Analyse supersymmetrischer Minima in stringtheoretisch motivierten Potentialen der Supergravitation

Diplomarbeit am
II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg

Vorgelegt von
Christian Blohm

November 2005

Gutachter der Diplomarbeit: Prof. Dr. Jan Louis

Zweitgutachter: Jun.-Prof. Dr. Henning Samtleben

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

And so I raise my glass to symmetry / To the second hand and its accuracy
. . . And if it seems like an accident / A collage of senselessness
You weren't looking hard enough / I wasn't looking hard enough.

– Connor Oberst[1]

Die Physik hat im Laufe ihrer Geschichte immer bessere Antworten auf die Frage nach den fundamentalen Strukturen und Gesetzen unseres Universums geben können. Die gegenwärtig besten Antworten liefern die Allgemeine Relativitätstheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik in Verbindung mit der Quantenfeldtheorie. Es ist jedoch klar, dass beide noch keine endgültigen Theorien sein können. Der offensichtlichste Hinweis darauf besteht in der Beobachtung, dass sich beide nicht vereinheitlichen lassen, da bisher Quantentheorie nur auf flachen Raumzeiten funktioniert und sich die Gravitation nicht konsistent quantisieren lässt. Darüber hinaus gibt es bereits innerhalb des Standardmodells Sachverhalte, die auf die mögliche Existenz einer grundlegenderen Theorie hindeuten.

Auf der Suche nach Kandidaten für eine solche Theorie hilft das Konzept der Symmetrie in seiner allgemeinen Bedeutung von Invarianz eines Systems unter Transformationen. Eine spezielle Form von Symmetrie, die Supersymmetrie [1], ist in der einen oder anderen Form Bestandteil vieler vereinheitlichender Theorien, so auch der Superstringtheorie, die gegenwärtig wohl der vielversprechendste Aspirant auf eine erfolgreiche Quantentheorie der Gravitation ist.

Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Dieser Ansatz ist aus konzeptionellen Gründen attraktiv, da durch ihn Materie (aufgebaut aus Fermionen, die dem Pauli-Prinzip unterliegen) und Wechselwirkungen (übermittelt durch Bosonen, die sich beliebig überlagern lassen) einheitlich beschrieben werden.

Darüber hinaus birgt die Supersymmetrie folgende Eigenschaften [2], die man als vorteilhaft ansehen kann:

- die Eichkopplungen der Wechselwirkungen lassen sich vereinigen;
- das leichteste supersymmetrische Teilchen in Theorien mit R-Invarianz ist ein natürlicher Kandidat für dunkle Materie, da es in kein Teilchen des Standardmodells zerfallen kann;
- die Skala der schwachen Wechselwirkung wäre natürlich, also stabil gegen störungstheoretische Korrekturen;
- supersymmetrische Theorien verhalten sich bei der Renormierung deutlich gutmütiger als andere;

[1] Bright Eyes, *I believe in symmetry*, 2005

- aus lokaler Supersymmetrie ergibt sich lokale Poincaré-Symmetrie, also die Grundlage für Gravitation, weswegen man lokale Supersymmetrie auch Supergravitation nennt.

Darüber hinaus gibt es bisher keine empirischen Daten, die einen Hinweis gegen Supersymmetrie geben. In diesem Zusammenhang sollte jedoch betont werden, dass Supersymmetrie, so sie denn in der Natur realisiert ist, gebrochen sein muss. Andernfalls hätten Teilchen und ihre vorhergesagten supersymmetrischen Partner unweigerlich jeweils die gleiche Masse - wenn dies so wäre, hätten die Partnerteilchen längst gefunden sein müssen, was nicht der Fall ist.

Zudem ist Supergravitation ein Werkzeug, um phänomenologische Aspekte der Stringtheorie zu untersuchen, da vierdimensionale $N = 1$ Supergravitation einen Niedrigenergielimes geeignet kompaktifizierter Stringtheorien darstellt.

Einer dieser Aspekte ist die Moduli-Stabilisierung. Moduli sind Skalarfelder, die beispielsweise durch Kompaktifizierungen der Extradimensionen der Stringtheorie auftreten. Es besteht die Hoffnung, dass man durch ein geeignetes Potential die Moduli bei einem Wert stabilisieren kann, der dafür sorgt, dass Supersymmetrie gebrochen wird und dass die kosmologische Konstante einen kleinen positiven Wert erhält, wie ihn astronomische Beobachtungen der letzten Jahre nahelegen [3].

Die anscheinend exponentiell hohe Zahl möglicher Vakuumzustände führte zur Entwicklung des Konzeptes der Landschaft („landscape“) der Stringtheorie, in der jedes Tal einem Minimum des Potentials und damit einem Vakuumzustand des Universums entspricht. Leider fehlt ein überzeugender a priori Hinweis, welches Vakuum in der Natur realisiert ist. Es gibt Versuche, diese Landschaft statistisch zu untersuchen (beispielsweise in [4]), um daraus etwa den Wert der kosmologischen Konstanten herleiten zu können. Manche (beispielsweise [5]) verbinden die Landschaft mit dem anthropischen Prinzip, um zu erklären, warum wir uns in einem Universum befinden, dessen Parameter Leben zulassen.

Hauptgegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der stabilen stationären Punkte des Potentials in verschiedenen Modellen. Wir beschränken uns dabei auf solche stationären Punkte, bei denen die Supersymmetrie ungebrochen ist, kurz supersymmetrische stationäre Punkte.

Dabei beginnen wir in Kapitel 2 mit der Besprechung der Grundlagen globaler und lokaler Supersymmetrie und ihrer Brechung. Wir orientieren uns hier an den Darstellungen in [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. In diesem Zusammenhang gehen wir kurz auf das Problem der kosmologischen Konstanten ein [17].

In Kapitel 3 untersuchen wir verschiedene Formen des Skalarpotentials der Supergravitation, wie sie aus der Stringtheorie motiviert sind, um die Moduli zu stabilisieren. Wir rechnen die Ansätze aus [18, 19, 20] nach, vertiefen einige der dortigen Betrachtungen, untersuchen insbesondere die Rolle der Breitenlohner-Freedman-Schranke in diesem Zusammenhang und wenden die Ergebnisse von [19] auf [18] kombiniert mit [20] an.

In Kapitel 4 wenden wir diese Vorgehensweisen an, um Minima des Potentials zu untersuchen, das sich durch den F-Term aus [21, 22] ergibt.

Wir schließen in Kapitel 5 mit einer Zusammenfassung unserer Ergebnisse und geben einen Ausblick, wie diese Arbeit fortgesetzt werden könnte.

In Anhang A fassen wir unsere Konventionen zusammen und erklären die verwendete Notation. Einige benötigte Sachverhalte der Kählergeometrie geben wir in Anhang B wieder. In Anhang C untersuchen wir in allgemeiner Form die supersymmetrischen Minima des Skalarpotentials aus der Supergravitation. Wir zeigen, dass unter der Annahme einer verschwindenden kosmologischen Konstanten und Vernachlässigung des D-Terms supersymmetrische stationäre Punkte des Potentials stets Minima sind. Einem Aspekt der Frage der Erreichbarkeit einer positiven kosmologischen Konstanten widmet sich kurz Anhang D.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Globale Supersymmetrie

2.1.1 Die Supersymmetrie-Algebra

Nach der Arbeit [23] von Coleman und Mandula schien es zunächst unmöglich, eine den Prinzipien lokaler relativistischer Quantenfeldtheorie genügende Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen zu finden. Sie untersuchten die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der möglichen Symmetrien der S-Matrix unter den Annahmen, dass es eine Energielücke zwischen dem Vakuum und den Einteilchenzuständen gibt und dass es nur eine endliche Anzahl verschiedener Teilchen gibt, die Einteilchenzuständen gegebener Masse zugeordnet sind. Die Raumzeit-Symmetrien werden in $\mathfrak{g}$ durch die Generatoren der Poincaré-Gruppe verkörpert. Darüber hinaus gibt es noch eine endliche Anzahl lorentzinvarianter Generatoren einer kompakten Lie-Gruppe, welche die internen Symmetrien beschreibt. Wie Coleman und Mandula zeigten, ist damit die allgemeinste Lie-Algebra der Symmetrien schon ausgeschöpft. Die irreduziblen Multipletts, welche den Darstellungsraum der Operatoren der Symmetriegruppe aufspannen, müssten somit stets gleiche Masse und gleichen Spin aufweisen.

Haag, Lopuszanski und Sohnius [24] gelang es jedoch, dieses No-Go-Theorem zu umgehen. Coleman und Mandula hatten durch die Einschränkung auf Lie-Algebren nur bosonische Symmetrien betrachtet. Bezieht man auch fermionische Symmetrie-Generatoren ein, lassen sich als einzige weitere Klasse von Symmetrien die sogenannten Supersymmetrien finden. Die entsprechende mathematische Struktur ist eine graduierte Lie-Algebra bzw. eine Superalgebra, deren Struktur nicht nur durch Relationen der Kommutatoren (für die bosonischen Symmetrien),

$$[A, B] = AB - BA,$$

sondern auch durch Relationen der Antikommutatoren (für die fermionischen Symmetrien),

$$\{A, B\} = AB + BA,$$

bestimmt wird.

Diese Supersymmetrien sind Raumzeit-Symmetrien und erweitern die Poincaré-Algebra zu einer Superalgebra. Wir beschränken uns hier auf die einfachste Supersymmetrie, nämlich $N = 1$-Supersymmetrie. In dieser gibt es in vier Raumzeit-Dimensionen nur einen einzelnen vierkomponentigen Majorana-Spinor der Lorentzgruppe, der als Supersymmetrieoperator fungiert und Bosonen in Fermionen umwandelt und umgekehrt. Dieser setzt sich zusammen aus den Weyl-Spinoren Q und $\bar{Q}$.

Die um den Generator der Supersymmetrie erweiterte Poincaré-Algebra heißt Supersymmetrie-Algebra. Sie lautet, wenn man die Spinorkomponenten von Q mit Q_α ($\alpha = 1, 2$), die Tensorkomponenten der Generatoren der Lorentzgruppe mit M_{mn} und die des Impulsoperators mit

P_m $(m, n = 0, \dots, 3)$ bezeichnet, wie folgt:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} &= 2\sigma^m_{\alpha\dot\beta} P_m, & [Q_\alpha, M^{mn}] &= \frac{1}{2}\sigma^{mn\beta}_{\alpha} Q_\beta, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0, & & \\ [P_m, Q_\alpha] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot\alpha}] = [P_m, P_n] = 0, & [\bar{Q}_{\dot\alpha}, M^{mn}] &= \frac{1}{2}\bar\sigma^{mn\dot\beta}_{\dot\alpha} \bar{Q}_{\dot\beta}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hieraus lässt sich sogleich ablesen, dass Q Massendimension $\frac{1}{2}$ haben muss. Wir folgen den Konventionen aus [6], die im Anhang A dargelegt sind.

Die irreduziblen Multipletts der Supersymmetrie-Algebra, die Supermultipletts, bestehen aus Quantenfeldern, die durch die Supersymmetrie-Transformationen ineinander überführt werden. Diese Felder können nun unterschiedliche Spins aufweisen, haben allerdings noch immer gleiche Masse, denn der Operator des Massenquadrates,

$$P^2 = P^m P_m, \tag{2.2}$$

ist ein Casimir-Operator der Supersymmetrie-Algebra (2.1.1), vertauscht also mit allen Generatoren der Algebra und ist somit invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Weiter lässt sich zeigen, dass

$$n_B = n_F. \tag{2.3}$$

Die Zahl der bosonischen Freiheitsgrade n_B in einem Supermultiplett ist gleich der Zahl der fermionischen Freiheitsgerade n_F.

Für die Modellierung des Standardmodells in vierdimensionaler globaler $N = 1$-Supersymmetrie benötigt man das chirale Multiplett und das Vektor-Multiplett. In der Supergravitation tritt zusätzlich das minimale Supergravitations-Multiplett (auch Graviton-Multiplett genannt) hinzu. Aus diesen Supermultipletts lassen sich im Weiteren invariante Wirkungen konstruieren.

2.1.2 Das chirale Multiplett

Um die Supermultipletts als Darstellung der Supersymmetrie-Algebra zu konstruieren, führt man antikommutierende Spinor-Parameter ξ^α und $\bar\xi_{\dot\alpha}$ in Form von Grassmann-Zahlen ein. Diese antikommutieren mit allem, was fermionisch ist (also mit sich selbst und den Qs), und kommutieren mit allem, was bosonisch ist (also etwa den Generatoren der Poincaré-Algebra oder mit gewöhnlichen c-Zahlen).

So lässt sich der Generator der infinitesimalen Supersymmetrie-Transformationen

$$\delta_\xi = \xi Q + \bar\xi \bar Q \tag{2.4}$$

einführen (man beachte die Summationskonvention, siehe Anhang A).

Nimmt man ein komplexes Skalarfeld ϕ mit Massendimension 1 als Ausgangspunkt, von dem aus man den Rest der Darstellung konstruieren kann, dann muss sich dieses unter der Supersymmetrie-Transformation in ein Spinorfeld χ mit Massendimension $\frac{3}{2}$ transformieren (da Q Spin $\frac{1}{2}$ besitzt):

$$\delta_\xi \phi = \sqrt{2}\xi\chi. \tag{2.5a}$$

χ wiederum sollte sich in ein komplexes Pseudoskalarfeld F mit Massendimension 2 und wegen des Viererimpulses in der Supersymmetrie-Algebra in eine Raumzeit-Ableitung von ϕ transformieren:

$$\delta_\xi \chi = i\sqrt{2}\sigma^m \bar\xi \partial_m \phi + \sqrt{2}\xi F. \tag{2.5b}$$

Die Koeffizienten sind so gewählt, dass der Kommutator $[\delta_\xi, \delta_\eta]$, angewandt auf ϕ, die Supersymmetrie-Algebra erfüllt. Durch die Wirkung des gleichen Operators auf F lässt sich schließlich die Variation von F bestimmen; es ergibt sich lediglich eine Raumzeit-Ableitung:

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar\xi \bar\sigma^m \partial_m \chi. \tag{2.5c}$$

F ist ein Hilfsfeld. Hilfsfelder werden in supersymmetrischen Feldtheorien gebraucht, um zu gewährleisten, dass die „Boson-Fermion-Regel“ (2.3) sowohl in der bisher betrachteten Darstellung außerhalb der Massenschale, als auch in der Darstellung auf der Massenschale stimmt. Die Zahl der Freiheitsgrade beispielsweise von Spinorfeldern ändert sich beim Übergang auf die Massenschale, das heißt, nachdem die Feldgleichungen erfüllt wurden. Dies wird dadurch kompensiert, dass die Hilfsfelder beim Übergang auf die Massenschale eliminiert werden können, denn ihre Feldgleichungen ergeben rein algebraische Gleichungen für die anderen Felder.

Damit ist das chirale Supermultiplett Φ komplett und kann herangezogen werden, um invariante Wirkungen zu konstruieren. Das chirale Supermultiplett repräsentiert dabei die Materie des Standardmodells mit deren Superpartnern. Es transformiert in einer beliebigen Darstellung der Eichgruppe.

2.1.3 Das Vektor-Multiplett

Weiter lässt sich das Vektor-Multiplett V konstruieren. Es besteht aus Lie-Algebra-wertigen Feldern, im Einzelnen aus einem Spin-1-Eichfeld v_m mit Massendimension 1, einem Spinor λ (und seinem konjugierten $\bar{\lambda}$) mit Massendimension $\frac{3}{2}$ und einem reellen Skalarfeld D mit Massendimension 2. Diese höchste Komponente D spielt wieder die Rolle eines Hilfsfeldes. Die infinitesimalen Supersymmetrie-Transformationen ergeben sich zu ([14])

$$\delta_\xi v_m = -i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^m\xi + i\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\lambda, \tag{2.6a}$$
$$\delta_\xi \lambda = i\xi D - \xi\sigma^{mn}v_{mn}, \tag{2.6b}$$
$$\delta_\xi D = -\xi\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\lambda, \tag{2.6c}$$

wobei

$$v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m \tag{2.7}$$

die Rolle eines antisymmetrischen Feldstärketensors spielt.

Das Vektor-Multiplett kann nun herangezogen werden, um die Wirkungen, die mit dem chiralen Multiplett konstruiert werden können, invariant unter Eichtransformationen zu machen, indem man Terme zur Lagrangedichte addiert, die die nichtinvarianten Teile kompensieren. Das Vektor-Multiplett repräsentiert also die Wechselwirkungen. Es transformiert in der adjungierten Darstellung und kann die Materiefelder des Standardmodells nicht beinhalten.

2.1.4 Renormierbare supersymmetrische Wirkungen

Möchte man supersymmetrische Feldtheorien formulieren, stellt sich die Aufgabe, Lagrangedichten $\mathcal{L}$ zu konstruieren, deren Wirkungsfunktional

$$S = \int \mathrm{d}^4x\mathcal{L} \tag{2.8}$$

invariant unter Supersymmetrie-Transformationen, eichinvariant und lorentzinvariant ist. Für letztere Bedingung existiert ein altbewährter geometrischer Formalismus. Ein Versuch, einen ähnlichen Formalismus für die erste Bedingung zu finden, führte zur Einführung des Superraums [15], mathematisch gesehen ein Objekt der nichtkommutativen Geometrie. Dabei wird der Minkowski-Raum um antikommutierende Koordinaten zu einer Supermannigfaltigkeit erweitert. Der Superraum-Formalismus zur systematischen Konstruktion supersymmetrischer Wirkungen ist in vier Dimensionen elegant und effizient, lässt sich allerdings nur schwer auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Es stellt sich daher die Frage, wie fundamental dieses Konzept tatsächlich ist. Aus diesem Grunde und, um diese Darstellung knapper zu halten, verzichten wir hier auf die Einführung des Superraums. Für die späteren Betrachtungen wird er auch keine Rolle mehr spielen.

Stattdessen sei hier die Wirkung weitgehend ohne Herleitung angegeben. Von der Invarianz kann man sich durch einfaches Einsetzen überzeugen. Dabei ist zu beachten, dass Summanden der Lagrangedichte, die nur aus einer Raumzeit-Ableitung bestehen, keinen Beitrag zur Wirkung liefern, da ihr Raumzeit-Integral verschwindet, sofern die Felder im Unendlichen hinreichend schnell verschwinden.

Die Lagrangedichte für das chirale Multiplett lässt sich aufspalten in einen kinetischen und einen potentiellen Summanden, wobei letzterer sich aus einem Massenterm mit einem Massenparameter m und einem Wechselwirkungsterm mit einer Yukawa-Kopplung y zusammensetzt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{pot}} \tag{2.9}$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{pot}} = \mathcal{L}_{\text{m}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \tag{2.10}$$

Im Einzelnen sehen die Bestandteile folgendermaßen aus [11]:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\left(\partial_m\bar{\phi}\right)\left(\partial^m\phi\right) - \frac{i}{2}\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi + \chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right) + \bar{F}F, \tag{2.11a}$$

$$\mathcal{L}_{\text{m}} = -\frac{m}{2}(\chi\chi + \bar{\chi}\bar{\chi}) + m(\phi F + \bar{\phi}\bar{F}), \tag{2.11b}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -y(\phi\chi\chi + \bar{\phi}\bar{\chi}\bar{\chi}) + y(\phi^2 F + \bar{\phi}^2\bar{F}). \tag{2.11c}$$

Das Hilfsfeld F lässt sich mittels der Euler-Lagrange-Gleichung eliminieren,

$$F = m\bar{\phi} + y\bar{\phi}^2. \tag{2.12}$$

Nun kann man dann die Lagrangedichte auf der Massenschale ausrechnen. Außerdem lässt sich so das skalare Potential V, der einzige Summand in Gl. (2.9), in dem ausschließlich das Hilfsfeld F vorkommt, in Termen der Skalarfelder ausdrücken:

$$V = \left.\bar{F}F\right|_{F=m\bar{\phi}+y\bar{\phi}^2}. \tag{2.13}$$

Dieses Potential ist nie negativ, Punkte, an denen F verschwindet, sind absolute Minima des Potentials.

