sigma_1' + 2m^I d\Sigma_1' = 0. \tag{5.2.26}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Variation der verallgemeinerten Feldstärke f_2^I der Vektorfelder A_1^I unter Tensortransformationen erster Art verschwindet. Um die Invarianz der Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter Tensortransformationen zweiter Art zu zeigen, betrachten wir die Terme, welche die Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ und die Vektorfelder $B_{1\alpha}$ enthalten. Es stellt sich heraus, dass in der Wirkung der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie lediglich die folgenden Terme unter Tensortransformationen zweiter Art variieren:

$$\begin{aligned}\delta f_2^I + dV_1^\alpha\, \delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I = {} & d\,(\delta A_1^I) + dV_1^\alpha\, \delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I \\ & + 2\, m^I\, \delta B_2 + m^I\, V_1^\alpha \wedge \delta B_{1\alpha}.\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

Wir betrachen in der Variation (5.2.27) die Ausdrücke, welche die Vektorfelder $B_{1\alpha}$ enthalten und die Ausdrücke, welche die Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ involvieren, getrennt von einander. Die Terme, welche die Vektorfelder $B_{1\alpha}$ enthalten, sind durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned}2m^I \delta B_2 + m^I\, V_1^\alpha \wedge \delta B_{1\alpha} &= m^I\, V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha + m^I\, V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha \\ &= 2\, m^I\, V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha,\end{aligned} \tag{5.2.28}$$

wobei wir die Variation (5.2.24) der Vektorfelder $B_{1\alpha}$ und der 2-Form B_2 verwendet haben. Die Terme in der Variation (5.2.27), welche die Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ involvieren, sind hingegen durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned}d(\delta A_1^I) + dV_1^\alpha\, \delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I &= 2\, m^I\, d(V_1^\alpha\, \Sigma_\alpha) - 2m^I\, dV_1^\alpha\, \Sigma_\alpha \\ &= 2m^I\, dV_1^\alpha\, \Sigma_\alpha - 2m^I\, V_1^\alpha \wedge \Sigma_\alpha - 2m^I\, dV_1^\alpha\, \Sigma_\alpha \\ &= -2\, m^I\, V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha,\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

wobei wir die Variation (5.2.24) der Vektorfelder A_1^I und der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ verwendet haben. Das Zusammenfassen der Ausdrücke, welche die Vektorfelder $B_{1\alpha}$ und die Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ enthalten, führt auf die folgende Variation der Terme in der Wirkung der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie:

$$\delta f_2^I + dV_1^\alpha\, \delta\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I = -2m^I\, V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha + 2m^I\, V_1^\alpha \wedge d\Sigma_\alpha = 0. \tag{5.2.30}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Tesortransformationen zweiter Art invariant ist. Aus der Invarianz der verallgemeinerten Feldstärke f_2^I der Vektorfelder A_1^I unter Tensortransformationen erster Art und der Invarianz der Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder unter Tensortransformationen zweiter Art folgt, dass die Wirkung der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Tensortransformationen invariant ist.

Die Felder in der Wirkung der Skalarfelder (4.3.4) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie transformieren nicht unter Tensortransformationen erster Art. Nach der dimensionalen Reduktion der Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen in der Teilwirkung (4.3.4) allerdings die Vektorfelder $B_{1\alpha}$, welche unter Tensortransformationen zweiter Art transformieren. Wir haben argumentiert, dass die dimensionale Reduktion auf eine kovariante Ableitung bezüglich der induzierten Tensortransformationen führt. An dieser Stelle zeigen wir die Invarianz der Ableitung der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ unter Tensortransformationen zweiter Art. Aus der Variation (5.2.24) der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ und der Vektorfelder $B_{1\alpha}$ der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie folgt, dass die Ableitung der Skalarfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ unter Tensortransformationen zweiter Art in der folgenden Weise variiert:

$$d(\delta\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) + 2m^I \delta B_{1\alpha} = -2m^I d\Sigma_\alpha + 2m^I d\Sigma_\alpha = 0. \tag{5.2.31}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die dimensionale Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie auf eine *kovariante Ableitung* bezüglich der Tensortransformationen zweiter Art führt und die Wirkung (4.3.4) der Skalarfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Tensortransformationen invariant ist.