Die Lagrangedichte für N_f chirale Multipletts lautet

$$\mathcal{L}_{\text{chir}} = -i\delta_{i\bar{\jmath}}\bar{\chi}^{\bar{\jmath}}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi^i - \delta_{i\bar{\jmath}}\partial_m\phi^i\partial^m\bar{\phi}^{\bar{\jmath}} + \delta_{i\bar{\jmath}}F^i\bar{F}^{\bar{\jmath}} + F^iW_i + \bar{F}^{\bar{\imath}}\bar{W}_{\bar{\imath}} - \frac{1}{2}W_{ij}\chi^i\chi^j - \frac{1}{2}\bar{W}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}\bar{\chi}^{\bar{\imath}}\bar{\chi}^{\bar{\jmath}}. \tag{2.14}$$

Dabei ist W das holomorphe Superpotential

$$W = \frac{1}{2}m_{ij}\phi^i\phi^j + \frac{1}{3}y_{ijk}\phi^i\phi^j\phi^k, \tag{2.15}$$

wobei die Massenmatrix m_{ij} und die Yukawa-Kopplungen y_{ijk} eichinvariante Tensoren sind. Die unteren Indizes beim W bezeichnen partielle Ableitungen,

$$W_i \equiv \frac{\partial W}{\partial\phi^i}, \qquad W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial\phi^i\partial\phi^j}. \tag{2.16}$$

Mit der Einführung des Superpotentials lässt sich die Lagrangedichte zum einen kompakter schreiben, zum anderen kann man sie damit auch verallgemeinern, denn W ist durch Supersymmetrie nicht eingeschränkt und könnte eine allgemeinere Funktion der Skalarfelder ϕ^i sein, solange Holomorphie gewährleistet ist. Renormierbarkeit hingegen verlangt ein Superpotential der obigen Form.

Koppelt man die Lagrangedichte (2.14) für chirale Multipletts an eine Eichgruppe, beispielsweise $G = SU(N_c)$, benötigt man das Vektormultiplett. Die Lagrangedichte erweitert sich dadurch um einige Terme: zum einen um einen Ausdruck für eine eichinvariante, renormierbare und supersymmetrische Lagrangedichte für das Vektor-Multiplett selbst,

$$\mathcal{L}_{\text{vek}} = -\frac{1}{4} v^a_{mn} v^{mn\,a} - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^m D_m \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \qquad a = 1, \ldots, N_c^2 - 1, \tag{2.17}$$

zum anderen um Summanden, die dadurch hinzutreten, dass alle ∂_m durch kovariante Ableitungen D_m ersetzt werden:

$$D_m \phi^i = \partial_m \phi^i + igv^a_m T^a_{ij} \phi^j, \tag{2.18a}$$
$$D_m \chi^i = \partial_m \chi^i + igv^a_m T^a_{ij} \chi^j, \tag{2.18b}$$
$$D_m \lambda^a = \partial_m \lambda^a - gf^{abc} v^b_m \lambda^c. \tag{2.18c}$$

T^a sind die Generatoren der Eichgruppe, f^{abc} sind die Strukturkonstanten[1] der Lie-Algebra und g ist die Eichkopplung. Zuletzt treten gemischte Terme zwischen den Komponenten des Vektormultipletts und den Komponenten des chiralen Multipletts auf:

$$\mathcal{L}_{\text{gemischt}} = i\sqrt{2}g \left(\bar{\phi}^i T^a_{ij} \chi^j \lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a_{ij} \phi^i \chi^j \right) + gD^a \bar{\phi}^i T^a_{ij} \phi^j. \tag{2.19}$$

Aus der Gesamtlagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{chir}}|_{\partial_m \to D_m} + \mathcal{L}_{\text{vek}} + \mathcal{L}_{\text{gemischt}} \tag{2.20}$$

lässt sich D^a wie F^i mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen eliminieren:

$$\begin{aligned} F^i &= -\bar{W}_i, \\ D^a &= -g\bar{\phi}^i T^a_{ij} \phi^j. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Es ist möglich, für jeden $U(1)$-Faktor in der Eichgruppe (für andere Faktoren wäre der Term nicht eichinvariant) noch einen unbestimmten Term $r^a D^a$ zur Lagrangedichte zu addieren, der effektiv D^a verschiebt, wenn man die Euler-Lagrange-Gleichungen löst:

$$D^a = -g \left(2r^a + \bar{\phi}^i T^a_{ij} \phi^j \right). \tag{2.22}$$

Die r^a werden Fayet-Iliopoulos-Terme genannt und können die Supersymmetrie spontan brechen (siehe Abschnitt 2.3).

In der Lagrangedichte (2.20) können durch Gl. (2.21) F^i und D^a eliminert werden. Es gibt wieder ein skalares Potential

$$V = W_i \bar{W}_i + \frac{1}{2} D^a D^a. \tag{2.23}$$

Auch dieses Potential ist positiv semidefinit.

Die allgemeinste renormierbare Lagrangedichte wird nun bestimmt durch die Eichkopplung g, das holomorphe Superpotential $W(\phi)$ und die Fayet-Iliopoulos-Terme r^a.

[1] gemäß $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$.

2.1.5 Das supersymmetrische nichtlineare Sigma-Modell

Gibt man die Einschränkung der Renormierbarkeit auf, gelangt man zum nichtlinearen Sigma-Modell[2] in supersymmetrischer Fassung, indem man allgemeine holomorphe Superpotentiale zulässt und in der Lagrangedichte (2.14) für N_f chirale Multipletts die Kronecker-Deltas $\delta_{i\bar{\jmath}}$ durch eine allgemeinere Kählermetrik $K_{i\bar{\jmath}}$ ersetzt. Diese hat lokal die Form

$$K_{i\bar{\jmath}} = \frac{\partial^2 K}{\partial\phi^i \bar{\phi}^{\bar{\jmath}}} \tag{2.24}$$

mit einem von den Skalarfeldern abhängigen Kählerpotential $K(\phi^i, \bar{\phi}^{\bar{\jmath}})$. Kählertransformationen, also Verschiebungen

$$K(\phi^i, \bar{\phi}^{\bar{\jmath}}) \to K(\phi^i, \bar{\phi}^{\bar{\jmath}}) + f(\phi^i) + \bar{f}(\bar{\phi}^{\bar{\jmath}}) \tag{2.25}$$

von K um den Realteil einer holomorphen Funktion f, lassen die Kählermetrik invariant. Weitere Details zur Kählergeometrie sind im Anhang B zusammengestellt.

Dann lassen sich die Skalarfelder als Koordinaten eines Zielraums, der Kählermannigfaltigkeit, auffassen. Eine Umdefinition der Skalarfelder entspricht dann einer Koordinatentransformation auf der Kählermannigfaltigkeit.

Beim Übergang zur Kählermetrik erhalten die Fermionen eine natürliche Interpretation als Tensoren des Tangentialraums. Die Ableitungen der Felder χ^i müssen daher durch kovariante Ableitungen

$$\partial_m \chi^i \to D_m \chi^i = \partial_m \chi^i + \Gamma^i_{jk} \partial_m \phi^j \chi^k \tag{2.26}$$

ersetzt werden. Die Γ^i_{jk} sind die Zusammenhangskoeffizienten (siehe Anhang B). Der Zusammenhang und die Metrik treten in der Folge noch an weiteren Stellen auf, so dass die gesamte supersymmetrische Lagrangedichte für chirale Multipletts schließlich folgendermaßen lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & K_{i\bar{\jmath}} F^i \bar{F}^{\bar{\jmath}} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 K_{i\bar{\jmath}}}{\partial\phi^k \partial\bar{\phi}^{\bar{\jmath}}} \chi^i \chi^k \bar{\chi}^{\bar{\jmath}} \bar{\chi}^{\bar{l}} - F^i \left(\frac{1}{2} K_{i\bar{m}} \Gamma^{\bar{m}}_{\bar{\jmath}\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{\jmath}} \bar{\chi}^{\bar{k}} - W_i \right) - \bar{F}^{\bar{\jmath}} \left(\frac{1}{2} K_{m\bar{\jmath}} \Gamma^m_{ik} \chi^i \chi^k - \bar{W}_{\bar{\jmath}} \right) \\ & - K_{i\bar{\jmath}} \partial_m \phi^i \partial^m \bar{\phi}^{\bar{\jmath}} - i K_{i\bar{\jmath}} \bar{\chi}^{\bar{\jmath}} \bar{\sigma}^m D_m \chi^i - \frac{1}{2} W_{ij} \chi^i \chi^j - \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \bar{\chi}^{\bar{\imath}} \bar{\chi}^{\bar{\jmath}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Auch hier ist es möglich, die Hilfsfelder mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen zu eliminieren.

Nimmt man Eichwechselwirkungen beschrieben durch eine Eichgruppe G hinzu, die ein Produkt einfacher Faktoren ist, benötigt man wieder das Vektormultiplett und somit weitere Terme in der Wirkung. Jeder Faktor bringt eine von den ϕ^i abhängige Eichkopplung g_a mit sich, die aufgrund der Forderung nach Supersymmetrie durch den Realteil einer holomorphen Funktion $f_{ab}(\phi)$ bestimmt wird.

In der resultierenden Lagrangedichte findet man nun das Potential

$$V = K^{i\bar{\jmath}} W_i \bar{W}_{\bar{\jmath}} + \frac{1}{2} f_{ab} D^a D^b. \tag{2.28}$$

$K^{i\bar{\jmath}}$ ist die inverse Kählermetrik. Man nennt die D^a auch Killing-Potentiale, da sich aus ihnen die Killing-Vektoren, welche die Isometrien der Kählermannigfaltigkeit erzeugen, durch Differentiation gewinnen lassen:

$$X^{ia} = -i K^{i\bar{\jmath}} \frac{\partial}{\partial\bar{\phi}^{\bar{\jmath}}} D^a. \tag{2.29}$$

Die X^i erfüllen die Killing-Gleichung

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0 \tag{2.30}$$

[2]Das ist eine skalare Feldtheorie, in der der kinetische Term einen feldabhängigen Koeffizienten hat.

mit $\nabla_i X_j = \partial_i X_j - \Gamma^k_{ij} X_k$. Die D^a können so gewählt werden, dass sie in der adjungierten Darstellung transformieren:

$$\left[X^{ia}\frac{\partial}{\partial\phi^i} + \bar{X}^{\bar{\jmath}a}\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}^{\bar{\jmath}}}\right] D^b = -f^{abc} D^c. \tag{2.31}$$

Durch die Gleichungen (2.29) und (2.31) sind die D^a wie in globaler Supersymmetrie durch die Eichgruppe festgelegt, bis auf eine freie Konstante r^a für jeden $U(1)$-Faktor der Eichgruppe:

$$\mathrm{Re}\left[f_{ab}(\phi)\right] D^b = -2r^a - K_i T^a_{ij}\phi^j. \tag{2.32}$$

Die Lagrangedichte ist festgelegt durch diesen Fayet-Iliopoulos-Term r^a, das holomorphe Superpotential $W(\phi)$, das Kähler-Potential $K(\phi, \bar{\phi})$ und beliebige holomorphe Funktionen $f_{ab}(\phi)$.

2.2 Lokale Supersymmetrie

Wenn man die antikommutierenden Parameter aus Gl. (2.4) als ortsabhängig annimmt,

$$\xi = \xi(x), \tag{2.33}$$

sind die bisher betrachteten Wirkungen nicht mehr invariant. Um dies zu sehen, nehme man die Lagrangedichte aus Gl. (2.9), wobei der Einfachheit halber $m = y = 0$ sein soll:

$$\mathcal{L} = \left(\partial_m\bar{\phi}\right)\left(\partial^m\phi\right) + \frac{i}{2}\left(\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi + \chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right) + F\bar{F}. \tag{2.34}$$

Betrachtet man nun das Verhalten dieser Größe unter der Supersymmetrie-Transformation (2.5), stellt man fest, dass die Transformation der $\partial^m\phi$-Terme komplizierter als in globaler Supersymmetrie ist,

$$\delta_\xi\partial^m\phi = \sqrt{2}\xi^\alpha\partial^m\chi_\alpha + \sqrt{2}\left(\partial^m\xi^\alpha\right)\chi_\alpha. \tag{2.35}$$

Es kommt nämlich die Ableitung von $\xi(x)$ hinzu. Um dies zu kompensieren, ist die Einführung eines neuen Eichfeldes $\psi^{m\alpha}$ mit Spin $\frac{3}{2}$ nötig, welches sich inhomogen transformiert. Dieses Feld ist das Gravitino, welches zusammen mit dem Vierbein und Hilfsfeldern das Supergravitations-Multiplett bildet.

Auf diese Weise beinhaltet lokale Supersymmetrie automatisch Gravitation und wird daher auch Supergravitation genannt. Der Superpartner des Gravitinos, das Graviton, wird durch das Vierbein ${e_m}^a$ repräsentiert. Das Vierbein stellt ein lokales Lorentzsystem dar. Dabei gibt es folgenden Zusammenhang des Vierbeins mit der Raumzeit-Metrik g_{mn} (η_{ab} ist die Minkowski-Metrik):

$$g_{mn} = {e_m}^a {e_n}^b \eta_{ab}. \tag{2.36}$$

g_{mn} muss dabei als Metrik der Raumzeit gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie interpretiert werden. Diese Metrik muss die Einsteinsche Feldgleichung

$$R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R + \Lambda g_{mn} = \kappa^2 T_{mn} \tag{2.37}$$

erfüllen. Hier ist R_{mn} der Ricci-Tensor, R der Ricci-Skalar, g_{mn} der metrische Tensor, T_{mn} der Energie-Impuls-Tensor und Λ die kosmologische Konstante, auf die wir in Abschnitt 2.4 detaillierter eingehen. κ ist die Gravitationskopplungskonstante (siehe Anhang A.4). Im Folgenden betrachten wir in der Regel Einheiten, in denen $\kappa = 1$ ist.

Die zugehörige Wirkung ist die bekannte Einstein-Hilbert-Wirkung

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\det g}R. \tag{2.38}$$

Die Lagrangedichte für das Gravitino liefert die Rarita-Schwinger-Feldstärke

$$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} = \frac{1}{2}\sqrt{\det g}\varepsilon^{klmn}\left(\bar{\psi}_k\bar{\sigma}_l D_m\psi_n - \psi_k\sigma_l D_m\bar{\psi}_n\right), \tag{2.39}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_m{\psi_n}^\alpha = \partial_m{\psi_n}^\alpha + {\psi_m}^\beta\omega_{nab}(\sigma^{ab})^\alpha_\beta, \tag{2.40}$$

wobei

$$\begin{aligned}\omega_{nml} = {} & \frac{i}{4}\left(-e_{la}\left(\psi_m\sigma^a\bar{\psi}_n - \psi_n\sigma^a\bar{\psi}_m\right) - e_{ma}\left(\psi_n\sigma^a\bar{\psi}_l - \psi_l\sigma^a\bar{\psi}_n\right) + e_{na}\left(\psi_l\sigma^a\bar{\psi}_m - \psi_m\sigma^a\bar{\psi}_l\right)\right)\\ & + \frac{1}{2}\left(-e_{la}\left(\partial_n{e_m}^a - \partial_m{e_n}^a\right) - e_{ma}\left(\partial_l{e_n}^a - \partial_n{e_l}^a\right) + e_{na}\left(\partial_m{e_l}^a - \partial_l{e_m}^a\right)\right)\end{aligned} \tag{2.41}$$

der Spin-Zusammenhang der Raumzeit ist. Die gesamte Supergravitationslagrangedichte lautet somit

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SG}} = \mathcal{L}_{\mathrm{EH}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}} - \frac{1}{3}\sqrt{\det g}\bar{M}M + \frac{1}{3}\sqrt{\det g}b^a b_a. \tag{2.42}$$

b_m und M sind Hilfsfelder.

Koppelt man diese Supergravitations-Lagrangedichte an die Lagrangedichte in gekrümmten Raumzeiten für Materie in Form chiraler Multipletts und Wechselwirkungen in Form von Vektor-Multipletts, ergibt sich ein Ausdruck für die Wirkung, der sich am besten in Form des oben skizzierten nichtlinearen Sigma-Modells ausdrücken lässt. Dann wird nämlich die Kähler-Weyl-Invarianz, d.h. die Invarianz der Wirkung unter der kombinierten Transformation

$$\begin{aligned}&K \to K(\phi + \bar{\phi}) + f(\phi) + \bar{f}(\bar{\phi}),\\ &W \to We^{-f},\end{aligned} \tag{2.43}$$

wobei $f(\phi)$ eine beliebige holomorphe Funktion ist, deutlich.

Der Ausdruck für die vollständige Lagrangedichte ist in Komponenten länglich, weshalb wir darauf verzichten, ihn hier wiederzugeben und statt dessen auf [6] verweisen. Wir wollen lediglich einen Teil dieser Lagrangedichte hier notieren, nämlich das Skalarpotential

$$V = e^{\kappa^2 K}\left(D_i W K^{i\bar{\jmath}} D_{\bar{\jmath}}\bar{W} - 3\kappa^2 W\bar{W}\right) + \frac{1}{2}f_{ab}D^a D^b \tag{2.44}$$

mit der unter (2.43) kovarianten Ableitung

$$D_i W = W_i + \kappa^2 K_i W. \tag{2.45}$$

Dies ist nun der vollständige allgemeine Ausdruck für das Potential der vierdimensionalen $N = 1$-Supergravitation und unser Ausgangspunkt für den größten Teil dieser Arbeit. Wichtig ist an dieser Stelle die Feststellung, dass das Potential durch den $3W\bar{W}$-Term offensichtlich auch negativ werden kann.

Wir haben in Gleichung (2.44) die Faktoren κ (siehe Anhang A.4) explizit mit angegeben, um zu verdeutlichen, dass sich im Limes $\kappa \to 0$, also beim „Ausschalten“ der Gravitation, das Potential (2.28) der globalen Supersymmetrie ergibt.