In der Wirkung des topologischen Sektors der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen nach der dimensionalen Reduktion die Komponenten der Felder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie. Um die Invarianz der Teilwirkung (4.3.5) unter den induzierten Tensortransformationen zu zeigen, werden wir daher auf das Transformationsverhalten dieser Komponenten unter den Tensortransformationen erster und zweiter Art zurückgreifen. Die Variation der Wirkung des topologischen Sektors der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter Tensortransformationen erster Art ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned}
\triangle S'_{top} = &-\int \big(4\,\delta\hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\, m^I + 2\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \delta\tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \big)\,\mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\
&+ \int \big(4\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\hat{B}_{\alpha\beta}\,\delta\hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_2\, m^I + 2\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\hat{B}_{\alpha\beta}\,\hat{B}'_2 \wedge \delta\mathcal{F}'^I_2 \big)\,\mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\
&- \int \big(4\,\delta\hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\,\varepsilon^{\alpha\beta}\, m^J + 2\,\delta\tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\,\varepsilon^{\alpha\beta} \big)\,\mathcal{L}_{IJ} \\
&+ \int \big(2\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\hat{B}_{\alpha\beta}\,\delta\hat{B}'_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, m^J + \varepsilon^{\alpha\beta}\,\hat{B}_{\alpha\beta}\,\delta\tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^J_2 \big)\,\mathcal{L}_{IJ} \\
&- \int \delta\hat{B}'_2 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\mathcal{L}_{IJ}.
\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

Bei der Variation (5.2.32) der Wirkung des topologischen Sektors haben wir berücksichtigt, dass lediglich die Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ und $\tilde{\mathcal{A}}^I_\mu$ unter Tensortransformationen erster Art transformieren und die Terme dem entsprechend nach absteigenden Massenparametern geordnet. Die Verwendung des Transformationsverhaltens (5.2.13) der Komponenten $\hat{B}_{\mu\nu}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ und der Variation (5.2.16) der Komponenten $\tilde{\mathcal{A}}^I_\mu$ der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\triangle S'_{top} = -4 \int & \big(d\Sigma'_1 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge d\Sigma'_1 \big)\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\
+ 4 \int & \big(\varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta}\, d\Sigma'_1 \wedge \hat{B}'_2 - \varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta}\, \hat{B}'_2 \wedge d\Sigma'_1 \big)\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\
- 4 \int & \big(d\Sigma'_1 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge \tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, m^J - d\Sigma'_1 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, m^I \big)\, \mathcal{L}_{IJ} \\
+ 2 \int & \big(\varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta}\, d\Sigma'_1 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, m^J - \varepsilon^{\alpha\beta}\, \hat{B}_{\alpha\beta}\, d\Sigma'_1 \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^J_2\, m^I \big)\, \mathcal{L}_{IJ} \\
- \int & d\Sigma'_1 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} \;=\; 0,
\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

wobei wir die Symmetrie der Matrix $\mathcal{L}_{IJ}$ ausgenutzt und im letzten Schritt partiell integriert haben.

Damit haben wir gezeigt, dass die Variation der Wirkung (4.3.5) des topologischen Sektors der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter Tensortransformationen erster Art verschwindet. Die Variation der Wirkung des topologischen Sektors unter Tensortransformationen zweiter Art ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned}
\triangle S'_{top} = - \int & \big(8\, \hat{B}'_2 \wedge \delta\hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta}\, m^I + 4\hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d(\delta\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta) \big)\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\
- \int & \big(4\, \delta\hat{B}'_{1\alpha} \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, m^J + 2\, \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d(\delta\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta) \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^J_2 \big)\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} \\
- \int & \big(4\, \hat{B}'_2 \wedge \delta\hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\, m^J + 2\, \hat{B}'_2 \wedge d(\delta\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha) \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta \big)\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} \\
- \int & 2\, \delta\hat{B}'_{1\alpha} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ}.
\end{aligned} \tag{5.2.34}$$

Bei der Variation (5.2.34) der Wirkung des topologischen Sektors haben wir berücksichtigt, dass unter Tensortransformationen zweiter Art lediglich die Komponenten $\hat{B}_{\mu\alpha}$ und $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ transformieren und die Terme dem entsprechend nach absteigenden Massenparametern geordnet. Die Verwendung des Transformationsverhaltens (5.2.13) der Komponenten $\hat{B}_{\mu\alpha}$ der 2-Form $\hat{B}_2$ und der Variation (5.2.16) der Komponenten $\tilde{\mathcal{A}}^I_\alpha$ der Vektorfelder $\tilde{\mathcal{A}}^I_1$ der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie führt auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\triangle S'_{top} = -8 \int & \big(\hat{B}'_2 \wedge d\Sigma_\alpha \wedge \hat{B}'_{1\beta} - \hat{B}'_2 \wedge \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\Sigma_\beta \big)\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, m^I\, \mathcal{L}_{IJ}\, m^J \\
- 4 \int & \big(d\Sigma_\alpha \wedge \hat{B}'_{1\beta} \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2\, m^J - \hat{B}'_{1\alpha} \wedge d\Sigma_\beta \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^J_2\, m^I \big)\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} \\
- 4 \int & \big(\hat{B}'_2 \wedge d\Sigma_\alpha \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^I_\beta\, m^J - \hat{B}'_2 \wedge d\Sigma_\alpha \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, m^I \big)\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} \\
- 2 \int & d\Sigma_\alpha \wedge \tilde{\mathcal{F}}'^I_2 \wedge d\tilde{\mathcal{A}}^J_\beta\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \mathcal{L}_{IJ} \;=\; 0,
\end{aligned} \tag{5.2.35}$$

wobei wir die Symmetrie der Matrix $\mathcal{L}_{IJ}$ ausgenutzt und im letzten Schritt partiell integriert haben.

Damit haben wir die Invarianz der Teilwirkung (4.3.5) unter den Tensortransformationen zweiter Art bewiesen. Aus dem Verschwinden der Variationen (5.2.33) und (5.2.35) folgt, dass die Wirkung (4.3.5) des topologischen Sektors der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den induzierten Tensortransformationen invariant ist.

Wir haben diskutiert, dass die Wirkung (4.3.1) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie im Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch ist mit der Wirkung (3.7.1) der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einem Produkt $K3 \times T^2$ von Mannigfaltigkeiten [2]. In der Wirkung (3.7.1) der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen die Vektorfelder A_1^I und die 2-Form B_2 durch ihre Ableitungen, so dass die masselose Supergravitationstheorie über eine Eichfreiheit bezüglich dieser Felder verfügt. In der Wirkung (4.3.1) der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheint 2-Form B_2 hingegen in der verallgemeinerten Feldstärke f_2^I der Vektorfelder A_1^I, so dass die massive Supergravitationstheorie nicht mehr die selbe Eichfreiheit besitzt, über welche die masselose Supergravitationstheorie verfügte. Wir haben in diesem Kapitel gezeigt, dass die „Eichfreiheit" der masselosen Supergravitationstheorie durch die Einführung *gekoppelter Tensortransformationen*, wieder hergestellt wird. Präziser formuliert haben wir gezeigt, dass die Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie invariant ist unter den Tensortransformationen erster Art, welche auf den Feldern B_2 und A_1^I wirken und den Tensortransformationen zweiter Art, welche auf den Feldern $B_{1\alpha}$ und $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha^I$ wirken. Die Tensortransformationen der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie werden nach der dimensionalen Reduktion durch die Tensortransformationen (2.1.12) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induziert. Dabei entsprechen die Tensortransformationen (5.2.19) erster Art in einem gewissen Sinne den Stückelberg-Eichtransformationen der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, während die Tensortransformationen (5.2.24) zweiter Art die Möglichkeit einer zusätzlichen Symmetrie der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie eröffnen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Zum Abschluss fassen wir die Leitlinien der Argumentation und die Ergebnisse der Kaluza-Klein Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie zusammen. Im zweiten Kapitel haben wir die Wirkung der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie [6] vorgestellt und diskutiert, dass sie im Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch ist mit der Wirkung der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einer K3-Mannigfaltigkeit [23]. Im dritten Kapitel haben wir die masselose, sechsdimensionale Supergravitationstheorie reduziert. Zu diesem Zweck haben wir die Wirkung (3.1.1) der masselosen Supergravitationstheorie zunächst in eine Form gebracht, welche dem Produktansatz (2.2.1) der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht. Anschließend haben wir den Reduktionsansatz für die Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie eingesetzt, über die internen Koordinaten integriert und als Ergebnis die Wirkung (3.7.1) der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie [2] erhalten. Wir haben gesehen, dass die Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der Wirkung der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen und sich bei der Reduktion in einer Weise organisieren, welche eine Redefinition der Felder der reduzierten Supergravitationstheorie impliziert. Die Analyse des Transformationsverhaltens dieser Komponenten unter Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit hat ergeben, dass die Kaluza-Klein Reduktion *Skalar-* und *Vektorfelder* der masselosen, vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert [8]. Im vierten Kapitel haben wir die Wirkung (2.1.1) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie reduziert und dafür die selbe Methode verwendet, welche wir im dritten Kapitel bei der Reduktion der masselosen, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie angewandt haben. Als Ergebnis der Reduktion haben wir die Wirkung (4.3.1) einer massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erhalten, welche im Grenzfall $m^I \mapsto 0$ identisch ist mit der Wirkung (3.7.1) der masselosen Supergravitationstheorie des Typs IIA, kompaktifiziert auf einem Produkt $K3 \times T^2$ von Mannigfaltigkeiten. Wir haben gesehen, dass die dimensionale Reduktion der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie neue *Skalar-* und *Vektorfelder* der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie generierte.