Die Supergravitations-Transformationen der physikalischen Felder (die Skalare ϕ^i und die Spinoren χ^i und λ^a bilden die Materie-Felder, die Vektoren ${v_m}^a$ die Eichfelder der Eichgruppe

G, das Feld ψ_m ist das Gravitino und ${e_m}^a$ das Graviton) lauten

$$\delta_\xi {e_m}^a = i\left(\xi\sigma^a\bar{\psi}_m + \bar{\xi}\bar{\sigma}^a\psi_m\right), \tag{2.46a}$$

$$\delta_\xi \phi^i = \sqrt{2}\xi\chi^i, \tag{2.46b}$$

$$\delta_\xi \chi^i = i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\left(\partial_m\phi^i - g{v_m}^a X^{i\,a} - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_m\chi^i\right) - \Gamma^i_{jk}\delta_\xi\phi^j\chi^k$$
$$+\frac{1}{4}\left(K_j\delta_\xi A^j - K_{\bar{\jmath}}\delta_\xi\phi^{\bar{\jmath}}\right)\chi^i - \sqrt{2}e^{K/2}K^{i\bar{\jmath}}D_{\bar{\jmath}}\bar{W}\xi, \tag{2.46c}$$

$$\delta_\xi v_m^a = i\left(\xi\sigma_m\bar{\lambda}^a + \bar{\xi}\bar{\sigma}_m\lambda^a\right), \tag{2.46d}$$

$$\delta_\xi\lambda^a = {F_{mn}}^a\sigma^{ab}\xi - \frac{i}{2}\left(\psi_m\sigma_n\bar{\lambda}^a + \bar{\psi}_m\bar{\sigma}_n\lambda^a - \psi_n\sigma_m\bar{\lambda}^a - \bar{\psi}_n\bar{\sigma}_m\lambda^a\right)\sigma^{ab}\xi$$
$$-\frac{1}{4}\left(K_j\delta_\xi\phi^j - K_{\bar{\jmath}}\delta_\xi\phi^{\bar{\jmath}}\right)\lambda^a - iD^a\xi, \tag{2.46e}$$

$$\delta_\xi\psi_m = ie^{K/2}W\sigma_m\bar{\xi} + 2\left(\partial_m\xi + \xi\omega_m + \frac{1}{4}\left(K_j\left(\partial_m\phi^j - g{v_m}^a X^{ja}\right) - K_{\bar{\jmath}}\left(\partial_m\bar{\phi}^{\bar{\jmath}} - g\bar{v}_m^a\bar{X}^{\bar{\jmath}}\right)\right)\bar{\xi}\right)$$
$$-\frac{i}{2}\sigma_{mn}\xi K_{i\bar{\jmath}}\chi^i\sigma^n\bar{\chi}^{\bar{\jmath}} + \frac{i}{2}(K_{mn} + \sigma_{mn})\xi\lambda^a\sigma^n\bar{\lambda}^a - \frac{1}{4}\left(K_j\delta_\xi\phi^j - K_{\bar{\jmath}}\delta_\xi\phi^{\bar{\jmath}}\right)\psi_m, \tag{2.46f}$$

mit

$${F_{mn}}^a = \partial_m {v_n}^a - \partial_n {v_m}^a - i[{v_m}^a, {v_n}^a]. \tag{2.47}$$

2.3 Brechung der Supersymmetrie

2.3.1 Arten der Symmetriebrechung

Aus der Tatsache, dass die Teilchen eines Multipletts die gleiche Masse haben müssen, in der Natur jedoch kein einziger Superpartner zu einem der bekannten Teilchen gefunden wurde, kann man schließen, dass Supersymmetrie gebrochen sein muss, falls sie Relevanz für die Teilchenphysik haben sollte.

Diese Brechung kann zunächst einmal auf zwei Arten geschehen. Zum einen kann Supersymmetrie explizit gebrochen sein. Supersymmetrie wäre dann nur eine näherungsweise Symmetrie. Die Brechung fände durch zur supersymmetrischen Wirkung zusätzliche Terme in der Lagrangedichte statt, die nicht invariant unter Supersymmetrie-Transformationen wären. Ein Spezialfall hiervon ist die weiche Brechung der Supersymmetrie. In diesem Fall werden keine quadratischen Divergenzen in die Theorie eingeführt. Explizite Symmetriebrechung in der effektiven Theorie kann durch spontane Symmetriebrechung (siehe unten) in einer rein supersymmetrischen Theorie erreicht werden. Letztere bestünde dann aus den beobachtbaren Feldern plus einem versteckten Sektor, der nur durch nichtrenormierbare Kopplungen mit dem beobachtbaren Sektor wechselwirkt. Spontane Symmetriebrechung im versteckten Sektor könnte dann etwa dem Gravitino eine Masse verleihen und die Supersymmetrie im sichtbaren Sektor weich brechen.

Die andere Möglichkeit ist die spontane Brechung der Supersymmetrie. Dabei ist die Wirkung, also die Dynamik der Theorie vollkommen invariant unter Supersymmetrie-Transformationen, der Grundzustand jedoch nicht mehr. Auf der spontanen Symmetriebrechung liege im Folgenden der Schwerpunkt.

2.3.2 Globale Supersymmetriebrechung

Damit die globale Supersymmetrie spontan gebrochen wird, muss (mindestens) eine der Supersymmetrie-Transformationen (2.5) oder (2.6) einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert haben. Aufgrund der wünschenswerten Lorentzinvarianz ist dies nur für Terme möglich, in denen lediglich Skalare vorkommen. Ein endlicher Vakuumerwartungswert für Spinoren oder Vektoren würde die Lorentzsymmetrie brechen.

Unter diesen Voraussetzungen können sich nur χ oder λ inhomogen unter Supersymmetrie-Variationen transformieren,

$$\delta_\xi \chi^i = i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\xi}\partial_m \phi^i - \sqrt{2}\xi W_i,$$
$$\delta_\xi \lambda^a = i\xi D^a + \sigma^{mn}\xi v^a_{mn},$$

und zwar genau dann, wenn

$$\langle W_i \rangle \neq 0 \qquad \text{und/oder} \tag{2.49a}$$
$$\langle D^a \rangle \neq 0. \tag{2.49b}$$

Der Vakuumerwartungswert der Hilfsfelder F^i und D^a spielt somit die Rolle eines Ordnungsparameters. Bei Symmetriebrechung werden χ bzw. λ zu Goldstone-Fermionen.

Konkrete Modelle mit gebrochener Supersymmetrie gehen zurück auf O'Raifeartaigh [25] (für den F-Term) und Fayet und Iliopoulus [26] (für den D-Term).

Zwischen der Symmetriebrechung und dem Potential (2.23)

$$V = W_i \bar{W}_i + \frac{1}{2} D^a D^a$$

besteht ein interessanter Zusammenhang. V ist wie schon bemerkt in globaler Supersymmetrie nie negativ. Positiv wird es genau dann, wenn Gl. (2.49) erfüllt ist, also wenn Supersymmetrie gebrochen ist:

$$\langle V \rangle > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Supersymmetrie spontan gebrochen.} \tag{2.50}$$

2.3.3 Lokale Supersymmetriebrechung

Auch in lokaler Supersymmetrie können unter der Voraussetzung der Lorentzinvarianz nur χ oder λ inhomogen unter Supersymmetrie-Variationen transformieren, wie Gl. (2.46) zeigt:

$$\delta_\xi \chi^i = -\sqrt{2} e^{K/2} K^{i\bar{\jmath}} D_{\bar{\jmath}} \bar{W} \xi + \ldots,$$
$$\delta_\xi \lambda^a = -igD^a \xi + \ldots$$

Damit ist in der Supergravitation Supersymmetrie genau dann spontan gebrochen, wenn

$$\langle D_i W \rangle \neq 0 \quad \text{und/oder} \tag{2.52}$$
$$\langle D^a \rangle \neq 0. \tag{2.53}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen Symmetriebrechung und dem Potential (2.44)

$$V = e^K \left(D_i W K^{i\bar{\jmath}} D_{\bar{\jmath}} \bar{W}_{\bar{\jmath}} - 3W\bar{W} \right) + \frac{1}{2} f_{ab} D^a D^b$$

nicht mehr so direkt wie in globaler Supersymmetrie. Supersymmetrie kann nun auch bei verschwindendem oder gar negativem $\langle V \rangle$ gebrochen sein. Allerdings impliziert ein positiver Vakuumerwartungswert des Potentials Supersymmetriebrechung:

$$\langle V \rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Supersymmetrie spontan gebrochen.} \tag{2.54}$$

Für den Kontakt mit der experimentellen Realität ist es interessant, dass $\langle V \rangle$ eine Interpretation als kosmologische Konstante hat.

2.4 Die Kosmologische Konstante

Die kosmologische Konstante ist eine Freiheit zusätzlich zu den ursprünglichen Einsteinschen Feldgleichungen. Man kann nämlich noch einen in der Metrik linearen Term, die sogenannte kosmologische Konstante Λ, hinzuaddieren:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R + \Lambda g_{mn} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{mn}. \tag{2.55}$$

Um im Grenzfall die bekannte Newtonsche Gravitationstheorie und damit unser beobachtetes Universum zu bekommen, muss die kosmologische Konstante relativ klein sein. Ihre Auswirkungen sind nur kosmologisch beobachtbar, was den Namen erklärt. Eine positive kosmologische Konstante bewirkt, dass bei der Ausdehnung des Raumes Energie frei wird. Λ ist proportional zur Energiedichte ρ des Vakuums,

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho, \tag{2.56}$$

welche wiederum dem Vakuumerwartungswert des Potentials (2.44) entspricht.

Die Empirie wiederum besagt, nachdem man lange davon ausging, dass die kosmologische Konstante null sei, dass das Universum sich nach neueren Erkenntnissen in einem Zustand beschleunigter Expansion zu befinden scheint [3], modellierbar als de Sitter-Raum. Der de Sitter-Raum (dS) ist eine maximal symmetrische Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen [27] mit positiver kosmologischer Konstante. Die entsprechende Lösung mit negativem Wert heißt Anti-de Sitter-Raum (AdS), die Lösung mit verschwindender kosmologischer Konstante ist der bekannte Minkowski-Raum.

Den Wert der kosmologischen Konstanten zu erklären, ob er nun null oder klein und positiv sei, ist schon seit geraumer Zeit eines der größten ungelösten Probleme der Physik (vgl. [17]).

Interessant ist der Zusammenhang zwischen kosmologischer Konstante und Supergravitation. Supersymmetrische Grundzustände mit verschwindendem D-Term implizieren nämlich einen Minkowski- oder AdS-Raum, da das Potential (2.44) mit $D_i W = 0$ folgendermaßen aussieht

$$\langle V \rangle = -3e^K |W|^2 \tag{2.57}$$

und nicht-positiv ist. Ein Modell mit positiver kosmologischer Konstante setzt also zwangsläufig gebrochene Supersymmetrie voraus. Diese Brechung muss explizit stattfinden oder (außer in Fällen mit $\langle W \rangle = 0$) zumindest auch durch den $D_i W$-Term geschehen (siehe Anhang D).

Derzeitige Modelle und Mechanismen der Symmetriebrechung verlangen allerdings ein extremes Maß an Feinabstimmung, um einen zutreffenden Wert der kosmologischen Konstanten zu erreichen. Eine solche Feinabstimmung wird möglicherweise nur in statistischen Modellen mit einer Vielzahl in unterschiedlichen Bereichen der Raumzeit realisierter Vakuumzustände (der sogenannten Landschaft der Stringtheorie) denkbar sein, eventuell unter Ausnutzung des anthropischen Prinzips [5].

Kapitel 3

Moduli-Stabilisierung

3.1 Motivation und Ziel

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit einem Problem, das aus der Stringtheorie [28, 29, 30] motiviert ist. Es lässt sich im Limes niedriger Energien im Rahmen von $N = 1$ Supergravitation in vier Raumzeit-Dimensionen als effektiver Feldtheorie behandeln [31]. Man erhält dort ein Superpotential W und ein Kählerpotential K, aus denen sich gemäß Gl. (2.44) das Skalarpotential V kombiniert. Beide hängen von Skalarfeldern ab, die in der Stringtheorie Moduli genannt werden. Die physikalische Interpretation dieser Moduli interessiert uns in dieser Arbeit nicht, wir wollen sie zur Orientierung des Lesers dennoch mit den Namen einführen, unter denen sie in der Literatur geführt werden: das Dilaton S, der Kählermodulus[1] T und die Moduli z^α der komplexen Struktur. Näheres zu den z^α folgt in Abschnitt 3.6.1.

Wir untersuchen im Folgenden das Potential V abhängig von der genauen Form des Superpotentials W. Unser Ziel ist es, supersymmetrische Minima von V zu finden, an denen sich das System einfinden kann, so dass die Moduli stabilisiert werden.

Da die allgemeine Form von W kompliziert ist, betrachten wir verschiedene Spezialfälle.

3.2 Das Kählerpotential K

Das Kählerpotential für die Moduli lautet [20]

$$K = -\ln\left[-i(S-\bar{S})\right] - 3\ln\left[T+\bar{T}\right] + \hat{K}(z^\alpha, \bar{z}^{\bar{\beta}}). \tag{3.1}$$

Es hat die Gestalt einer Summe von Kählerpotentialen für die verschiedenen Skalarfelder, so dass die Kählermetrik $K_{i\bar{\jmath}}$ (hier nummerieren die Indizes i und $\bar{\jmath}$ die verschiedenen Moduli) Blockdiagonalform hat:

$$K_{i\bar{\jmath}} = \mathrm{diag}\Big(K_{S\bar{S}}, K_{T\bar{T}}, K_{z^a,\bar{z}^{\bar{b}}}\Big)\,. \tag{3.2}$$

Entsprechend ist die inverse Kählermetrik $K^{i\bar{\jmath}}$ ebenso blockdiagonal.

Das Kählerpotential erhält in der Stringtheorie Korrekturen, die jedoch für große S und T zu vernachlässigen sind [29]. Daher nehmen wir bei der Minimierung des Potentials an, dass S und T bei großen positiven Realteilen stabilisiert werden.

Die Form von $\hat{K}$ behandeln wir in Abschnitt 3.6.1.

[1] In der Stringtheorie gibt es im Allgemeinen mehrere Kählermoduli. Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf einen einzelnen.

3.3 Das Superpotential W

Das Superpotential hat allgemein folgende Form:

$$W = \hat{W}(S, z^\alpha) + Ce^{-at}. \tag{3.3}$$

Der Ce^{-aT}-Term mit einer positiven reellen Zahl a ist eine nichtpertubative Korrektur zu $\hat{W}$, wie sie beispielsweise in [32] vorgeschlagen wird.

$\hat{W}$ hat die Gestalt

$$\hat{W}(S, z^\alpha) = A(z^\alpha) - iSB(z^\alpha). \tag{3.4}$$

Näheres zu der Form von $A(z^\alpha)$ und $B(z^\alpha)$ folgt in Abschnitt 3.6.1.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, nämlich $C = 0$ mit konstanten A und B und ohne z^α.

Danach widmen wir uns dem Fall, dass A und B weiter konstant sind, aber C ungleich null ist.

Als drittes betrachten wir A und B in einem Spezialfall als Funktionen der z^α, setzen aber wieder C auf null.

Dann betrachten wir den allgemeinen Fall ohne weitere Einschränkungen an A, B und C.

3.4 $C = 0$, A und B konstant

3.4.1 Das Superpotential

In diesem Fall reduziert sich das Superpotential (3.3) auf

$$W = A - iBS. \tag{3.5}$$

Aus der Form des Potentials (2.44) ist ersichtlich, dass dieses invariant unter Multiplikation von W mit einer komplexen Zahl des Betrages 1 ist. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit B als reell ansehen. Wir werden in Abschnitt 3.4.3 zeigen, dass wir gleichzeitig auch A als reell ansehen können, wenn wir stationäre Punkte betrachten.

3.4.2 Minimierung in T-Richtung

Der Kählermodulus T wird durch das Superpotential (3.5) noch nicht fixiert. Die Bedingung $D_T W = 0$ für ein supersymmetrisches Minimum reduziert sich mit $D_T W = K_T W + W_T$, dem Kählerpotential (3.1) und einem T-unabhängigen Superpotential wie (3.5) auf

$$D_T W = -\frac{3}{T + \bar{T}} W, \tag{3.6}$$

was keine allgemeine Lösung für T besitzt, sofern die rechte Seite mit $W = 0$ nicht trivial verschwindet.

Aufgrund der im Zusammenhang mit Gl. (3.1) erwähnten Diagonalform des Kählerpotentials lässt sich das Potential (2.44) schreiben als

$$V = e^K \left(D_S W K^{S\bar{S}} D_{\bar{S}} \bar{W} + D_T W K^{T\bar{T}} D_{\bar{T}} \bar{W} - 3W\bar{W} \right). \tag{3.7}$$

Mit Gl. (3.6) und

$$K^{T\bar{T}} = \frac{1}{K_{T\bar{T}}} = -\frac{(T + \bar{T})^2}{3} \tag{3.8}$$

heben sich die letzten beiden Terme im Potential (3.7) gegenseitig auf, es ist nun effektiv ein positiv definites No-Scale-Potential [33]:

$$V = e^K (D_S W K^{S\bar{S}} D_{\bar{S}} \bar{W}). \tag{3.9}$$

Das globale Minimum des Potentials liegt somit bei null. Brechung der Supersymmetrie liegt vor, wenn $\langle W \rangle \neq 0$ und damit $\langle D_T W \rangle \neq 0$. Umgekehrt verlangt eine supersymmetrische Lösung

$$\langle W \rangle = 0. \tag{3.10}$$

Es ist somit klar, dass ein supersymmetrischer stationärer Punkt ein Minimum sein muss. Dies beweisen wir in Anhang C.

3.4.3 Minimierung in S-Richtung

Setzt man das Superpotential (3.5) zusammen mit dem Kählerpotential (3.1) in $D_S W = K_S W + W_S$ ein, erhält man

$$D_S W = \frac{-A + iB\bar{S}}{S - \bar{S}}. \tag{3.11}$$

Gelöst wird $D_S W = 0$ durch (da B in Gl. (3.5) reell ist)

$$S_0 = i\frac{\bar{A}}{B}. \tag{3.12}$$

Spalten wir das Dilaton folgendermaßen in Real- und Imaginärteil auf,[2]

$$S = -\sigma + is, \tag{3.13}$$

so ist

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{S_0 - \bar{S}_0}{2i} = \frac{\operatorname{Re} A}{B}, \\ \sigma_0 &= -\frac{S_0 + \bar{S}_0}{2} = -\frac{\operatorname{Im} A}{B}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Schreiben wir das Potential (3.9) in Abhängigkeit von s und σ aus, erhalten wir mit

$$K^{S\bar{S}} = \frac{1}{K_{S\bar{S}}} = -(S - \bar{S})^2 \tag{3.15}$$

folgenden Ausdruck:

$$V = \frac{\operatorname{Re}[A]^2 - 2\operatorname{Re}[A]Bs + 2B^2 s^2 + \operatorname{Im}[A]^2 + 2B\operatorname{Im}[A]\sigma + B^2\sigma^2}{2s}. \tag{3.16}$$

Es ist ersichtlich, dass σ_0 auch die Lösung von $V_\sigma = 0$ ist. Das heißt in anderen Worten, dass der supersymmetrische stationäre Punkt der einzige stationäre Punkt ist. Setzen wir σ_0 in (3.16) ein, ergibt sich

$$V|_{\sigma=\sigma_0} = \frac{(\operatorname{Re}[A] - Bs)^2}{2s}, \tag{3.17}$$

[2] Wir wollen gerne zugeben, dass diese Wahl etwas unkonventionell ist. Sie erklärt sich dadurch, dass so zunächst die Vergleichbarkeit mit den Veröffentlichungen [20, 18] vereinfacht wird (das dortige τ ist durch S zu ersetzen) und später die Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen von [19] erleichtert wird. Wenn in deren Gleichungen S durch $-iS$ ersetzt wird, ergibt sich unsere Konvention.

das Potential wird am stationären Punkt also unabhängig von $\mathrm{Im}[A]$. Es ist daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich und konsistent, neben B auch A reell zu wählen, wenn man gleichzeitig gemäß Gl. (3.14) $\sigma = 0$ betrachtet.

Diese Eigenschaft, dass man die Koeffizienten ohne Beschränkung der Allgemeinheit reell wählen kann, wird uns immer wieder begegnen.

Damit haben wir das Potential, dass sich aus dem Superpotential (3.5) und dem Kählerpotential (3.1) ergibt, in S-Richtung minimiert. Dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, versichert uns Gl. (3.10) zusammen mit der Tatsache, dass das Potential (3.9) offensichtlich positiv semidefinit ist.

Für die Stabilisierung von T benötigen wir einen T-abhängigen Term im Superpotential, sprich: C in (3.3) muss ungleich null sein. Dies ist der nächste Fall, den wir untersuchen.

3.5 $C \neq 0$, A und B konstant

3.5.1 $B = 0$: KKLT-Mechanismus

Für nichtverschwindendes C widmen wir uns zunächst dem einfachsten Fall, dass A konstant,

$$B = 0$$

und T die einzige freie Variable ist. Dies ist effektiv das Superpotential, welches von Kachru, Kallosh, Linde und Trivedi (KKLT, [18]) untersucht wird.

Um zu diesem Superpotential zu gelangen, haben KKLT im Superpotential (3.3) S (und etwaige z^α) ausintegriert. Ausintegrieren bedeutet in diesem Zusammenhang, dass zunächst das Superpotential (3.4) minimiert wird. Die Werte von S und z^α am Minimum werden dann in dieses Superpotential eingesetzt und man betrachtet

$$A = \hat{W}(S = S_0, z^\alpha = z_0^\alpha) \tag{3.18}$$

als konstant. Das Potential hängt nun nur noch von T ab. Inwiefern diese Prozedur konsistent ist, erörtern wir in Abschnitt 3.5.2.

Das erhaltene effektive Superpotential hat also folgende Form:

$$W = A + Ce^{-aT}. \tag{3.19}$$

T spalten wir in Real- und Imaginärteil auf:

$$T = t + i\tau. \tag{3.20}$$

Physikalisch sinnvoll sind nur Lösungen mit positivem t.

KKLT untersuchen nun den supersymmetrischen stationären Punkt $D_T W = 0$. Man kann analog zu Abschnitt 3.4.3 die Betrachtungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit vereinfachen, indem man C als reell annimmt.

Die Bedingung $D_T W = 0$ lautet mit

$$K_T = -\frac{3}{T + \bar{T}} = -\frac{3}{2t} \tag{3.21}$$

(aus dem Kählerpotential (3.1)) und dem Superpotential (3.19)

$$\frac{3A + (3 + 2at_0)Ce^{-ia\tau}e^{-at_0}}{2t_0} = 0. \tag{3.22}$$

Diese Gleichung legt fest, dass τ am supersymmetrischen stationären Punkt die komplexe Phase von C/A kompensiert. Effektiv kann man also A als reell betrachten (C haben wir oben schon reell gewählt) und

$$\tau = \frac{n\pi}{a} \tag{3.23}$$

mit einer ganzen Zahl n wählen. Der Faktor $e^{-ia\tau}$ liefert also nur noch ein Vorzeichen, welches sich so einstellt, dass für die Gleichung (3.22) eine Lösung in t_0 existiert. Dies bedeutet $n = 0$ (modulo 2π) für $A/C < 0$ und $n = \pi$ (modulo 2π) für $A/C > 0$.

Die Lösung lässt sich nicht mit Standardfunktionen angeben. Man kann jedoch vermöge der Lambertschen $\mathcal{W}$-Funktion [34] eine Lösung finden. Diesen Weg wollen wir hier nicht verfolgen. Wir begnügen uns mit der Feststellung, dass eine positive Lösung t_0 existiert.

Setzt man das Superpotential (3.19) und das Kählerpotential (3.1) in das Potential (2.44) ein, ergibt sich

$$V = \frac{aCe^{-at}\left\{3\left(Ae^{ia\tau} + \bar{A}e^{-ia\tau}\right) + 2C(3+at)\right\}}{12t^2}. \tag{3.24}$$

Wertet man dies am supersymmetrischen stationären Punkt aus, indem man Gl. (3.22) nach A auflöst und ebenfalls einsetzt, erhält man

$$V_0 = -\frac{a^2C^2e^{-2at_0}}{6t_0}, \tag{3.25}$$

also einen negativen Wert, da alle Größen reell sind und t positiv ist.

Untersuchen wir die Stabilität dieses stationären Punktes. Dazu bilden wir die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen von Gl. (3.24) nach t und τ, die wir auch gleich wieder am supersymmetrischen stationären Punkt auswerten:

$$\operatorname{Hess} V = \frac{a^2C^2e^{-2at_0}}{6t_0^3}\begin{pmatrix} 3at_0 + 2a^2t_0^2 & 0 \\ 0 & 2 + 5at_0 + 2a^2t_0^2 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Diese Matrix ist positiv definit, da sie Diagonalform und nur positive Einträge hat. Damit liegt ein Minimum vor.

3.5.2 Beliebiges konstantes B: CFNOP-Analyse

Man kann sich nun die Frage stellen, ob der Schritt des KKLT-Mechanismus konsistent ist, in welchem

1. erst das Potential mit $C = 0$ minimiert und als konstant betrachtet wird, wenn man
2. C „einschaltet" (also ungleich null setzt), und in dem man
3. davon ausgeht, dass jetzt nur noch ein effektives Potential in Abhängigkeit von t vorliegt.

Diese Frage haben Choi, Falkowski, Nilles, Olechowski und Pokorski [19, 35] untersucht und gefunden, dass obiges Vorgehen unter bestimmten Umständen zu einem instabilen Sattelpunkt des Potentials führt. In einem ersten Schritt (der zweite folgt in Abschnitt 3.7) haben sie S (nicht aber die z^α) wieder in die Betrachtung hineingenommen, indem sie das Superpotential

$$W = A - iBS + Ce^{-aT} \tag{3.27}$$

mit konstanten A und B als Modell eines Systems ohne Moduli der komplexen Struktur wählten. Diese Superpotential würde man auch erhalten, wenn man die z^α im Superpotential (3.64) naiv ausintegrierte, indem man sie durch S-unabhängige Konstanten ersetzte.

Das Kählerpotential stammt aus Gl. (3.1), wobei $\hat{K}(z^\alpha, \bar{z}^{\bar{\alpha}})$ verschwindet, da es in diesem Modell keine Moduli der komplexen Struktur gibt:

$$K = -3 \ln \left[T + \bar{T}\right] - \ln \left[-i(S - \bar{S})\right] . \tag{3.28}$$

Die Konstanten A, B, C kann man analog zu Abschnitt 3.4.3 und 3.5.1 wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit reell wählen, wenn man weiter den supersymmetrischen stationären Punkt mit

$$\tau = 0 = \sigma \tag{3.29}$$

betrachtet und $B \cdot C$ negativ ist. Dass letzteres nötig ist, zeigen die Gleichungen (3.32). Sie sind für positive s_0, t_0 und a nur unter dieser Bedingung lösbar. Wenn $B \cdot C$ positiv ist, muss $\tau = \frac{\pi}{a}$ sein, was in den folgenden Gleichungen effektiv C durch $-C$ ersetzen würde.

Für die kovarianten Ableitungen ergibt sich mit Gl. (3.27) und Gl. (3.28)

$$\begin{aligned} D_T W &= -\frac{(3 + 2at)Ce^{-aT} + (A - iBS)}{2t}, \\ D_S W &= -iB + \frac{i}{2s}\left(A - iBS + Ce^{-aT}\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Setzt man diese Ausdrücke gleich null und berücksichtigt Gl. (3.29), um supersymmetrische stationäre Punkte zu finden, erhält man

$$0 = 3A + 3Bs_0 + (3 + 2at_0)Ce^{-at_0} \tag{3.31a}$$

$$\text{und} \qquad 0 = A - Bs_0 + Ce^{-at_0}. \tag{3.31b}$$

Diese Gleichungen lassen sich wie Gl. (3.22) nicht analytisch nach t auflösen. Man kann sie aber umformen um handliche Bedingungen zu erhalten, mit denen man weiterrechen kann. Löst man Gl. (3.31b) nach Bs auf und setzt dies in Gl. (3.31a) ein, so findet man

$$\frac{Ce^{-at_0}}{A} = -\frac{3}{at_0 + 3}, \tag{3.32a}$$

eliminiert man dagegen in Gl. (3.31a) den Faktor Ce^{-at} durch Gl. (3.31b), so ergibt sich

$$\frac{Bs_0}{A} = \frac{at_0}{at_0 + 3} \tag{3.32b}$$

als zweite Bedingung.

Die zentrale Frage ist nun, ob diese Lösung stabil ist. Dazu bestimmt man das Potential, das man erhält, wenn man das Kählerpotential (3.28) und das Superpotential (3.27) in die Gleichung (2.44) für V einsetzt:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{48st^3}\Big[&e^{-2at}C^2\Big(3 + 12at + 4a^2t^2\Big) + 3\Big((A - Bs)^2 + B^2\sigma^2\Big) \\ &+ 6Ce^{-at}\Big((A - Bs + 2at(A + Bs))\cos(a\tau) - B(1 + 2at)\sigma\sin(a\tau)\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Wir werten dieses Potential am supersymmetrischen stationären Punkt aus, indem wir zuerst die Gleichung (3.29) einsetzen, dann Gl. (3.32a) nach C auflösen und ebenfalls einsetzen und zuletzt im so erhaltenen Ausdruck mittels Gl. (3.32b) A eliminieren:

$$V_0 = -\frac{3B^2 s_0}{4t_0^2}. \tag{3.34}$$

Dieser Wert ist für nichtverschwindende B und den betrachteten Gültigkeitsbereich für s und t nicht null, wir können also nicht auf die Ergebnisse aus Anhang C zurückgreifen, sondern müssen die zweiten Ableitungen von (3.33) nach s, σ, t und τ betrachten. Sie lauten am supersymmetrischen stationären Punkt

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right|_0 = 3B^2 s \frac{4a^2t_0^2 + 10at_0 + 7}{8t_0^5}, \tag{3.35a}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial s}\right|_0 = 3B^2 \frac{3 + 2at_0}{8t_0^4}, \tag{3.35b}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right|_0 = B^2 \frac{1}{8st_0^3}, \tag{3.35c}$$

und

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}\right|_0 = 3B^2 s \frac{4a^2t_0^2 + 6at_0 + 3}{8t_0^5}, \tag{3.35d}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial \sigma}\right|_0 = 3B^2 \frac{1 + 2a_0 t}{8t_0^4}, \tag{3.35e}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}\right|_0 = B^2 \frac{1}{8st_0^3}. \tag{3.35f}$$

Alle gemischt reell-imaginären Ableitungen wie

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \tau}\right|_0 = 0 \tag{3.35g}$$

verschwinden. Die Hesse-Matrix, die aus den zweiten Ableitungen gebildet wird, hat daher am stationären Punkt Blockdiagonalform:

$$\mathrm{Hess}(V) = \mathrm{diag}\left(V''_M|_0, V''_A|_0\right) \tag{3.36}$$

mit

$$V''_M|_0 = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial t}\right|_0 & \left.\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial s}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t}\right|_0 & \left.\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial s}\right|_0 \end{pmatrix}, \qquad V''_A|_0 = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial \tau}\right|_0 & \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial \sigma}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \tau}\right|_0 & \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \sigma}\right|_0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Damit ein Minimum vorliegt, müssen die Determinanten dieser Matrizen positiv sein. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \det V''_M|_0 &= -\frac{3B^4}{32t_0^8}(4a^2t_0^2 + 13at_0 + 10), \\ \det V''_A|_0 &= -\frac{3B^4}{32t_0^8}(4a^2t_0^2 + 3at_0). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Die Autoren von [19] erhalten dieses Ergebnis mit einem weiteren Faktor s^{-4}. Wir sind der Meinung, dass es sich dort um einen Druckfehler handeln muss. Dies wird von einem der Autoren zumindest nicht ausgeschlossen [36].

Während die Diagonalelemente der Hesse-Matrix positiv sind, sind die Determinanten beide negativ für $at_0 > 0$, die Hesse-Matrix ist also indefinit. Damit handelt es sich bei diesem supersymmetrischen stationären Punkt um einen Sattelpunkt des Potentials. Dies wäre in einem Minkowski- oder de Sitter-Hintergrund eine instabile Lösung. In einem Anti-de Sitter-Hintergrund, wie er gemäß Gl. (3.34) vorliegt, kann auch ein Sattelpunkt oder gar ein Maximum des Potentials eine stabile Lösung darstellen, wie Breitenlohner und Freedman in [37] gezeigt haben. Daher muss man an dieser Stelle die Breitenlohner-Freedman-Schranke (siehe Abschnitt 3.5.3) berücksichtigen, um Aussagen über die Stabilität zu erhalten, was wir in Abschnitt 3.5.3 tun.

Die Autoren von [19] ignorieren diese Frage, ob der gefundene Sattelpunkt nicht doch stabil sein könnte, da sie den erhaltenen AdS-Grundzustand in ihrer Analyse durch Hinzufügung weiterer, Supersymmetrie brechender Terme zum Potential zu einem dS-Grundzustand anheben, der als Sattelpunkt des Potentials sicherlich instabil ist [36]. Diesem Schritt wollen wir hier nicht folgen (zumal er schwer verträglich mit $D_iW = 0$ ist, siehe Anhang D), sondern die Stabilität in einem AdS-Hintergrund untersuchen.

3.5.3 Die Breitenlohner-Freedman-Schranke für CFNOP (1)

Nach [37] kann das Energiefunktional einer Feldtheorie mit AdS-Hintergrund auch für Vakua, die Maxima oder Sattelpunkten des Potentials entsprechen, positiv sein. Dies ist der Fall, wenn die Fluktuationen schnell genug bei räumlicher Unendlichkeit verschwinden. Das Kriterium für Stabilität des Vakuums ist somit eine Bedingung an die Eigenwerte ν_i der „Massenmatrix" V_{ij}. Diese dürfen für einen stabilen Grundzustand negativ sein, aber nicht unterhalb der Breitenlohner-Freedman-Schranke liegen.

Die genaue Bedingung für Stabilität lautet[3]

$$\nu_i \geq \frac{3}{2} V_0 \tag{3.39}$$

für $\langle V \rangle < 0$.

Uns interessiert nun, ob der Sattelpunkt des Potentials, der in Abschnitt 3.5.2 gefunden wurde, eine stabile Lösung darstellt. Wir untersuchen daher, ob und unter welchen Umständen die Ungleichung (3.39) für dieses Modell erfüllbar ist.

Am supersymmetrischen stationären Punkt gilt dort gemäß Gl. (3.34)

$$V_0 = -\frac{3B^2 s_0}{4t_0^3}. \tag{3.40}$$

Im Rest dieses Abschnitts lassen wir den Index „0" weg, um die Lesbarkeit zu erhöhen. Die Eigenwerte der Hesse-Matrix, deren Einträge durch Gl. (3.35) gegeben sind, lauten:

$$\nu_{1\pm} = \frac{B^2}{8t^4}\left(3 + 6at \pm \sqrt{9 + 18at + 12a^2t^2}\right), \tag{3.41a}$$

$$\begin{aligned} \nu_{2\pm} = \frac{B^2}{16st^5}\Big(& t^2 + 3s^2(7 + 10at + 4a^2t^2) \\ & \pm \sqrt{t^4 + 6s^2t^2(47 + 62at + 20a^2t^2) + 9s^4(7 + 10at + 4a^2t^2)^2}\Big). \end{aligned} \tag{3.41b}$$

Dabei sind ν_{1+} und ν_{2+} stets größer als null, da es Summen aus positiven Termen sind. Sie erfüllen die Bedingung (3.39) somit in jedem Fall. Wir müssen also nur noch ν_{1-} und ν_{2-} betrachten. Für ν_{1-} erhält man als Bedingung, wenn man dies mit V_0 aus Gl. (3.40) in Gl. (3.39) einsetzt:

$$0 \leq 3 + 6at + 9st - \sqrt{9 + 18at + 12a^2t^2}. \tag{3.42}$$

Diese Ungleichung ist für positive a, s und t trivial erfüllt.

[3] In der Notation von [37] lautet die Bedingung für Stabilität $\alpha^i \leq \frac{9}{4}$, wenn die Eigenwerte von V_{ij} mit $-a^2\alpha^i$ bezeichnet werden, wobei $a^2 = -\frac{2}{3}V_0$ ist. Daraus folgt für unsere Notation gerade Gl. (3.39).

Analog lautet für ν_{2-} die Bedingung (3.39)

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & t^2 + 3s^2(7 + 10at + 6t^2 + 4a^2t^2) \\ & - \sqrt{t^4 + 9s^4(7 + 10at + 4a^2t^2)^2 + 6s^2t^2(47 + 62at + 20a^2t^2)}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

die wir als

$$0 = X - \sqrt{X^2 - 12s^2t^2Y} \tag{3.44}$$

schreiben können mit

$$\begin{aligned} X &= t^2 + 3s^2(7 + 10at + 6t^2 + 4a^2t^2), \\ Y &= 63s^2 - 20 + (90s^2 - 26)at + \left((3 + 27s^2 + (36s^2 - 8)a^2\right) t^2. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Stabilität herrscht für $Y \geq 0$. Dies wird für positive a und t bereits für $s \geq \sqrt{20/63}$ sicher erreicht.

Zusammenfassend halten wir fest, dass die gefundene Lösung zwar ein Sattelpunkt des Potentials, im AdS-Hintergrund aber dennoch im Rahmen des Bereiches großer s und t stabil ist (für andere Parameter-Bereiche sind die durch die Wahl des Kählerpotentials (3.1) gemachten Näherungen sowieso nicht mehr gültig).

3.6 $C = 0$, A, B abhängig von z^α

3.6.1 Moduli der komplexen Struktur

Sobald Moduli z^α der komplexen Struktur mit einbezogen werden, also A und B in Gl. (3.4) Funktionen von z^α sind, lassen sich Minima des Potentials nur schwer untersuchen, ohne ein konkreteres stringtheoretisches Modell zu spezifizieren (dies wollen wir im folgenden Abschnitt 3.6.2 beispielhaft tun).

Die Form von $\hat{K}$ ergibt sich aus der „speziellen Kähler-Geometrie“ (*special Kähler geometry*, siehe [38]), wie sie in $N = 2$ Supergravitation verlangt wird [39]:

$$\hat{K}(z^\alpha, \bar{z}^{\bar{\beta}}) = -\ln\left[-i\left(z^a\bar{\mathcal{F}}_a - \bar{z}^a\mathcal{F}_a\right)\right], \tag{3.46}$$

wobei $\mathcal{F}$ eine holomorphe und vom Grad 2 homogene Funktion ist, die die Rolle eines Präpotentials spielt. Homogen vom Grad 2 bedeutet

$$\mathcal{F}(\lambda z) = \lambda^2\mathcal{F}(z). \tag{3.47}$$

$\mathcal{F}$ ist modellabhängig. Wie üblich ist $\mathcal{F}_a = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z^a}$.