Darüber hinaus führte sie zu einer Korrektur der *verallgemeinerten Feldstärken* der Vektorfelder A_1^I, einer *kovarianten Ableitung* in der Wirkung der Skalarfelder und ein *skalares Potential* in der Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

J. Schön und M. Weidner haben gezeigt [21], dass die kinetischen Terme der Vektorfelder einer massiven, vierdimensionalen N=4 Supergravitationstheorie im Allgemeinen in der Form (4.3.24) geschrieben werden können. Für den Vergleich mit der Literatur ist es daher notwendig, die Vektorfelder A_1^I, $B_{1\alpha}$ und ${V_1}^\alpha$ in einem Vektor A_1^M zusammenzufassen, dessen Index M über *multiple* Indizes läuft und in dessen Feldstärke H_2^M die verallgemeinerten Feldstärken der Vektorfelder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheinen. Die Maxwell-Terme in der Wirkung (4.3.3) der Vektorfelder lassen sich dann ausmultiplizieren und in eine Form bringen, welche die Bestimmung der Koeffizienten-Matrix M_{MN} ermöglicht. Für den Vergleich mit der Literatur ist es darüber hinaus notwendig, die Komponenten der Felder der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, welche in der Wirkung (4.3.5) der topologischen Terme erscheinen, durch die entsprechenden Felder der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie zu ersetzen. Diese Substitution erlaubt es, die Wirkung (4.3.5) der topologischen Terme vollständig auszuarbeiten und anschließend in eine Form zu bringen, welche die Bestimmung der Koeffizienten-Matrix η_{MN} und damit den Vergleich mit der Wirkung (4.3.24) erlaubt. Die 2-Form B_2 kann durch das Ausnutzen ihrer Bewegungsgleichung dualisiert werden und erscheint schließlich als Skalarfeld in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie.

Im fünften Kapitel haben wir analysiert, in welcher Weise sich die Symmetrien der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie nach der dimensionalen Reduktion in der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie wiederfinden. Wir haben gezeigt, dass sich die Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit in einer natürlichen Weise auf die vierdimensionalen Supergravitationstheorie vererben, während die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit *Eichtransformationen* der *Kaluza-Klein Vektorfelder* sowie nicht triviale Symmetrietransformationen der reduzierten Komponenten der Felder der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induzieren [20, 8]. Wir haben gesehen, dass die *Skalar- und Vektorfelder* der vierdimensionalen Supergravitationstheorie unter den Symmetrien, welche durch die Diffeomorphismen der internen Mannigfaltigkeit induziert werden, invariant sind und die 2-Form B_2 unter diesen Symmetrien über einfache Transformationseigenschaften verfügt. Die Argumentation hat ergeben, dass sich die Wirkung trotz der *Anomalie* im Transformationsverhalten der 2-Form in einer manifest invarianten Form schreiben lässt und die massive, vierdimensionale Supergravitationstheorie dadurch ihre *Eichfreiheit* bezüglich der Kaluza-Klein Vektorfelder zurückgewinnt.

Zum Abschluss der Symmetriebetrachtungen haben wir diskutiert, dass die masselose, vierdimensionale Supergravitationstheorie über eine *Eichfreiheit* bezüglich der 2-Form verfügt. In der Wirkung der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie erscheint die 2-Form allerdings in den verallgemeinerten Feldstärken der Vektorfelder A_1^I, so dass die massive Supergravitationstheorie nicht die selbe Eichfreiheit besitzt. Durch die Einführung *gekoppelter Tensortransformationen* der Felder der massiven Supergravitationstheorie wird die „Eichfreiheit“ der masselosen Supergravitationstheorie jedoch wieder hergestellt. Wir haben diskutiert, dass die Tensortransformationen der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie durch die Stückelberg-Eichtransformationen (2.1.12) der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie induziert werden. Dabei entsprechen die *Tensortransformationen erster Art* in einem gewissen Sinne den Tensortransformationen der massiven, sechsdimensionalen Supergravitationstheorie, während die *Tensortransformationen zweiter Art* die Möglichkeit einer zusätzlichen Symmetrie der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie eröffnen.

Wir haben im dritten Kapitel gesehen, dass die dimensionale Reduktion neue *Skalar*- und *Vektorfelder* der vierdimensionalen Supergravitationstheorie generiert. Wir haben allerdings nicht diskutiert, was mit der globalen Symmetriegruppe der massiven, vierdimensionalen Supergravitationstheorie nach der Einführung der zusätzlichen Vektorfelder geschieht und in welcher Weise die Symmetriegruppe der sechsdimensionalen Supergravitationstheorie in die Symmetriegruppe der vierdimensionalen Supergravitationstheorie eingebettet ist. Eine weiterführende Fragestellung sollte ausserdem thematisieren, in welcher Weise die masselose, vierdimensionale Supergravitationstheorie durch die *Eichung* ihrer globalen Symmetriegruppe deformiert wird und wie sich die Massenparameter in den *Eichungen* wiederfinden.