Man gelangt zur Form von (3.46) auch über den internen Raum $\mathcal{M}$, dessen komplexe Struktur die z^α beschreiben. $\hat{K}$ kann man dann folgendermaßen ausdrücken [40]:

$$\hat{K}(z^\alpha, \bar{z}^{\bar{\beta}}) = -\ln\left[-i\int_{\mathcal{M}}\Omega\wedge\bar{\Omega}\right]. \tag{3.48}$$

Hier ist $\mathcal{M}$ eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit mit drei komplexen Dimensionen und Ω die eindeutige holomorphe 3-Form auf $\mathcal{M}$ (siehe Anhang B.2). Mit ihr lässt sich die komplexe Struktur von $\mathcal{M}$ beschreiben. Daher führt man mit den 3-Zykeln (A^a, B_b) eine kanonische Basis der Homologie für $H_3(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ mit den Schnittpunktzahlen

$$\begin{aligned} A^a \cap B_b &= -B_b \cap A^a = \delta^a_b, \\ A^a \cap A^b &= B_a \cap B_b = 0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

ein sowie eine duale Cohomologie-Basis (α_a, β^b) [40]. Der Index a läuft von 0 bis h_{21} (zu den Hodge-Zahlen h_{rs} siehe Anhang B.3); die physikalischen Felder allerdings sind die z^α mit $\alpha = 1, \dots, h_{21}$. Es gilt somit

$$\alpha_a = [B^a], \qquad \beta^b = [A_b], \tag{3.50}$$

oder in anderen Worten

$$\int_{A^b} \alpha_a = \int_{\mathcal{M}} \alpha_a \wedge \beta^b = \delta_a^b, \qquad \int_{B_a} \beta_b = \int_{\mathcal{M}} \beta^b \wedge \alpha_a = -\delta_a^b. \tag{3.51}$$

Alle anderen Integrale sind null. Mit dieser Hilfe drückt man die z^a als Perioden von Ω aus,

$$\begin{aligned} z^a &\equiv \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \beta^a = \int_{A^a} \Omega, \\ \mathcal{F}_a &\equiv \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \alpha_a = \int_{B_a} \Omega. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Die z^a können nicht alle gleichzeitig verschwinden [40]. Deshalb und weil eine Reskalierung der z^a mit einem nichtverschwindendem Faktor einer Reskalierung von Ω entspricht, kann man die z^a als projektive Koordinaten für die komplexe Struktur auffassen. Man kann daher die Verhältnisse so wählen, dass z^0 von der Größenordnung 1 ist:

$$z^0(z) = O(1). \tag{3.53}$$

Daher kann $z^{0\prime}(z)$ nur kleiner sein.

In der durch obige Perioden gegebenen Basis lässt sich Ω gemäß

$$\Omega = z^a \alpha_a - \mathcal{F}_a(z) \beta^a. \tag{3.54}$$

entwickeln.

Im Rahmen dieses Formalismus motiviert sich nun der Ausdruck für das Superpotential, aus dem Gl. (3.4) folgt. Er wurde erstmals in [41, 42] gefunden und lautet:

$$\hat{W} = \int_{\mathcal{M}} (F_3 - S H_3) \wedge \Omega. \tag{3.55}$$

S ist wieder das Dilaton und Ω die holomorphe $(3,0)$-Form von $\mathcal{M}$. Ω hängt von den z^α ab, aber nicht von S. F_3 und H_3 sind 3-Formen, die sich nach der Basis (3.50) entwickeln lassen [31]:

$$\begin{aligned} F_3 &= m^a \alpha_a - e_a \beta^a, \\ H_3 &= l^a \alpha_a - k_a \beta^a. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Wir unterdrücken hier und im Folgenden einen stringtheoretisch motivierten Faktor $4\pi^2\alpha'$, um die Rechnung übersichtlich zu halten.

Nutzt man aus, dass S unabhängig von $\mathcal{M}$ ist, ergibt sich aus Gl. (3.55)

$$\hat{W} = \int_{\mathcal{M}} F_3 \wedge \Omega - S \int_{\mathcal{M}} H_3 \wedge \Omega. \tag{3.57}$$

Setzt man hier F_3 und H_3 aus Gl. (3.56) sowie Ω aus Gl. (3.54) ein und nutzt man die Relationen (3.51), so findet man

$$\hat{W} = m^a \mathcal{F}_a - e_a z^a - S(k_a z^a - l^a \mathcal{F}_a), \tag{3.58}$$

also tatsächlich die Form (3.4) mit

$$A(z^\alpha) = \int_{\mathcal{M}} F_3 \wedge \Omega = m^a \mathcal{F}_a - e_a z^a, \tag{3.59}$$

$$B(z^\alpha) = -i \int_{\mathcal{M}} H_3 \wedge \Omega = -i \left(k_a z^a - l^a \mathcal{F}_a\right). \tag{3.60}$$

3.6.2 Modell von GKP [20]

Wir wollen nun beispielhaft an einem speziellen Modell mit einem Modulus der komplexen Struktur darlegen, wie die Minimierung des Potentials durchgeführt werden kann. Dieses Modell wurde erstmals von Giddings, Kachru und Polchinski in [20] untersucht.

Die Geometrie des Modells, das diese Autoren betrachten, geht zurück auf [43] und [44]. In ihrem Fall gibt es mit $h_{21} = 1$ genau einen Modulus z (eigentlich z^1, doch wir wollen den Index zugunsten der Lesbarkeit unterdrücken) der komplexen Struktur und als Basis der Homologie folglich gemäß Gl. (B.9) vier 3-Zykel, das Paar (A_1, B^1) und das Paar (A_0, B^0), die jeweils dual zueinander sind. A verschwindet bei [20] für $z \to 0$. Zu jedem 3-Zykel gibt es nach Gl. (3.50) eine duale 3-Form. Nach diesen 3-Formen kann man H_3 und F_3, Gl. (3.56) folgend, entwickeln, wobei im betrachteten Fall alle e_a und alle l^a verschwinden [20]:

$$e_a = 0 = l^a \quad \text{für alle } a. \tag{3.61}$$

Die Formen lauten dann

$$\begin{aligned} F_3 &= m\alpha_1 + m^0\alpha_0, \\ H_3 &= -k\beta^1 - k_0\beta^0. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Wir haben hier im Sinne der Lesbarkeit der Folgenden Gleichungen die Indizes bei m^1 und k_1 unterdrückt.

Gemäß Gl. (3.54) lässt sich auch Ω in dieser Basis ausdrücken:

$$\Omega = z\alpha_1 + z^0\alpha_0 - \mathcal{F}_1(z)\beta^1 - \mathcal{F}_0(z)\beta^0. \tag{3.63}$$

Zuerst wird der Fall $m^0 = 0 = k_0$ betrachtet. Es folgt für das Superpotential (3.58) mit Gl. (3.61)

$$W = m\mathcal{F}_1(z) - kSz. \tag{3.64}$$

Im betrachteten speziellen Fall wollen wir $\mathcal{F}_1$ als durch das Modell gegeben hinnehmen [20, 29]:

$$\mathcal{F}_1(z) = \frac{z}{2\pi i}\ln z + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{hol}(z). \tag{3.65}$$

Dabei steht hol(z) für holomorphe Terme. Holomorphe Funktionen kann man stets als Polynom darstellen. Im Grenzfall kleiner z, der unten betrachtet wird, bleibt hol(z) daher endlich. Es wird aus diesem Grund im Folgenden vernachlässigt werden, wenn es in Konkurrenz zu exponentiell großen Termen auftritt.

Erfüllung von $D_T W = 0$

Man betrachtet den supersymmetrischen stationären Punkt, welcher wie in Abschnitt 3.4.2 festgestellt aufgrund der No-Scale-Eigenschaft des Potentials mit $D_T W \propto W$ verlangt, dass $W = 0$ [31]. Diese Bedingung lautet mit Gl. (3.64)

$$\mathcal{F}_1(z) = \frac{k}{m}Sz. \tag{3.66}$$

Spezifiziert man $\mathcal{F}_1$ wie in Gl. (3.65) und setzt dies hier ein, findet man

$$\ln z = 2\pi i\frac{k}{m}S - i\frac{\mathrm{hol}(z)}{z}. \tag{3.67}$$

Diese Gleichung wird gelöst durch

$$z = e^{2\pi i \frac{k}{m} S} \cdot e^{-i \frac{\mathrm{hol}(z)}{z}}. \tag{3.68}$$

Mit Gl. (3.13) ergibt sich im Grenzfall großer sk und großer sk/m, und unter Vernachlässigung der holomorphen Terme für z am supersymmetrischen Punkt folglich ein exponentiell kleiner Wert

$$z_0 \propto e^{-2\pi \frac{k}{m} s}. \tag{3.69}$$

σ trägt nur noch durch eine komplexe Phase zu z bei, welche man ähnlich wie in Abschnitt 3.4.3 zu null definieren kann. Dann wären sowohl S_0 als auch z_0 reell.

Damit diese Lösung konsistent ist, muss auch $D_z W$ an dieser Stelle verschwinden. Dies wollen wir im folgenden Abschnitt überprüfen.

Überprüfung von $D_z W = 0$

Unter der Voraussetzung, dass in $D_z W = W_z + K_z W$ für kleine z der W_z-Term dominiert, finden wir den supersymmetrischen stationären Punkt bei

$$0 = W_z = m\mathcal{F}_1{}'(z_0) + kS, \tag{3.70}$$

also mit $\mathcal{F}_1$ aus Gl. (3.65) für

$$z_0 \propto e^{2\pi i \frac{k}{m} S} \tag{3.71}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (3.69).

Es stellt sich nun die Frage, ob man den K_z-Term tatsächlich vernachlässigen kann. Dies ist zumindest plausibel, denn für $\mathcal{F}_1$ aus Gl. (3.65) gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \mathcal{F}_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \mathrm{hol}(0), \\ \lim_{z\to 0} \mathcal{F}_1'(z) &= -\infty. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Dies bedeutet, dass W_z aus Gl. (3.70) für kleine z logarithmisch gegen minus unendlich geht, während W aus Gl. (3.64) gegen eine Konstante geht. K_z müsste für kleine z einen großen Beitrag leisten, um das asymptotische Verhalten von $D_z W$ zu beeinflussen.

K ist gegeben durch Gl. (3.46). Leiten wir dies für das betrachtete Modell nach z ab,

$$K_z = -\frac{\bar{\mathcal{F}}_1 - \bar{z}\mathcal{F}_1{}' + z^0{}'(z)\bar{\mathcal{F}}_0 + z^0\bar{\mathcal{F}}_0{}' - \bar{z}^0{}'(z)\mathcal{F}_0 - \bar{z}^0\mathcal{F}_0{}'(z)}{z\bar{\mathcal{F}}_1 - \bar{z}\mathcal{F}_1 + z^0\bar{\mathcal{F}}_0 - \bar{z}^0\mathcal{F}_0}, \tag{3.73}$$

und betrachten den Grenzfall $z \to 0$. In diesem Limes gilt mit $\mathcal{F}_1$ aus Gl. (3.65) neben Gl. (3.72) noch

$$\lim_{z\to 0} z\mathcal{F}_1'(z) = 0. \tag{3.74}$$

Es bleibt somit, wenn wir den Beitrag von hol(0) vernachlässigen:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} K_z &= -\frac{z^0{}'(z)\bar{\mathcal{F}}_0 + z^0\bar{\mathcal{F}}_0{}' - \bar{z}^0{}'(z)\mathcal{F}_0 - \bar{z}^0\mathcal{F}_0{}'(z)}{z^0\bar{\mathcal{F}}_0 - \bar{z}^0\mathcal{F}_0} \\ &= -\frac{\frac{z^0{}'}{z^0} + \frac{\bar{\mathcal{F}}_0'(z)}{\bar{\mathcal{F}}_0}}{1 - \frac{\mathcal{F}_0\bar{z}^0}{\bar{\mathcal{F}}_0 z^0}} - \frac{\frac{\bar{z}^0{}'}{\bar{z}^0} + \frac{\mathcal{F}_0'(z)}{\mathcal{F}_0}}{1 - \frac{\bar{\mathcal{F}}_0 z^0}{\mathcal{F}_0\bar{z}^0}}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Die Nenner sind im Allgemeinen nichtverschwindend. Die Zähler können wir mit der Relation

$$2\mathcal{F}_a = \frac{\partial}{\partial z^a}\left(z^c\mathcal{F}_c\right). \tag{3.76}$$

aus [40] weiter umformen. Aus Gl. (3.76) folgt mit Gl. (3.74) für $z \to 0$ mit Gl. (3.72) nämlich

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z^0\mathcal{F}_0\right) = 0, \tag{3.77}$$

und daraus wiederum

$$\frac{z^{0\prime}}{z^0} = -\frac{\mathcal{F}_0{}'}{\mathcal{F}_0}, \tag{3.78}$$

vorausgesetzt, z^0 und $\mathcal{F}_0$ sind ungleich null. Dies ausnutzend folgt aus Gl. (3.75)

$$\lim_{z\to 0} K_z = -2\,\mathrm{Re}\left[\frac{z^{0\prime}(z)}{z^0}\right] \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{\mathcal{F}_0\bar{z}^0}{\bar{\mathcal{F}}_0 z^0}} + \frac{1}{1-\frac{\bar{\mathcal{F}}_0 z^0}{\mathcal{F}_0\bar{z}^0}}.\right). \tag{3.79}$$

Der Vorfaktor ist gemäß Gl. (3.53) klein. Damit ist zusammen gezeigt, dass K_z für kleine z keinen großen Beitrag liefert.

Erfüllung von $D_S W = 0$

S ist an dieser Stelle noch nicht stabilisiert, da das effektive Superpotential $W^S(S)$, das man erhält, wenn man in $W(S,z)$ für z $z_0(S)$ einsetzt, im vorausgesetzten Limes, $z \to 0$, unabhängig von S und identisch null wird:

$$W^S = \left(\frac{m}{2\pi i}\ln z_0 - \frac{\mathrm{hol}(z_0)}{z_0} - Sk\right) z_0 \to 0. \tag{3.80}$$

Man kann allerdings eine weitere S-Abhängigkeit erreichen, indem man $k_0 \neq 0$ wählt, dann ist nämlich mit Gl. (3.52) und Gl. (3.55) das Superpotential

$$W = m\mathcal{F}_1(z) - S(kz + k_0 z^0). \tag{3.81}$$

Analog zu obigen Ergebnissen ist auch hier die Lösung von

$$0 = D_z W \approx W_z \tag{3.82}$$

für geeignete Parameter exponentiell klein,

$$z_0 \propto e^{2\pi i \frac{k+k_0 z^{0\prime}(z)}{m} S} \sim e^{2\pi i \frac{k}{m} S}, \tag{3.83}$$

und im Falle kleiner $z^{0\prime}(z)$ (dies wollen wir gemäß Gl. (3.53) im Folgenden voraussetzen) identisch der obigen Lösung.

Im Fall $z = z_0$ geht das effektive Superpotential für S damit über in

$$W^S = -k_0 S z^0 (e^{2\pi i \frac{k}{m} S}), \tag{3.84}$$

hat also nun eine echte S-Abhängigkeit.

Das Dilaton wird über $D_S W = 0$ mit

$$D_S W = \frac{m\mathcal{F}_1(z) - S(kz + k_0 z^0)}{S - \bar{S}} + kz + k_0 z^0$$

bei

$$\bar{S}_0 = \frac{m\mathcal{F}_1(z)}{kz + k_0 z^0(z)} \tag{3.85}$$

stabilisiert. Im Grenzfall $z \to 0$ wird dies

$$\bar{S}_0 = \frac{m\mathcal{F}_1(0)}{k_0 z^0(0)} = \frac{m\,\mathrm{hol}(0)}{2\pi k_0 z^0(0)}. \tag{3.86}$$

Da m und k_0 im Modell frei sind, steht für S_0 ein großer möglicher Wertebereich zur Verfügung.

Gl. (3.86) bedeutet mit Gl. (3.69) für den Wert von z

$$z_0 \propto \exp\left[\frac{k}{k_0}\,\mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{hol}(0)}{z^0(0)}\right]\right], \tag{3.87}$$

sofern keine weiteren Beiträge zum Super- oder Kählerpotential auftreten.

3.7 $C \neq 0$, A, B z^α-abhängig

3.7.1 Moduli der komplexen Struktur ausintegriert

Nun widmen wir uns dem Fall, dass C in Gl. (3.3) nicht verschwindet und gleichzeitig A und B Funktionen von z^α sind. Die volle z^α-Abhängigkeit betrachten wir jedoch nicht, sondern folgen der Analyse in [19]. Dabei nehmen wir an, dass die Moduli der komplexen Struktur ausintegriert werden können (ein Kriterium, wann das möglich ist, findet sich in [19]) und ein effektives Superpotential W^S für S erzeugen. Dies geschieht konkret, indem man die Werte $z_0^\alpha(S)$ der Moduli der komplexen Struktur am Minimum in $\hat{W}$ aus Gl. (3.4) einsetzt:

$$W^S(S) = \hat{W}(S, z_0^\alpha(S)). \tag{3.88}$$

Dabei kann man $W^S(S)$ als beliebige Funktion von S betrachten und nötige Forderungen an $W^S(S)$ ermitteln, unter denen der resultierende supersymmetrische Punkt ein Minimum des Potentials ist.

Es ist also das System

$$\begin{aligned} K &= -3\ln\left[T + \bar{T}\right] - \ln\left[-i(S - \bar{S})\right], \\ W &= W^S(S) + Ce^{-aT}. \end{aligned} \tag{3.89}$$

zu minimieren.

Die kovarianten Ableitungen lauten:

$$D_T W = -aCe^{-aT} - \frac{3}{2t}\left(W^S + Ce^{-aT}\right), \tag{3.90a}$$

$$D_S W = W^{S\prime}(S) + \frac{i}{2s}\left(W^S + Ce^{-aT}\right). \tag{3.90b}$$

Das Nullsetzen der Ausdrucks (3.90a) führt direkt auf die Bedingung

$$\frac{Ce^{-at_0}e^{-ia\tau_0}}{W^S} = -\frac{3}{2at_0 + 3}. \tag{3.91a}$$

Diese Bedingung ist für τ_0 erfüllt, wenn es gerade die komplexe Phase von $W^S(S_0)$ kompensiert.

Setzt man Gl. (3.91a) in den Term (3.90b) ein und setzt diesen ebenfalls null, erhält man

$$\frac{is_0 W^{S\prime}}{W^S} = \frac{at_0}{2at_0 + 3}. \tag{3.91b}$$

Diese Bedingungen kann man nutzen, um den Wert V_0 des Potentials am Minimum zu bestimmen:

$$V_0 = -\frac{3s\left|W^{S\prime}(S_0)\right|^2}{4t^3}. \tag{3.92}$$

Erwartungsgemäß ist dies für nichtverschwindende $W^S(S_0)$ wieder ein AdS-Zustand. Ob dieser stabil ist, hängt davon ab, ob er die Breitenlohner-Freedman-Schranke erfüllt.

Zunächst sei untersucht, in welchen Fällen sich ein eindeutiges Minimum des Potentials ergibt. Dazu führen wir zunächst den Parameter

$$\gamma = \frac{is_0 W^{S\prime\prime}}{W^{S\prime}} \tag{3.93}$$

ein, der über das Vorhandensein eines supersymmetrischen Minimums entscheidet, wie sich zeigt, wenn man die zweiten Ableitungen des Potentials mit Hilfe der Bedingungen (3.91) am supersymmetrischen stationären Punkt auswertet. Die gemäß Gl. (3.37) gebildeten Matrizen lauten in diesem Fall:

$$\begin{aligned} V''_M|_0 &= \frac{\left|W^{S\prime}\right|^2}{8s_0t_0^5}\begin{pmatrix} 3s_0^2(4a^2t_0^2+10at_0+7) & 3s_0t_0(2at_0+3-2\operatorname{Re}[\gamma]) \\ 3s_0t_0(2at_0+3-2\operatorname{Re}[\gamma]) & t_0^2(1-2\operatorname{Re}[\gamma]+4\left|\gamma\right|^2) \end{pmatrix} \\ V''_A|_0 &= \frac{\left|W^{S\prime}\right|^2}{8s_0t_0^5}\begin{pmatrix} 3s_0^2(4a^2t_0^2+6at_0+3) & 3s_0t_0(2at_0+1-2\operatorname{Re}[\gamma]) \\ 3s_0t_0(2at_0+1-2\operatorname{Re}[\gamma]) & t_0^2(1+2\operatorname{Re}[\gamma]+4\left|\gamma\right|^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Aus diesen beiden Matrizen setzt sich in Blockdiagonalform die Hesse-Matrix zusammen, sofern W^S am stationären Punkt reell ist (was man stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch Multiplikation von W mit einer geeigneten komplexen Phase arrangieren kann). Falls W^S am supersymmetrischen stationären Punkt, also für $K_S W = -W_S$, reell ist, muss mit unserem Kählerpotential $W^{S\prime}$ imaginär sein. In der Folge wird automatisch γ reell und alle gemischt reell-imaginären Ableitungen wie

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \sigma}\right|_0 = -\frac{3\operatorname{Im}[\gamma]\left|W^{S\prime}\right|^2}{4t^4} \tag{3.95}$$

verschwinden. Den Fall, dass γ reell ist, wollen wir im Folgenden annehmen.

Ob es sich beim stationären Punkt um ein Minimum des Potentials handelt, wird vom Vorzeichen der Determinanten der Matrizen (3.94) bestimmt. Diese lauten

$$\det V''_M|_0 = \frac{3W^{S\prime 4}}{32t^8}\Big(4a^2t_0^2(2\gamma^2-\gamma-1)+at_0(20\gamma^2+2\gamma-13)+8\gamma^2+11\gamma-10\Big) \tag{3.96a}$$

$$\det V''_A|_0 = \frac{3W^{S\prime 4}}{32t^8}\Big(4a^2t_0^2(2\gamma^2+\gamma-1)+3at_0(4\gamma^2+6\gamma-1)+9\gamma\Big). \tag{3.96b}$$

Klar ist, dass sich für $\gamma = 0$ die Situation aus Abschnitt 3.5.2 ergibt, also ein Sattelpunkt.

Durch Nullsetzen von Gl. (3.96a) ergibt sich als Bedingung für Positivität

$$\gamma < -\frac{2+at}{1+2at} \quad \text{oder} \quad \gamma > \frac{5+4at}{8+4at}, \tag{3.97a}$$

und aus Gl. (3.96b) ergibt sich

$$\gamma < -\frac{3+4at}{4at} \quad \text{oder} \quad \gamma > \frac{at}{3+2at}. \tag{3.97b}$$

Da sowohl Bedingung (3.97a) als auch Bedingung (3.97b) gleichzeitig erfüllt sein müssen und sie sich gegenseitig zum Teil implizieren, reduzieren sie sich auf eine Bedingung:

$$\gamma < -\frac{3+4at}{4at} \quad \text{oder} \quad \gamma > \frac{5+4at}{8+4at}. \tag{3.98}$$

$|\gamma|$ muss also sicherlich größer als $\frac{5}{8}$ sein. Im Limes großer at_0 liegt für

$$|\gamma| > 1, \tag{3.99}$$

ein stabiles Minimum vor, andernfalls handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Ob dieser Sattelpunkt stabil sein könnte, hängt vom Kriterium der Breitenlohner-Freedman-Schranke ab.

3.7.2 Die Breitenlohner-Freedman-Schranke für CFNOP (2)

Wir gehen analog zu Abschnitt 3.5.3 vor. Dort haben wir das Kriterium für Stabilität in Gl. (3.39) angegeben. Die Eigenwerte von V''_M aus Gl. (3.94) lauten

$$\begin{aligned}\nu_{1\pm} = \frac{|W^{S\prime}|^2}{16st^5}\Bigg\{&3s^2(7+10at+4a^2t^2)+t^2(1-2\gamma+4\gamma^2)\\ &\pm\Big(9s^4(7+10at+4a^2t^2)^2+t^4(1-2\gamma+4\gamma^2)^2\\ &\quad-6s^2t^2\left(-47+58\gamma+4\gamma^2+4a^2t^2(-5-2\gamma+4\gamma^2)+2at(-31+14\gamma+20\gamma^2)\right)\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.100a}$$

und die von V''_M lauten

$$\begin{aligned}\nu_{2\pm} = \frac{|W^{S\prime}|^2}{16st^5}\Bigg\{&3s^2(3+6at+4a^2t^2)+t^2(1+2\gamma+4\gamma^2)\\ &\pm\Big(9s^4(3+6at+4a^2t^2)^2+t^4(1+2\gamma+4\gamma^2)^2\\ &\quad-6s^2t^2\left(-3+30\gamma-12\gamma^2+4a^2t^2(-5+2\gamma+4\gamma^2)+6at(-3+10\gamma+4\gamma^2)\right)\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.100b}$$

Da wir bereits wissen, dass sich für große γ ein stabiles Minimum des Potentials ergibt, widmen wir uns nun dem Fall, dass γ klein ist. Konkret setzen wir es null. Dann hat $\nu_{i\pm}$ die Form

$$\nu_{i\pm} = X_i \pm \sqrt{X_i^2 - 12s^2t^2Y_i} \tag{3.101}$$

mit

$$X_1 = t^2 + 3s^2(7+10at+6t^2+4a^2t^2), \tag{3.102a}$$
$$X_2 = t^2 + 3s^2(3+6at+6t^2+4a^2t^2) \tag{3.102b}$$
$$\tag{3.102c}$$

und

$$Y_1 = 63s^2 - 20 + (90s^2-26)at + \left(3+27s^2+(36s^2-8)a^2\right)t^2, \tag{3.103a}$$
$$Y_2 = 27s^2 + (54s^2-6)at + \left(3+27s^2+(36s^2-8)a^2\right)t^2. \tag{3.103b}$$

Da für positive a, s und t die X_i positiv sind, ist der Indikator für Stabilität $Y_i \geq 0$. Dies wird wie in Abschnitt 3.5.3 bereits für $s > \sqrt{20/63}$ erreicht, ist also für große s sicher gewährleistet.

Als Fazit ist festzuhalten, dass der gefundene supersymmetrische stationäre Punkt zwar im Allgemeinen nicht zwingend ein Minimum ist, im Bereich großer s aber dennoch stabil ist, sofern der resultierende AdS-Zustand nicht durch weitere Effekte angehoben wird.

3.7.3 Konsequenzen aus CFNOP für KKLT

Wir wenden nun die Kriterien von CFNOP an, um zu überprüfen, ob der KKLT-Mechanismus konsistent ist, wenn man als Modell zur Stabilisierung des Dilatons S und des Modulus z der komplexen Struktur das Modell von GKP [20] heranzieht.

Dort (s. Abschnitt 3.6.2) wird gemäß Gl. (3.71) der Modulus der komplexen Struktur bei einem exponentiell kleinen Wert

$$z_0 = e^{2\pi i \frac{k}{m} S} \tag{3.104}$$

stabilisiert. Setzt man diesen in das Superpotential ein, erhält man als effektives Superpotential für S wie in Gl. (3.84) hergeleitet

$$W^S(S) = -k_0 S z^0 \left(z_0(S) \right). \tag{3.105}$$

Hier genügt $z^0(z)$ Gl. (3.53).

Gemäß Gl. (3.99) lautet nun die Bedingung dafür, dass der sich ergebende supersymmetrische stationäre Punkt ein Minimum ist, wie folgt:

$$|\gamma| = \left| \frac{S W^{S''}}{W^{S'}} \right| > 1. \tag{3.106}$$

Testen wir dies, indem wir $W^S(S)$ einsetzen. Dann ist mit

$$\frac{\partial z_0}{\partial S} = 2\pi i \frac{k}{m} z_0, \tag{3.107}$$

$$\left. \frac{\partial z^0}{\partial S} \right|_{z=z_0} = 2\pi i \frac{k}{m} z_0 z^{0\prime}(z_0) \tag{3.108}$$

die erste Ableitung

$$W^{S'}(S) = -k_0 \left\{ z^0(z_0) + 2\pi i \frac{k}{m} S z^{0\prime}(z_0) z_0(S) \right\} \tag{3.109}$$

und die zweite Ableitung

$$W^{S''}(S) = -2\pi i \frac{k}{m} k_0 \left\{ z_0 z^{0\prime}(z_0) + z^{0\prime}(z_0) z_0 + 2\pi i \frac{k}{m} S z_0 z^{0\prime\prime}(z_0) z_0 + 2\pi i \frac{k}{m} z_0 S z^{0\prime}(z_0) \right\}. \tag{3.110}$$

Für den Quotienten ergibt sich

$$\left| \frac{S W^{S''}}{W^{S'}} \right| = \left| \frac{4\pi i \frac{k}{m} z_0 S \left\{ z^{0\prime}(z_0) + \pi i \frac{k}{m} S \left(z''(z_0) z_0 + z^{0\prime}(z_0) \right) \right\}}{z^0(z_0) + 2\pi i \frac{k}{m} S z^{0\prime}(z_0) z_0} \right|. \tag{3.111}$$

Da sich z_0 im Zähler ausklammern lässt und z^0 im Nenner von der Ordnung eins ist, ist $|\gamma|$ für exponentiell kleine z_0 äußerst klein zu sein, sicherlich kleiner als 1. Damit ist die Bedingung (3.106) *nicht* erfüllt.

Die Analyse von [19] ergibt also, dass der Mechanismus von KKLT in dem Fall, wenn als Modell das Beispiel von GKP [20] herangezogen wird, inkonsistent ist. Das resultierende Vakuum ist ein Sattelpunkt und daher instabil, sofern man nicht die Breitenlohner-Freedman-Schranke heranzieht. Diese könnte im AdS-Hintergrund für Stabilität sorgen, was noch zu untersuchen wäre.

Kapitel 4

Modell mit D-Bran-Moduli

4.1 Ausgangspunkt

In diesem Abschnitt modifizieren wir das Potential, indem wir ein neues Kählerpotential betrachten, in dem S mit weiteren Moduli ζ^A gekoppelt ist,[1]

$$K = \hat{K}(z^\alpha) - \ln\left[-i(S-\bar{S}) + 2L_{AB}\zeta^A\bar{\zeta}^B\right] - 3\ln\left[T+\bar{T}\right]. \tag{4.1}$$

so dass die Kählermetrik auch ohne die Moduli der komplexen Struktur nicht mehr diagonal ist, siehe Gl. (4.5). Die Koeffizienten L_{AB} mit $A, B = 1, \ldots, n_\zeta$ bilden eine für unsere Zwecke beliebige hermitesche Matrix. $\hat{K}$ ist in Gl. (3.46) definiert.

Ein solches Kählerpotential findet sich bei Jockers und Louis [21, 22]. Das zugehörige Superpotential erhält zusätzlich zu Gl. (3.3) einen Term

$$Q_A\zeta^A.$$

Hier sind die Q_A beliebige Konstanten. Das vollständige Superpotential lautet nun

$$W = \hat{W}(S, z^\alpha) + Ce^{-aT} + Q_A\zeta^A, \tag{4.2}$$

wobei $\hat{W}$ in Gleichung (3.4) definiert ist, also von $A(z^\alpha)$ und $B(z^\alpha)$ abhängt.

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf den einfachsten Fall, $n_\zeta = 1$. Damit reduzieren sich L_{AB} und Q_A auf Konstanten,

$$\begin{aligned} L_{AB} &\to L, \\ Q_A &\to Q, \end{aligned} \tag{4.3}$$

und das Kählerpotential lautet

$$K = \hat{K}(z^\alpha) - \ln\left[-i(S-\bar{S}) + 2L\zeta\bar{\zeta}\right] - 3\ln\left[T+\bar{T}\right] \tag{4.4}$$

mit einem reellen, positiven L (da K reell sein muss). Die zugehörige Kählermetrik ist nichtdiagonal in S und ζ:

$$K_{S\bar{S}} = \frac{1}{4(s+L\zeta\bar{\zeta})^2}, \tag{4.5a}$$

$$K_{\zeta\bar{\zeta}} = \frac{-Ls}{(s+L\zeta\bar{\zeta})^2}, \tag{4.5b}$$

$$K_{S\bar{\zeta}} = \overline{K_{\zeta\bar{S}}} = \frac{-iL\zeta}{2(s+L\zeta\bar{\zeta})^2}. \tag{4.5c}$$

[1] An dieser Stelle ist der Hinweis angebracht, dass S ab hier nicht mehr die Interpretation als Dilaton hat. Siehe dazu [21]. Dies mag ein Schwachpunkt in der Verwendung von $\hat{W}(S, z^\alpha)$ in Gl. (4.2) sein. Im Folgenden wollen wir diese Frage ignorieren.

Darüber hinaus verschwinden alle gemischten Ableitungen des Kählerpotentials bis auf etwaige Terme $K_{z^\alpha \bar{z}^{\bar{\beta}}}$.

Das Superpotential lautet

$$W = \hat{W}(S, z^\alpha) + Ce^{-aT} + Q\zeta. \tag{4.6}$$

Wir betrachten im Folgenden wieder verschiedene Fälle, ähnlich wie in Kapitel 3.

4.2 $C = 0$, $\hat{W} = 0$

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, dass es für S und T keine Beiträge zum Superpotential gibt. Moduli z^α der komplexen Struktur seien nicht vorhanden. Das Superpotential ist also das aus Gl. (4.6) mit $C = 0$ und $\hat{W} = 0$. Wir suchen supersymmetrische Minima, interessieren uns also für Lösungen von $D_{\phi^i} W = 0$ (wobei ϕ^i für die vorkommenden Skalarfelder steht).

Die kovarianten Ableitungen lauten mit $W = Q\zeta$ und K aus Gl. (3.1):

$$D_T W = -\frac{3Q\zeta}{T + \bar{T}}, \tag{4.7a}$$

$$D_S W = \frac{iQ\zeta}{2\left(s + L\zeta\bar{\zeta}\right)}, \tag{4.7b}$$

$$D_\zeta W = \frac{Qs}{s + L\zeta\bar{\zeta}}. \tag{4.7c}$$

Diese Ausdrücke können nicht gemeinsam null sein. Damit $D_S W$ null wird, muss $\zeta = 0$ sein. Dies aber bedeutet, dass $D_\zeta W$ nicht gleichzeitig null werden kann, weil sich dann dort s aus dem Zähler herauskürzt.

Es existieren also für diesen Fall keine supersymmetrischen stationären Punkte.

4.3 $C = 0$, A und B konstant

Wir betrachten den Fall, dass es keine Moduli z^α der komplexen Struktur gibt. Damit reduzieren sich $A(z^\alpha)$ und $B(z^\alpha)$ auf Konstanten. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass B reell ist.

Die kovarianten Ableitungen lauten mit

$$W = A - iBS + Q\zeta \tag{4.8}$$

folgendermaßen:

$$D_T W = -\frac{3W}{T + \bar{T}}, \tag{4.9a}$$

$$D_S W = -\frac{A - B\left((s - i\sigma + 2L\zeta\bar{\zeta}\right) + Q\zeta}{2i\left(s + L\zeta\bar{\zeta}\right)}, \tag{4.9b}$$

$$D_\zeta W = \frac{Qs - L\bar{\zeta}(A + B(s + i\sigma))}{s + L\zeta\bar{\zeta}}. \tag{4.9c}$$

Die Bedingung $D_T W = 0$ gibt wie gewohnt keine Einschränkung an T und wird dadurch gelöst, dass am Minimum $W = 0$ ist.

Die Gleichungen $D_\zeta W = 0$ und $D_S W = 0$ werden gemeinsam gelöst durch

$$\begin{aligned} s &= \frac{\mathrm{Re}[A]}{B}, \\ \sigma &= -\frac{\mathrm{Im}[A]}{B} \end{aligned} \tag{4.10}$$

und

$$\zeta = \frac{\bar{Q}}{2BL}. \tag{4.11}$$

Setzen wir Gl. (4.10) und Gl. (4.11) nun in das Superpotential (4.8) ein, erhalten wir

$$W_0 = 2\,\mathrm{Re}[A] + \frac{Q\bar{Q}}{2BL}. \tag{4.12}$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur für spezielle Werte der Konstanten A, B, Q und L. Somit ist die Gleichung $D_T W = 0$ allgemein nicht erfüllt.

Nun ist zu untersuchen, ob dieser Punkt ein Minimum darstellt. Dazu betrachten wir wieder die Hesse-Matrix. Sie lautet mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} X &= q^2 + \theta^2 + 4B^2 Ls, \\ q &= \mathrm{Re}[Q], \qquad \theta = \mathrm{Im}[Q] \end{aligned} \tag{4.13}$$

am stationären Punkt folgendermaßen:

$$\mathrm{Hess}(V) = \frac{LB^3}{t^3X^2} \begin{pmatrix} -B(2q^2+X) & -2q^3 & 0 & \theta(2q^2+X) \\ -2q^3 & 4BLs(2q^2+X) & -\theta(2q^2+X) & 0 \\ 0 & -\theta(2q^2+X) & -B(2q^2+X) & -2q^3 \\ \theta(2q^2+X) & 0 & -2q^3 & 4BLs(2q^2+X) \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Dabei haben wir mittels Gl. (4.10) nicht S, sondern A eliminiert.

Als Kriterium für positive Definitheit betrachten wir die Eigenwerte der Hesse-Matrix. Derer gibt es nur zwei unterschiedliche; sie lauten mit der weiteren Substitution

$$Y = B^4(4Ls - 1)(2q^2 + X) \tag{4.15}$$

so:

$$\nu_\pm = \frac{L\left(Y \pm \sqrt{Y^2 + 4B^6X^2(3q^2+X)}\right)}{2t^3X^2}. \tag{4.16}$$

Mindestens ν_- ist somit für $B \neq 0$ negativ, da X, Y^2 und B^2 und q^2 manifest positiv sind, da von Y also eine positive Zahl größer als Y abgezogen wird.

Es liegt also ein Sattelpunkt des Potentials vor. Dieser könnte aber im Rahmen der Breitenlohner-Freedman-Schranke stabil sein. Diese Möglichkeit haben wir nicht untersucht.