Anhang A

Kaluza-Klein Reduktion der Einstein-Hilbert Wirkung

In diesem Abschnitt zeigen wir die dimensionale Reduktion der Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6). Zur Vereinfachung werden wir das Krümmungsskalar $\hat{R}(\hat{x})$ durch die Spin-Verbindung $\hat{\omega}_{\hat{m}\hat{n}\hat{l}}$ in flachen, sechsdimensionalen Koordinaten ausdrücken und anschließend den Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ der sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit einsetzen [20]. In flachen, sechsdimensionalen Koordinaten lässt sich die Spin-Verbindung $\hat{\omega}_{\hat{m}\hat{n}\hat{l}}$ folgender Maßen ausdrücken [26]:

$$\hat{\omega}_{\hat{m}\hat{n}\hat{l}} = -\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}} + \hat{\Omega}_{\hat{n}\hat{l},\hat{m}} - \hat{\Omega}_{\hat{l}\hat{m},\hat{n}}, \tag{A.0.1}$$

mit den Koeffizenten $\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}}$ definiert als:

$$\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}} = \frac{1}{2}\,(\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}\,\hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\nu}} - \hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\mu}}\,\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\nu}})\,(\partial_{\hat{\nu}}\,\hat{e}_{\hat{\mu}\hat{l}}). \tag{A.0.2}$$

Unter Verwendung der Spin-Verbindung $\hat{\omega}_{\hat{m}\hat{n}\hat{l}}$ lässt sich das Krümmungsskalar $\hat{R}(\hat{x})$ folgender Maßen schreiben [26]:

$$\hat{R}(x) = \hat{\omega}^{\hat{m}}{}_{\hat{m}\hat{l}}\,\hat{\omega}^{\hat{n}}{}_{\hat{n}}{}^{\hat{l}} + \hat{\omega}^{\hat{n}}{}_{\hat{m}\hat{l}}\,\hat{\omega}^{\hat{m}\hat{l}}{}_{\hat{n}} + \hat{e}_{\hat{l}}{}^{\hat{\nu}}\,\hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\mu}}\,(\partial_{\hat{\nu}}\,\hat{\omega}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{n}\hat{l}} - \partial_{\hat{\mu}}\,\hat{\omega}_{\hat{\nu}}{}^{\hat{n}\hat{l}}). \tag{A.0.3}$$

Um den Einstein-Hilbert Term zu reduzieren, werden wir die Terme in Gleichung (A.0.3) in Ausdrücke mit internen, externen und gemischten Indizes aufteilen und anschließend die reduzierten Komponenten $\hat{\omega}_{mnl}$ usw. der Spin-Verbindung einsetzen. Die Komponenten der Spin-Verbindung lassen sich reduzieren, indem man in einem ersten Schritt den Reduktionsansatz (3.2.8) für das inverse Vielbein $\hat{e}_{\hat{m}}{}^{\hat{\mu}}$ in Gleichung (A.0.2) einsetzt und die Koeffizienten $\hat{\Omega}_{\hat{m}\hat{n},\hat{l}}$ berechnet. Diese Koeffizienten lassen sich anschließend in Gleichung (A.0.1) einsetzen, um die Komponenten der Spin-Verbindung zu reduzieren. Wir fassen die beiden Rechenschritte zusammen und setzen die reduzierten Komponenten $\hat{\omega}_{mnl}$ usw. der Spin-Verbindung direkt in das Krümmungsskalar ein. Dies führt auf die folgenden Ausdrücke:

1.

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{\hat{m}}{}_{\hat{m}\hat{l}}\,\hat{\omega}^{\hat{n}}{}_{\hat{n}}{}^{\hat{l}} &= \hat{\omega}^{m}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{n}{}_{n}{}^{l} + \hat{\omega}^{m}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{b}{}_{b}{}^{l} + \hat{\omega}^{a}{}_{al}\,\hat{\omega}^{n}{}_{n}{}^{l} + \hat{\omega}^{a}{}_{al}\,\hat{\omega}^{b}{}_{b}{}^{l} \\ &\quad + \hat{\omega}^{m}{}_{mc}\,\hat{\omega}^{n}{}_{n}{}^{c} + \hat{\omega}^{m}{}_{mc}\,\hat{\omega}^{b}{}_{b}{}^{c} + \hat{\omega}^{a}{}_{ac}\,\hat{\omega}^{n}{}_{n}{}^{c} + \hat{\omega}^{a}{}_{ac}\,\hat{\omega}^{b}{}_{b}{}^{c},\end{aligned} \tag{A.0.4}$$

$$\hat{\omega}^{m}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{n}{}_{n}{}^{l} = \omega^{m}{}_{ml}\,\omega^{n}{}_{n}{}^{l}, \tag{A.0.5}$$