4.4 $C \neq 0$, A und B konstant

Nun beziehen wir auch einen einzelnen Kählermodulus T in die Betrachtungen mit ein. Für das resultierende Superpotential

$$W = A - iBS + Ce^{-aT} + Q\zeta \tag{4.17}$$

mit konstanten A und B, wobei B reell und ohne Beschränkung der Allgemeinheit negativ sei, lauten die relevanten kovarianten Ableitungen

$$D_T W = -\frac{(3+2at)Ce^{-aT} + 3\,(A - iBS + Q\zeta)}{2t}, \tag{4.18a}$$

$$D_S W = -\frac{A - iB(s - i\sigma + 2L\zeta\bar{\zeta}) + Ce^{-aT} + Q\zeta}{2i(s + L\zeta\bar{\zeta})}, \tag{4.18b}$$

$$D_\zeta W = \frac{Qs - L\bar{\zeta}\left(A + B(s+i\sigma) + Ce^{-aT}\right)}{s + L\zeta\bar{\zeta}}. \tag{4.18c}$$

Die Lösung von $D_S W = 0$ und $D_\zeta W = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} s &= \frac{\mathrm{Re}[A] + e^{-at}\left(\mathrm{Re}[C]\cos a\tau + \mathrm{Im}[C]\sin a\tau\right)}{B}, \\ \sigma &= -\frac{\mathrm{Im}[A] + e^{-at}\left(\mathrm{Im}[C]\cos a\tau - \mathrm{Re}[C]\sin a\tau\right)}{B} \end{aligned} \tag{4.19}$$

und

$$\zeta = \frac{\bar{Q}}{2BL}. \tag{4.20}$$

Wir wollen als Bedingung für supersymmetrische stationäre Punkte im Folgenden statt Gl. (4.19) die leichter zu handhabende äquivalente Bedingung

$$A = iB\bar{S} - Ce^{-aT} \tag{4.21}$$

verwenden, wenn wir diese Relation und Gl. (4.20) in $D_T W$ einsetzen. Wir erhalten für $D_T W = 0$ folgende Gleichung

$$-ate^{-at} = \frac{3\left(\frac{Q\bar{Q}}{BL} + 4Bs\right)}{4Ce^{-ia\tau}}. \tag{4.22}$$

Man sieht sofort, dass τ wie in Abschnitt 3.5.1 lediglich die komplexe Phase von C kompensiert und effektiv höchstens ein Vorzeichen liefert, das die Gleichung in t lösbar macht, da alle anderen Größen entweder reell sind oder im Falle von Q nur als Betragsquadrat auftreten. Da B oben negativ gewählt wurde, können wir somit τ eliminieren und die Bedingung vereinfachen:

$$-ate^{-at} = \mu \tag{4.23}$$

mit

$$\mu = \frac{3}{4\,|C|}\left(\frac{Q\bar{Q}}{BL} + 4Bs\right). \tag{4.24}$$

μ ist stets negativ. Die Gleichung (4.23) ist nur lösbar, für

$$\mu \geq -\frac{1}{e}. \tag{4.25}$$

Dies stellt eine scharfe Einschränkung an die für Supersymmetrie erlaubten Parameter dar.

Mit Hilfe der Lambertschen $\mathcal{W}$-Funktion [34] lässt sich die Lösung von Gl. (4.23) formal angeben als

$$t_0 = -\frac{1}{a}\mathcal{W}_{-1}(\mu), \tag{4.26}$$

wobei der Index -1 den Ast der mehrwertigen $\mathcal{W}$-Funktion bezeichnet, der für negative Argumente größer als $-1/e$ reell ist.

Nun bleibt noch zu untersuchen, ob diese Lösung stabil ist, das heißt, ob sie ein Minimum darstellt oder die Breitenlohner-Freedman-Schranke erfüllt.

Damit ein Minimum vorliegt, muss die Hesse-Matrix positiv definit sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn jeder der Hauptminoren[2] positiv ist.

Wenn wir die Hesse-Matrix bilden, indem wir V in dieser Reihenfolge nach t, s, τ, σ, x und y ableiten und am supersymmetrischen stationären Punkt auswerten, indem wir x und y gemäß Gl. (4.20), A gemäß Gl. (4.19) und C gemäß Gl. (4.23) eliminieren, dann erhalten wir für den zweiten Hauptminoren folgenden Ausdruck:

$$H_2 = -\frac{3B^4(2+at)\left(3q^2(11+4at)+(5+4at)(4B^2Ls+\theta^2)\right)}{32t^8\left(q^2+4B^2Ls+\theta^2\right)} \tag{4.27}$$

Dieser Ausdruck ist manifest negativ. Damit ist klar, dass das Potential auch in diesem Fall am supersymmetrischen stationären Punkt kein Minimum hat.

Da die Ausdrücke für die Eigenwerte der Hesse-Matrix sehr lang und unhandlich sind, finden wir keinen Weg, effizient das Breitenlohner-Freedman-Kriterium zu überprüfen.

4.5 $C \neq 0$, A, B z^α-abhängig

Wir beziehen nun den Effekt von Moduli der komplexen Struktur ein, die wir allerdings wie in Abschnitt 3.7 als ausintegriert betrachten, so dass für $A(z^\alpha) - iSB(z^\alpha)$ ein effektives Superpotential $W^S(S)$ zurückbleibt, so dass das gesamte zu betrachtende Superpotential nun folgendermaßen lautet:

$$W = W^S(S) + Ce^{-aT} + Q\zeta. \tag{4.28}$$

Die kovarianten Ableitungen lauten dann

$$D_T W = -\frac{(3+2at)Ce^{-aT} + 3\left(W^S + Q\zeta\right)}{2t}, \tag{4.29a}$$

$$D_S W = -\frac{-2i(s+L\zeta\bar{\zeta})W^{S\prime} + W^S + Ce^{-aT} + Q\zeta}{2i(s+L\zeta\bar{\zeta})}, \tag{4.29b}$$

$$D_\zeta W = \frac{Qs - L\bar{\zeta}\left(W^S + Ce^{-aT}\right)}{s+L\zeta\bar{\zeta}}. \tag{4.29c}$$

Die Gleichung $D_S W = 0$ können wir nicht mehr direkt nach S auflösen, da eine unbekannte Funktion $W^S(S)$ darin vorkommt. Wir geben daher implizite Bedingungen für die gleichzeitige Lösung von $D_S W = 0$ und $D_\zeta W = 0$ an:

$$W^S = -Ce^{-aT} + 2isW^{S\prime}, \tag{4.30}$$

$$\zeta = \frac{i\bar{Q}}{2LW^{S\prime}}. \tag{4.31}$$

Hier haben wir von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, W^S ohne Beschränkung der Allgemeinheit so zu wählen, dass es am supersymmetrischen stationären Punkt reell ist. $W^{S\prime}$ muss dann rein imaginär sein, wie in Abschnitt 3.7.1 dargelegt wurde.

Die Bedingung $D_T W = 0$ führt mit diesen Ergebnissen zu

$$C = 3\frac{Q\bar{Q} + 4Ls\left|W^{S\prime}\right|^2}{4iate^{-aT}LW^{S\prime}}. \tag{4.32}$$

[2] Der n-te Hauptminor einer Matrix M ist die Determinante der $n \times n$-Untermatrix von M, die beim $(1,1)$-Element beginnt.

Wir untersuchen nun die Hesse-Matrix, die wir wie in Abschnitt 4.4 bilden. Sie hat folgende Gestalt, wenn wir den Limes $Q \to 0$ betrachten, der zu kleinen ζ_0 korrespondiert:

$$\operatorname{Hess} V = \operatorname{diag}\left(V''_M, V''_A, \frac{L\left|W^{S\prime}\right|^2}{t^3}, \frac{L\left|W^{S\prime}\right|^2}{t^3} \right). \tag{4.33}$$

Hier sind die Untermatrizen V''_M und V''_A durch Gl. (3.94) gegeben. Da die letzten beiden Diagonaleinträge der Hesse-Matrix stets positiv sind, gelten die γ-Kriterien aus Abschnitt 3.7.1 unverändert auch hier. Ein stabiles Minimum ist daher zumindest für kleine Q erreichbar.

Allgemeinere Fälle wären noch zu untersuchen.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit waren Potentiale der Supergravitation als vierdimensionaler Limes der Stringtheorie. Dabei ging es um die Frage, ob spezielle Formen des Superpotentials W und des Kählerpotentials K zur Lösung des Problems der Moduli-Stabilisierung beitragen können. Dazu muss das Potential stabile stationäre Punkte für die Moduli aufweisen und diese somit bei physikalisch sinnvollen Werten stabilisieren. In dieser Arbeit beschränkten wir uns auf eine spezielle Klasse dieser stationären Punkte des Potentials, nämlich auf solche, bei denen die Supersymmetrie ungebrochen ist.

Wir haben die Modelle von KKLT [18], CFNOP [19] und GKP [20] nachgerechnet. Im Einzelnen haben wir bei CFNOP einen unerheblichen Detailfehler gefunden (siehe Gl. (3.38)) und eine Annahme von GKP überprüft, nämlich, dass im betrachteten Limes K_z vernachlässigbar ist. Ferner haben wir ermittelt, dass die supersymmetrischen Sattelpunkte, die CFNOP gefunden haben, im AdS-Hintergrund über der Breitenlohner-Freedman Schranke liegen und damit dennoch stabil sind, solange man sie nicht anhebt.

Wir möchten in diesem Zusammenhang die Arbeit [45] von de Alwis erwähnen. Dort wird ebenfalls argumentiert, warum der KKLT-Mechanismus in manchen Fällen inkonsistent ist. Weiterhin wird ausgeführt, dass die Vorgehensweise von CFNOP, die Moduli der komplexen Struktur auszuintegrieren und als Resultat ein holomorphes Superpotential für S zu erhalten, auch problematisch ist.

Die Kriterien von CFNOP für die Gültigkeit des KKLT-Mechanismus haben wir auf das Modell von GKP angewandt und festgestellt, dass der KKLT-Mechanismus in diesem Fall zu einem Sattelpunkt führt. Es bleibt zu untersuchen, ob dieser Sattelpunkt die Breitenlohner-Freedman-Schranke erfüllt und somit im AdS-Hintergrund dennoch stabil ist. Interessant wäre es nun, diese Kriterien auch auf andere Modelle für die Stabilisierung des Dilatons und der Moduli der komplexen Struktur anzuwenden.

Unsere Analyse erweiterte das betrachtete Superpotential um einen Term für D-Bran-Moduli ζ^A, wie er in [21] aufgestellt wurde. Dabei war das Kählerpotential ebenfalls zu modifizieren. Wir erhielten für die Modelle ohne Moduli der komplexen Struktur keine Minima, im Falle gemäß [19] ausintegrierter Moduli der komplexen Struktur fanden wir die gleichen Bedingungen für Stabilität wie dort, sofern der Einfluss der D-Bran-Moduli nur klein ist. Der allgemeinere Fall bleibt noch zu analysieren.

Wünschenswert wäre es nun, zum einen das Superpotential aus [21] in seiner vollen Allgemeinheit, also mit mehreren ζ^A zu betrachten. Zum anderen bietet es sich an, weitere Beiträge zum Superpotential hinzu zu nehmen. Dies könnte ein Term De^{-bS} sein, wie er in [35] vorgeschlagen wird, um Sattelpunkte des Potentials ohne Moduli der komplexen Struktur zu Minima zu stabilisieren. Man kann zusätzliche in T exponentielle Terme in Form des Racetrack-Potentials [46, 47] hinzunehmen. Weiterhin wäre der Fall mit weiteren Kählermoduli T^μ oder mit einer echten Abhängigkeit der Moduli der komplexen Struktur interessant.

Wichtig wäre es darüber hinaus, all diese Betrachtungen auf nicht-supersymmetrische Minima zu erweitern, da die Supersymmetrie in der Natur offensichtlich gebrochen ist und es dadurch außerdem möglich wäre, Minima bei positiven Werten des Potentials und einer positiven kosmologischen Konstanten zu finden, wie sie empirisch gegenwärtig favorisiert wird.

Ein Nebenresultat findet sich im Anhang, nämlich, dass supersymmetrische stationäre Punkte, an denen der Wert des Potential null ist, stets Minima des Potentials sind. Es ist naheliegend und wünschenswert, die Bedingung $\langle V \rangle = 0$ zu lockern um allgemeinere Bedingungen dafür aufzustellen, dass ein Minimum vorliegt.

Anhang A

Notation und Konventionen

A.1 Spinoralgebra

Die Minkowski-Metrik lautet

$$\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1), \tag{A.1}$$

die Komponenten von Lorentztensoren werden durch kleine lateinische Indizes gekennzeichnet. Spinoren erhalten griechische Indizes, gepunktete für die, die unter der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentzgruppe transformieren, ungepunktete für die, welche unter der konjugierten $(\frac{1}{2}, 0)$-Darstellung transformieren. Wir machen in dieser Arbeit nur von zweikomponentigen Weyl-Spinoren Gebrauch. Aus zwei Weyl-Spinoren lässt sich ein Dirac-Spinor

$$\Psi_\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

zusammensetzen; Majorana-Spinoren enthalten nur einen Weyl-Spinor:

$$\Psi_\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Die Wirkung der Lorentzgruppe auf Weyl-Spinoren wird durch Darstellungen der $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ vermittelt, wobei der Zusammenhang durch die Paulimatrizen gegeben ist:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Die σ^m sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die die $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-Darstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ zu der Vektordarstellung der Lorentzgruppe in Beziehung setzen.

Die $\bar{\sigma}$ sind als

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0, \qquad \bar{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3} \tag{A.5}$$

definiert.

Die Generatoren der Lorentzgruppe lauten in der Spinordarstellung

$$\sigma^{nm}{}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4}\left(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^n \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta}\right), \tag{A.6}$$

$$\bar{\sigma}^{nm\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m - \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^n\right). \tag{A.7}$$

Dabei gelten folgende Spinor-Summationskonventionen:

$$\psi\chi = \psi^\alpha \chi_\alpha, \qquad \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}. \tag{A.8}$$

Über doppelte, entgegengesetzt stehende Spinorindizes wird summiert. Das Resultat ist ein Lorentzskalar. Über Indizes, die in Klammern stehen, wird nicht summiert. Wo keine Verwechslungsgefahr besteht und die Übersichtlichkeit erhöht wird, lassen wir freie Spinorindizes weg.

Mit Hilfe der antisymmetrischen, lorentzinvarianten $\varepsilon^{\alpha\beta}$-Tensoren

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1, \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1, \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \tag{A.9}$$

lässt sich der Zusammenhang zwischen Spinoren mit oberen und solchen mit unteren Indizes darstellen:

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta. \tag{A.10}$$

Außerdem ist

$$\varepsilon_{0123} = -1. \tag{A.11}$$

A.2 Ableitungen nach Skalarfeldern

Generell bezeichnet ein untenstehender Index häufig eine partielle Ableitung nach dem entsprechenden Skalarfeld, also beispielsweise

$$W_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi^i}, \qquad W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^i \partial \phi^j}. \tag{A.12}$$

Bei Größen, die bereits untenstehende Indizes aufweisen, die nicht für partielle Ableitungen stehen, wird eine partielle Ableitung durch ein Komma signalisiert,

$$f_{ab,i} \equiv \frac{\partial f_{ab}}{\partial \phi^i}. \tag{A.13}$$

A.3 Skalarfelder der Stringtheorie

Das komplexe Dilaton wird mit S bezeichnet und gemäß

$$S = -\sigma + is \tag{A.14}$$

in Real- und Imaginärteil aufgespalten.

Die Moduli der komplexen Struktur werden mit

$$z^\alpha, \qquad \alpha = 1, \ldots, h_{21}$$

bezeichnet.

Der Kählermodulus (wir betrachten nur einen einzelnen) wird in unserer Darstellung durch

$$T = t + i\tau \tag{A.15}$$

in Real- und Imaginärteil aufgeteilt.

A.4 Größen und Dimensionen

Die zentrale Größe in der Supergravitation ist die vierdimensionale Gravitationskopplungskonstante κ:

$$\kappa^2 = \frac{8\pi}{M_P^2}, \tag{A.16}$$

hierbei ist M_P die Planckmasse,

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \simeq 1{,}22 \cdot 10^{19}\,\frac{\mathrm{GeV}}{c^2}, \tag{A.17}$$

und G_N ist die Newtonsche Gravitationskonstante.

Wir verwenden Einheiten, in denen

$$\hbar = 1, \qquad c = 1 \tag{A.18}$$

gilt und in denen dort, wo der Wert von κ unerheblich ist,

$$\kappa = 1 \tag{A.19}$$

gesetzt ist.

Anhang B

Kählergeometrie

B.1 Eigenschaften von Kählermannigfaltigkeiten

Die Kopplungen chiraler Multipletts lassen sich elegant mit den Mitteln der Kählergeometrie ausdrücken. Eine Kählermannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, die in komplexen Koordinaten ϕ^i und $\bar{\phi}^{\bar{\imath}}$ parametrisiert werden kann. Dabei müssen die analytischen Koordinatentransformationen komplex differenzierbar sein.

Eine Kählermannigfaltigkeit hat folgende definierende Eigenschaften [6]:

1. Die hermitesche Kählermetrik $K_{i\bar{\jmath}}$ muss positiv definit und invertierbar sein, $K^{i\bar{\jmath}}$ ist die inverse Kählermetrik.

2. Die kovariante Ableitung muss von der Form

$$\nabla_i V_j = \partial_i V_j - \Gamma^k_{ij} V_k, \tag{B.1}$$

$$\nabla_{\bar{\imath}} V_j = \partial_{\bar{\imath}} V_j - \Gamma^k_{\bar{\imath}j} V_k \tag{B.2}$$

   sein.

3. Der Zusammenhang muss vereinbar mit der hermiteschen Metrik sein:

$$\nabla_k K_{i\bar{\jmath}} = 0 = \nabla_{\bar{k}} K_{i\bar{\jmath}}. \tag{B.3}$$

Aus diesen Bedingungen ergibt sich

$$\Gamma^i_{jk} = K^{i\bar{l}} \frac{\partial}{\partial \phi^j} K_{k\bar{l}}. \tag{B.4}$$

Zentrales Ergebnis der Kählergeometrie ist, dass sich die Kählermetrik lokal als Ableitung einer reellen Funktion K der Skalarfelder ergibt,

$$K_{i\bar{\jmath}} = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^i \partial \bar{\phi}^{\bar{\jmath}}}. \tag{B.5}$$

K wird auch Kählerpotential genannt. Es legt die Kählergeometrie vollständig fest. Kählertransformationen der Form

$$K(\phi, \bar{\phi}) \to K(\phi, \bar{\phi}) + f(\phi) + \bar{f}(\bar{\phi}). \tag{B.6}$$

mit einer holomorphen Funktion $f(\phi)$ lassen die Kählermetrik invariant.

Man kann eine Normal-Koordinaten-Entwicklung der Kählermetrik durchführen:

$$K_{i\bar{\jmath}} = \delta_{i\bar{\jmath}} + R_{i\bar{\jmath}k\bar{l}} \phi^k \bar{\phi}^{\bar{l}} + \ldots, \tag{B.7}$$

wobei $R_{i\bar{\jmath}k\bar{l}}$ der Krümmungstensor ist, definiert durch

$$[\nabla_i, \nabla_{\bar{\jmath}}] V_k = g^{m\bar{l}} R_{i\bar{\jmath}k\bar{l}} V_m. \tag{B.8}$$

B.2 Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten

Eine spezielle Klasse von Kählermannigfaltigkeiten bilden die Mannigfaltigkeiten mit verschwindender erster Chern-Klasse, die Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Sie haben die Eigenschaften, dass sie Ricci-flache Metriken mit $SU(d)$-Holonomie (wobei d die komplexe Dimension der Mannigfaltigkeit ist) zulassen, was bedeutet, dass sich jeder Paralleltransport eines Vektors entlang einer geschlossenen Kurve stets auf eine $SU(d)$-Transformation des Vektors reduzieren lässt. Für uns ist nur der Fall $d = 3$ von Interesse, auf den wir uns im Weiteren beschränken wollen.

Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten besitzen eine eindeutig bestimmte holomorphe $(3, 0)$-Form Ω sowie h_{21} harmonische $(2, 1)$-Formen (für Details hierzu siehe Abschnitt B.3). Zusammen mit der eindeutigen $(0, 3)$-Form und den $(1, 2)$-Formen ergibt dies insgesamt

$$2h^{21} + 2 \tag{B.9}$$

harmonische 3-Formen. Es gibt keine 1- und 5-Formen, die 0-Form ist eine Konstante. Übrig bleiben noch h_{11} harmonische $(1, 1)$- und $(2, 2)$-Formen [31]. h_{rs} sind hier die Hodge-Zahlen.