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{a}{}_{al}\,\hat{\omega}^{b}{}_{b}{}^{l} &= g^{\mu\nu}(\partial_\mu E_{\alpha a})\,E^{\alpha a}\,(\partial_\nu E_{\beta b})\,E^{\beta b}\\ &= \frac{1}{4}\,G^{\alpha\beta}\,G^{\gamma\delta}g^{\mu\nu}(\partial_\mu G_{\alpha\beta})(\partial_\nu G_{\gamma\delta}),\end{aligned} \tag{A.0.6}$$

$$\hat{\omega}^{m}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{bl} = g^{\mu\nu}(\partial_\mu E_{\alpha a})\,E^{a\alpha}(\partial_\nu e_{\rho m} - \partial_\rho e_{\nu m})\,e^{m\rho}, \tag{A.0.7}$$

$$\hat{\omega}^{a}{}_{al}\,\hat{\omega}^{n}{}_{n}{}^{l} = \hat{\omega}^{m}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{bl}. \tag{A.0.8}$$

2.

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{\hat{n}}{}_{\hat{m}\hat{l}}\,\hat{\omega}^{\hat{m}\hat{l}}{}_{\hat{n}} &= \hat{\omega}^{n}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{ml}{}_{n} + \hat{\omega}^{n}{}_{mc}\,\hat{\omega}^{mc}{}_{n} + \hat{\omega}^{n}{}_{al}\,\hat{\omega}^{al}{}_{n} + \hat{\omega}^{n}{}_{ac}\,\hat{\omega}^{ac}{}_{n}\\ &+ \hat{\omega}^{b}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{ml}{}_{b} + \hat{\omega}^{b}{}_{al}\,\hat{\omega}^{al}{}_{b} + \hat{\omega}^{b}{}_{mc}\,\hat{\omega}^{mc}{}_{b} + \hat{\omega}^{b}{}_{ac}\,\hat{\omega}^{ac}{}_{b},\end{aligned} \tag{A.0.9}$$

$$\hat{\omega}^{n}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{ml}{}_{n} = \omega^{n}{}_{ml}\,\omega^{ml}{}_{n}, \tag{A.0.10}$$

$$\hat{\omega}^{n}{}_{mc}\,\hat{\omega}^{mc}{}_{n} = \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\,V^{\gamma}_{\mu\sigma}\,V^{\delta}_{\nu\sigma}G_{\gamma\delta}, \tag{A.0.11}$$

$$\hat{\omega}^{n}{}_{al}\,\hat{\omega}^{al}{}_{n} = -\frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\,V^{\gamma}_{\mu\rho}\,V^{\delta}_{\nu\sigma}G_{\gamma\delta}, \tag{A.0.12}$$

$$\hat{\omega}^{b}{}_{ml}\,\hat{\omega}^{ml}{}_{b} = -\frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\,V^{\gamma}_{\mu\rho}\,V^{\delta}_{\nu\sigma}G_{\gamma\delta}, \tag{A.0.13}$$

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{b}{}_{al}\,\hat{\omega}^{al}{}_{b} &= -\frac{1}{4}\,G^{\alpha\delta}\,G^{\beta\gamma}g^{\mu\nu}(\partial_\mu G_{\alpha\beta})\,(\partial_\nu G_{\gamma\delta})\\ = -\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,G^{\alpha\beta}(\partial_\mu E_{\alpha a})\,&(\partial_\nu E_{\beta}{}^{a}) - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu E_{\alpha a})\,E^{\alpha b}\,(\partial_\nu E_{\beta b})\,E^{\beta a}.\end{aligned} \tag{A.0.14}$$

3. Wir schreiben den Ausdruck $\hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\mu}}\,\hat{e}_{\hat{l}}{}^{\hat{\nu}}(\partial_{\hat{\nu}}\,\hat{\omega}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{n}\hat{l}} - \partial_{\hat{\mu}}\,\hat{\omega}_{\hat{\nu}}{}^{\hat{n}\hat{l}})$ aus und erhalten unmittelbar Terme, die Beiträge zur Reduktion liefern:

$$\begin{aligned}\hat{e}_{\hat{n}}{}^{\hat{\mu}}\,\hat{e}_{\hat{l}}{}^{\hat{\nu}}(\partial_{\hat{\nu}}\,\hat{\omega}_{\hat{\mu}}{}^{\hat{n}\hat{l}} - \partial_{\hat{\mu}}\,\hat{\omega}_{\hat{\nu}}{}^{\hat{n}\hat{l}}) &= e_l{}^{\nu}e_n{}^{\mu}(\partial_\nu\,\hat{\omega}_{\mu}{}^{ml}) - e_n{}^{\mu}e_l{}^{\nu}(\partial_\mu\,\hat{\omega}_{\nu}{}^{nl})\\ &+ e_l{}^{\nu}\,\hat{e}_{\hat{n}}{}^{\alpha}(\partial_\nu\,\hat{\omega}_{\alpha}{}^{\hat{n}l}) - e_n{}^{\mu}\hat{e}_{\hat{l}}{}^{\beta}\,(\partial_\mu\,\hat{\omega}_{\beta}{}^{n\hat{l}})\\ = e_l{}^{\nu}e_n{}^{\mu}(\partial_\nu\,\hat{\omega}_{\alpha}{}^{nl} - \partial_\mu\,\hat{\omega}_{\nu}{}^{nl}) &+ e_n{}^{\mu}e_l{}^{\sigma}\,V^{\beta}_{\sigma}\,(\partial_\mu\,\hat{\omega}_{\beta}{}^{nl}) - e_l{}^{\nu}e_n{}^{\rho}\,V^{\alpha}_{\rho}\,(\partial_\nu\,\hat{\omega}_{\alpha}{}^{nl})\\ &= e_l{}^{\nu}\,E_b{}^{\alpha}\,(\partial_\nu\,\hat{\omega}_{\alpha}{}^{bl}) - e_n{}^{\mu}\,E_c{}^{\beta}\,(\partial_\mu\,\hat{\omega}_{\beta}{}^{nc})\\ = e_l{}^{\nu}e_n{}^{\mu}(\partial_\nu\,\omega_{\mu}{}^{nl} - \partial_\mu\,\omega_{\nu}{}^{nl}) &+ \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,g^{\rho\sigma}\,V^{\gamma}_{\mu\rho}\,V^{\delta}_{\nu\sigma}\,G_{\gamma\delta}\\ &+ 2\,g^{\mu\nu}\partial_\mu(\partial_\nu E_{\alpha a})\,E^{a\alpha} + 2\,(\partial_\mu e^{\nu}_{n})\,e^{n\mu}\,(\partial_\nu E_{\alpha a})\,E^{a\alpha}.\end{aligned} \tag{A.0.15}$$

Das Einsetzen der reduzierten Terme in die Einstein-Hilbert Wirkung (3.2.6) erlaubt es, partiell zu integrieren. Durch das geschickte Zusammenfassen der Terme und die Integration über die internen Koordinaten erhält die reduzierte Wirkung S_{EH} schließlich die folgende Form [20]:

$$\begin{aligned}S_{EH} = \int \sqrt{\hat{g}}\;\{R(x) &- \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}G^{\alpha\beta}(\partial_\mu G_{\alpha\beta})\,G^{\gamma\delta}(\partial_\nu G_{\gamma\delta})\\ &- \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}(\partial_\mu G_{\alpha\beta})(\partial_\nu G^{\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\,V^{\gamma}_{\mu\rho}\,V^{\delta}_{\nu\sigma}\,G_{\gamma\delta}\}d^4x.\end{aligned} \tag{A.0.16}$$

Literaturverzeichnis

[1] Coleman, S. und J. Mandula: *All Possible Symmetries of the S Matrix.* Phys. Rev., 159(5):1251–1256, 1967.

[2] Duff, M. J., J. T. Liu und J. Rahmfeld: *Four-dimensional String/String/String Triality.* Nucl. Phys., B459:125–159, 1996.

[3] Green, M. B., J. H. Schwarz und E. Witten: *Superstring Theory, Volume 1, Introduction.* Cambridge University Press, erste Auflage, 1987.

[4] Green, M. B., J. H. Schwarz und E. Witten: *Superstring Theory, Volume 2, Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology.* Cambridge University Press, erste Auflage, 1987.

[5] Gurrieri, S.: *$N = 2$ and $N = 4$ Supergravities as Compactifications from String Theories in 10 Dimensions.* Doktorarbeit, Université de la Mediterranée - Aix-Marseille II, CTP, 2003. hep-th/0408044.

[6] Haack, M., J. Louis und H. Singh: *Massive Type IIA Theory on K3.* JHEP, 04:040, 2001.

[7] Haag, R., J. T. Lopuszanski und M. Sohnius: *All Possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix.* Nucl. Phys., B88:257, 1975.

[8] Kaloper, N. und R. C. Myers: *The O(dd) Story of Massive Supergravity.* JHEP, 05:010, 1999.

[9] Kaluza, T.: *On the Problem of Unity in Physics.* Sitzungsbericht Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) K1, 1921.

[10] Klein, O.: *Quantum Theory and Five-dimensional Theory of Relativity.* Z. Phys. 37, 1926.

[11] Maharana, J. und J. H. Schwarz: *Noncompact Symmetries in String Theory.* Nucl. Phys., B390:3–32, 1993.

[12] Nakahara, M.: *Geometry, Topology and Physics.* Adam Hilger, zweite Auflage, 1990.

[13] Nieuwenhuizen, P. van: *Supergravity.* Physics Report 68, Seiten 189–398, 1981.

[14] Peskin, M. E. und D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press, erste Auflage, 1995.

[15] Polchinski, J.: *String Theory, Volume I, An Introduction to the Bosonic String.* Cambridge University Press, erste Auflage, 1998.

[16] Polchinski, J.: *String Theory, Volume II, Superstring Theory and Beyond.* Cambridge University Press, erste Auflage, 1998.

[17] Polchinski, J. und E. Witten: *Evidence for Heterotic - Type I String Duality.* Nucl. Phys., B460:525–540, 1996.

[18] Romans, L. J.: *Massive N=2a Supergravity in Ten Dimensions.* Phys. Lett., B169:374, 1986.

[19] Samtleben, H.: *Lectures on Gauged Supergravity and Flux Compactifications.* Class. Quant. Grav., 25:214002, 2008.

[20] Scherk, J. und J. H. Schwarz: *How to Get Masses from Extra Dimensions.* Nucl. Phys., B153:61–88, 1979.

[21] Schön, J. und M. Weidner: *Gauged $N = 4$ supergravities.* JHEP, 05:034, 2006.

[22] Schutz, B. F.: *Geometrical Methods of Mathmatical Physics.* Cambridge Univ. Press, erste Auflage, 1980.

[23] Sen, A.: *String String Duality Conjecture in Six Dimensions and Charged Solitonic Strings.* Nucl. Phys., B450:103, 1995.

[24] Sohnius, M. F.: *Introducing Supersymmetry.* Physics Report 128, Seiten 39–204, 1985.

[25] Spanjaard, B.: *Compactifications of IIA Supergravity on $SU(2)$-Structure Manifolds.* Doktorarbeit, Universität Hamburg, II. Institut für Theoretische Physik, 2008. http://unith.desy.de/research/strings/research/.

[26] Tanii, Y.: *Introduction to Supergravities in Diverse Dimensions.* Review talk at YITP workshop on Supersymmetry, 1998. hep-th/9802138.

[27] Weinberg, S.: *Gravitation and Cosmology.* John Wiley and Sons, erste Auflage, 1971.

[28] Weinberg, S.: *The Quantum Theory of Fields, Volume I, Foundations.* Cambridge University Press, erste Auflage, 2005.

[29] Weinberg, S.: *The Quantum Theory of Fields, Volume II, Modern Applications.* Cambridge University Press, erste Auflage, 2005.

[30] Weinberg, S.: *The Quantum Theory of Fields, Volume III, Supersymmetry.* Cambridge University Press, erste Auflage, 2005.

[31] Wess, J. und J. Bagger: *Supersymmetry and Supergravity.* Princeton Univ. Press, zweite Auflage, 1984.

[32] Wess, J. und B. Zumino: *Supergauge Transformations in Four Dimensions.* Nucl. Phys., B70:39–50, 1974.

[33] Witten, E.: *String Theory Dynamics in Various Dimensions.* Nuclear Physics, B443:85–126, 1995.

Danksagung

Diese Arbeit ist zu gleichen Teilen am II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg und am Laboratoire de Physique der École Normale Supérieur (ENS) de Lyon entspanden. Ich danke Prof. Jan Louis für die Vergabe des interessanten Themas und die engagierte Betreuung während meines Aufenthalts in Hamburg. Prof. Henning Samtleben danke ich für die engagierte Betreuung während meines Aufenthalts an der École Normale Supérieure und die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit. Ausserdem danke ich Arnaud LeDiffon und Thomas Dankaert für die interessanten Gespräche und die freundliche Atmosphäre, die sie durch ihre Anwesenheit an beiden Instituten geschaffen haben.

Erklärung gemäss Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Ich gestatte den Verleih der Diplomarbeit durch die Bibliothek des Fachbereichs.

Hamburg, den 01. Dezember 2008 Kenan Mujkic