B.3 Cohomologie

Analog zur de Rham-Cohomologie (siehe beispielsweise [48]) führt man auf komplexen Mannigfaltigkeiten die Dolbeault-Cohomologie (siehe beispielsweise [49]) der Dolbeault-Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$ für die Menge $\Omega^{r,s}$ der (r, s)-Formen ein. ∂ und $\bar{\partial}$ spalten die äußere Ableitung d auf in

$$d = \partial + \bar{\partial}, \tag{B.10}$$

mit $\partial : \Omega^{r,s} \to \Omega^{r+1,s}$ und $\bar{\partial} : \Omega^{r,s} \to \Omega^{r,s+1}$. Eine p-Form $\omega \in \Omega^{r,0}$ nennt man holomorph, wenn $\bar{\partial}\omega = 0$. Eine (r, s)-Form ω auf einer Kählermannigfaltigkeit nennt man harmonisch, wenn

$$(d * d * + * d * d)\omega = 0. \tag{B.11}$$

Dabei bezeichnet $*$ den gewöhnlichen Hodge-Stern, der eine Form in ihre Hodge-duale überführt. Jede holomorphe Form auf einer Kählermannigfaltigkeit ist automatisch harmonisch.

Die (r, s)te $\bar{\partial}$-Cohomologiegruppe $H^{r,s}_{\bar{\partial}}$ ist der Kern von $\bar{\partial}$ modulo dem Bild von $\bar{\partial}$:

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}} = \frac{\{\omega \in \Omega^{r,s} \,|\, \bar{\partial}\omega = 0\}}{\{\omega \in \Omega^{r,s} \,|\, \exists \eta \in \Omega^{r,s-1} : \omega = \bar{\partial}\eta\}}. \tag{B.12}$$

Die komplexe Dimension von $H^{r,s}_{\bar{\partial}}$ bezeichnet man als Hodge-Zahl h_{rs}.

Für eine Kählermannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist

$$H^p(\mathcal{M}) = \bigoplus_{r+s=p} H^{r,s}(\mathcal{M}), \tag{B.13}$$

wobei die linke Seite die Komplexifizierung des gewöhnlichen $H^p(\mathcal{M})$ ist; das heißt, es werden komplexe q-Formen $\zeta = \omega + i\eta$ betrachtet, die aus reellen Differentialformen η und ω zusammengesetzt sind.

B.4 Homologie

Beschränken wir uns nun auf 3-Formen in einem 3-dimensionalen Calabi-Yau-Raum $\mathcal{M}$. Wir können dann zu einer Basis (α_i, β^j) der Cohomologie (hier ist β^i dual zu α_i) eine spezielle Basis der Homologie finden, die aus jeweils dualen Zykeln (A^i, B_j) besteht, so dass folgendes gilt:

$$\int_{A_j} \alpha_i = \int_{\mathcal{M}} \alpha_i \wedge \beta^j = \delta_i^j. \tag{B.14}$$

Für die Zykel ist die Zahl der Schnittpunkte durch

$$A_i \cap B^j = \delta_i^j \tag{B.15}$$

gegeben.

Anhang C

Minimum des allgemeinen Potentials

Von besonderer Bedeutung sind supersymmetrische Grundzustände. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie

$$\langle D_i W \rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \langle D^a \rangle = 0 \tag{C.1}$$

erfüllen.

Wir zeigen zunächst, dass es sich bei diesen Grundzuständen tatsächlich allgemein um stationäre Punkte handelt. Danach zeigen wir, dass unter der Bedingung, dass der Vakuumerwartungswert des Potentials null ist, diese Grundzustände Minima sind.

C.1 Stationäre Punkte

Der Gradient des skalaren Potentials (2.44) lautet (mit $\kappa = 1$):

$$\begin{aligned} V_k = e^K \Big[& K_k D_i W K^{i\bar{\jmath}} D_{\bar{\jmath}} \bar{W} - 3(D_k W)\bar{W} + (\partial_k D_i W) K^{i\bar{\jmath}} D_{\bar{\jmath}} \bar{W} + D_i W \left(\partial_k K^{i\bar{\jmath}}\right) D_{\bar{\jmath}} \bar{W} \\ & + D_i W K^{i\bar{\jmath}} \left(\partial_k D_{\bar{\jmath}} \bar{W}\right) \Big] \\ & + \frac{1}{2} f_{ab} \left(D^a_k D^b + D^a D^b_k \right) + \frac{1}{2} f_{ab,k} D^a D^b . \end{aligned} \tag{C.2}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $W(\phi^i)$ eine holomorphe Funktion ist, also $\partial_{\phi^i} \bar{W} = 0$. Unter der Annahme $D_i W = 0$ zusammen mit $D^a = 0$ verschwindet dieser Gradient:

$$V_k = 0. \tag{C.3}$$

V weist also an den Stellen mit $D_i W = 0$ stationäre Punkte auf, vorausgesetzt $D^a = 0$.

Wir können folgern, dass unter der Voraussetzung ungebrochener Supersymmetrie das Potential stationär ist.

C.2 Minima

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen der obige stationäre Punkt ein Minimum darstellt. Dabei muss gewöhnlich bei negativen Werten des Potentials am stationären Punkt die Breitenlohner-Freedman-Schranke ([37],[13]) beachtet werden, da in AdS-Räumen auch Sattelpunkte oder Maxima des Potentials stabil sein können (siehe auch Abschnitt 3.5.3). Wir betrachten hier jedoch der Einfachheit halber den Fall

$$D^a \equiv 0 \tag{C.4}$$

mit der Bedingung, dass das Potential am stationären Punkt verschwindet,

$$\langle V \rangle = 0. \tag{C.5}$$

Die kosmologische Konstante ist null und die Breitenlohner-Freedman-Schranke spielt hier folglich keine Rolle.

Aus $\langle V \rangle = 0$ folgt (zusammen mit $D^a = 0$ und $\langle D_i W \rangle = 0$), dass das Superpotential am stationären Punkt ebenfalls verschwindet, $\langle W \rangle = 0$.

Die komplexen Skalarfelder lassen sich in Real- und Imaginärteil aufteilen,

$$\phi^i = x^i + iy^i. \tag{C.6}$$

Für die Ableitung des Potentials gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x^k} &= V_k \frac{\partial \phi^i}{\partial x^k} + V_{\bar{\imath}} \frac{\partial \bar{\phi}^{\bar{\imath}}}{\partial x^k} = V_k + V_{\bar{k}}, \\ \frac{\partial V}{\partial y^k} &= V_k \frac{\partial \phi^i}{\partial y^k} + V_{\bar{\imath}} \frac{\partial \bar{\phi}^{\bar{\imath}}}{\partial y^k} = i\left(V_k - V_{\bar{k}}\right). \end{aligned} \tag{C.7}$$

Analog lauten die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^l} = V_{kl} + V_{k\bar{l}} + V_{\bar{k}l} + V_{\bar{k}\bar{l}}, \tag{C.8a}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^k \partial y^l} = -V_{kl} + V_{k\bar{l}} + V_{\bar{k}l} - V_{\bar{k}\bar{l}}, \tag{C.8b}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial y^l} = i\left(V_{kl} - V_{k\bar{l}} + V_{\bar{k}l} - V_{\bar{k}\bar{l}}\right). \tag{C.8c}$$

Für diese einzelnen Terme ergibt sich mit Gl. (C.2), wenn man alle Terme, in denen $D_i W$ vorkommt, eliminiert:

$$\begin{aligned} V_{kl} = e^K \Big[&- 3K_{kl} W \bar{W} - 3K_k W_l \bar{W} \\ &+ (K_{ik} W + K_i W_k + W_{ik}) K^{i\bar{\jmath}} K_{l\bar{\jmath}} \bar{W} + (K_{il} W + K_i W_l + W_{il}) K^{i\bar{\jmath}} K_{k\bar{\jmath}} \bar{W} - 3W_{kl} \bar{W} \Big] \\ = e^K &\Big[K_k K_l W - K_{kl} W - W_{kl} \Big] \bar{W}. \end{aligned} \tag{C.9}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Ableitungen nach dem Satz von Schwarz vertauschen und dass $K^{i\bar{\jmath}}$ die inverse Kählermetrik ist,

$$K^{i\bar{\jmath}} K_{k\bar{\jmath}} = K^{i\bar{\jmath}} K_{\bar{\jmath}k} = \delta^i_k, \tag{C.10}$$

sowie dass mit $D_i W = 0$

$$W_i = -K_i W \tag{C.11}$$

gilt.

Man kann sich jedoch auch ohne diese Rechnung überzeugen, dass jeder Summand entweder $\bar{W}_l$ enthält und wegen der Holomorphie von W verschwindet oder $\bar{W}$ enthält und wegen $\langle W \rangle = 0$ verschwindet, weshalb

$$V_{kl} = 0 \tag{C.12}$$

folgt. Dennoch haben wir die Form (C.9) angegeben, da sie einen Ausgangspunkt für Analysen des Stabilitätsverhaltens ohne die Bedingung $\langle W \rangle = 0$ darstellt.

Betrachten wir die gemischten zweiten Ableitungen und eliminieren wieder die Terme, in denen D_iW vorkommt:

$$V_{k\bar{l}} = e^K \Big[K^{i\bar{\jmath}} W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} - \left(K_{k\bar{l}} + 4K_k K_{\bar{l}} + K_i K_k K^{i\bar{\jmath}} K_{\bar{\jmath}} K_{\bar{l}} \right) W\bar{W} + 2\,\mathrm{Re}\left[K_i K_k K^{i\bar{\jmath}} W \bar{W}_{\bar{\jmath}\bar{l}} \right] \Big]. \tag{C.13}$$

Mit der Bedingung $\langle W \rangle = 0$ überlebt nur ein Term, nämlich der ohne W und $\bar{W}$:

$$V_{k\bar{l}} = e^K K^{i\bar{\jmath}} W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}}. \tag{C.14}$$

Alle anderen Terme sind nur relevant, wenn man den Fall $\langle W \rangle \neq 0$ untersucht.

Die zweiten Ableitungen bestimmen das Stabilitätsverhalten des Potentials. Wenn die Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial x^N} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial y^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^N \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x^N \partial x^N} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^N \partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x^N \partial y^N} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y^1 \partial x^N} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^1 \partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y^1 \partial y^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^N \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y^N \partial x^N} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^N \partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y^N \partial y^N} \end{pmatrix} \tag{C.15}$$

positiv definit ist, liegt ein Minimum vor (sonst wird der Fall komplizierter).

Mit Gl. (C.8) wird dies zu

$$\mathrm{Hess}(V) = \begin{pmatrix} V_{k\bar{l}} + V_{\bar{k}l} & -iV_{k\bar{l}} + iV_{\bar{k}l} \\ iV_{k\bar{l}} - iV_{\bar{k}l} & V_{k\bar{l}} + V_{\bar{k}l} \end{pmatrix}, \tag{C.16}$$

woraus sich weiter mit Gl. (C.12) und Gl. (C.14)

$$\mathrm{Hess}(V) = e^K \begin{pmatrix} K^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} + W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) & -iK^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} - W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) \\ iK^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} - W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) & K^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} + W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) \end{pmatrix}. \tag{C.17}$$

ergibt.

Diesen Ausdruck vereinfachen wir, indem wir eine Umdefinition der Felder vornehmen, also neue Koordinaten wählen, so dass die Kählermetrik $K_{i\bar{\jmath}}$ und damit die inverse Kählermetrik $K^{i\bar{\jmath}}$ am stationären Punkt lokal flach ist,

$$\langle K^{i\bar{\jmath}} \rangle = \delta^{i\bar{\jmath}}. \tag{C.18}$$

Dass dies stets möglich ist, garantiert uns der Riemannsche Satz.

Die Hesse-Matrix lautet nun

$$\mathrm{Hess}(V) = e^K \begin{pmatrix} \delta^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} + W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) & -i\delta^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} - W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) \\ i\delta^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} - W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) & \delta^{i\bar{\jmath}} \left(W_{ki} \bar{W}_{\bar{l}\bar{\jmath}} + W_{li} \bar{W}_{\bar{k}\bar{\jmath}} \right) \end{pmatrix}. \tag{C.19}$$

Jeden Eintrag der Matrix können wir folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{(\mathrm{Hess}(V))_{mn}}{e^K} = i^{(\mathrm{sgn}(N-n) - \mathrm{sgn}(N-m))/2} W_{m_N i} \overline{W_{n_N i}} + i^{(\mathrm{sgn}(N-m) - \mathrm{sgn}(N-n))/2} W_{n_N i} \overline{W_{m_N i}}, \tag{C.20}$$

wobei m und n bis $2N$ laufen und x_d steht für

$$x_d \equiv x \bmod d, \tag{C.21}$$

also den Rest bei ganzzahliger Division mit $x_x = x$. $\mathrm{sgn}(x)$ bezeichnet das Vorzeichen von x, wobei das Vorzeichen von 0 als +1 definiert sei.

Hess(V) lässt sich zerlegen als Produkt einer Matrix A mit ihrer adjungierten $A^\dagger$,

$$\mathrm{Hess}(V) = e^K A A^\dagger, \tag{C.22}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} W_{kl} & -i\bar{W}_{\bar{k}\bar{l}} \\ iW_{kl} & -\bar{W}_{\bar{k}\bar{l}} \end{pmatrix} \tag{C.23}$$

Hier kann man die Einträge schreiben als

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}(V))_{mn} = {} & \frac{\operatorname{sgn}(N-n)+1}{2} i^{(\operatorname{sgn} N-n-\operatorname{sgn} N-m)/2} W_{mn} \\ & + \frac{\operatorname{sgn}(N-n)-1}{2} i^{(\operatorname{sgn} N-m-\operatorname{sgn} N-n)/2} \overline{W_{mn}}.\end{aligned} \tag{C.24}$$

Wir können nun ausnutzen, dass jede Matrix M, die sich gemäß Gl. (C.22) aufspalten lässt, positiv definit ist, sofern A nichtsingulär ist. Falls letzteres nicht der Fall ist, ist M zumindest noch positiv-semidefinit [50].

Dies soll uns als Kriterium für Stabilität genügen. Wir haben damit gezeigt, dass das Potential am supersymmetrischen stationären Punkt ein Minimum hat, falls der D-Term und der Wert des Potentials am stationären Punkt verschwindet.

Anhang D

Anmerkungen zum D-Term

KKLT [18] schlagen einen additiven Zusatzterm zum Potential vor, welcher ein AdS-Minimum zu einem dS-Minimum „anheben“ soll. Dieser Term bricht die Supersymmetrie allerdings explizit.

Ein Vorschlag für einen anhebenden Zusatzterm im Rahmen einer supersymmetrischen Wirkung in Form eines D-Terms machen Burgess et al. [51].

Choi et al. [35] weisen darauf hin, dass ein Potential, welches ohne Berücksichtigung des D-Terms ein AdS-Minimum aufweist, nicht durch Einbeziehung des D-Terms zu einem dS-Minimum angehoben werden kann. Man kann ihn nämlich schreiben [15, 52] als

$$D^a = \frac{i}{\mathrm{Re}[f_a]} \frac{1}{W} \delta_a \phi^i D_i W, \tag{D.1}$$

wobei $\delta_a \phi^i$ die Eichtransformation des Feldes ϕ^i unter einem Faktor der Eichgruppe G bezeichnet.

Für supersymmetrische stationäre Punkte mit $\langle D_i W \rangle = 0$ würde also der D-Term verschwinden, vorausgesetzt $\langle W \rangle \neq 0$. Diese Bedingung ist jedoch für supersymmetrische AdS-Minima gemäß Gl. (2.57) erfüllt. Daher kann ein supersymmetrisches AdS-Minimum nicht durch einen D-Term angehoben werden.

Anders ausgedrückt muss, um in Fällen mit $\langle W \rangle \neq 0$ ein de Sitter-Minimum zu erreichen, die Brechung der Supersymmetrie explizit oder (mindestens) im $D_i W$-Term stattfinden.

Literaturverzeichnis

[1] B. Zumino, *Supersymmetry now and then*, (2005) [arXiv:hep-th/0508127].

[2] I. J. R. Aitchison, *Supersymmetry and the MSSM: An elementary introduction*, (2005) [arXiv:hep-ph/0505105].

[3] S. Perlmutter et al., *Measurements of* Ω *and* Λ *from 42 high-redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999) [arXiv:9812133];
A. G. Riess et al., *Light curves for 22 type Ia supernovae*, Astron. J. **117**, 707 (1999) [arXiv:9810291].

[4] F. Denef und M. R. Douglas, *Distributions of flux vacua*, JHEP **0405**, 072 (2004) [arXiv:hep-th/0404116];
F. Denef und M. R. Douglas, *Distributions of nonsupersymmetric flux vacua*, JHEP **0503**, 061 (2005) [arXiv:hep-th/0411183].

[5] L. Susskind, *The Anthropic Landscape of String Theory*, [arXiv:hep-th/0302219].

[6] J. Wess und J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, Princeton, 1992.

[7] H. Kalka und G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner-Verlag, 2001.

[8] H. J. W. Müller-Kirsten und A. Wiedemann, *Supersymmetry – An Introduction with Conceptual and Calculational Details*, World Scientific, Singapur/New Jersey/Hong Kong, 1987.

[9] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fiels, Vol. 3: Supersymmetry*, Cambridge University Press, 2000.

[10] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rept. **128**, 39 (1985).

[11] J. Louis, I. Brunner und S. J. Huber, *The supersymmetric Standard Model*, [arXiv:hep-ph/9811341].

[12] J. Figueroa-O'Farrill, *BUSSTEPP Lectures on Supersymmetry*, Vorlesungen gehalten in Oxford (2000) und Manchester (2001) [arXiv:hep-th/0109172].

[13] B. de Wit, *Supergravity*, (2002) [arXiv:hep-th/0212245].

[14] P. Binétruy, G. Girardi und R. Grimm, *Supergravity Couplings: A Geometric Formulation*, Phys. Rept. **343**, 255 (2001) [arXiv:hep-th/0005225].

[15] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek und W. Siegel, *Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry*, Front. Phys. **58**, 1 (1983) [arXiv:hep-th/0108200].

[16] M. Strauch, *De Sitter-Räume als Lösungen zu spontan gebrochener N=1 Supergravitation*, Diplomarbeit an der Universität Halle-Wittenberg, `http://www.physik.uni-halle.de/~strauch/diplom/diplom.pdf` (2003).

[17] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989);
S. Weinberg, *The cosmological constant problems*, Vortrag gehalten auf *Dark Matter 2000*, Marina del Rey (2000) [arXiv:astro-ph/00005265].

[18] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde und S. P. Trivedi, *De Sitter vacua in string theory*, Phys. Rev. D **68**, 046005 (2003) [arXiv:hep-th/0301240].

[19] K. Choi, A. Falkowski, H. P. Nilles, M. Olechowski und S. Pokorski, *Stability of flux compactifications and the pattern of supersymmetry breaking*, JHEP **0411**, 076 (2004) [arXiv:hep-th/0411066].

[20] S. B. Giddings, S. Kachru und J. Polchinski, *Hierarchies from fluxes in string compactifications*, Phys. Rev. D **66**, 106006 (2002) [arXiv:hep-th/0105097].

[21] H. Jockers und J. Louis, *D-terms and F-terms from D7-brane fluxes*, Nucl. Phys. B **718**, 203 (2005) [arXiv:hep-th/0502059].

[22] H. Jockers und J. Louis, *The effecitve action of D7-branes in $N = 1$ Calabi-Yau orientifolds*, Nucl. Phys. B **696**, 205 (2004) [arXiv:hep-th/0409098].

[23] S. Coleman und J. Mandula, *All possible symmetries of the S matrix*, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).

[24] R. Haag, J. Lopuszanski und M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the S matrix*, Nucl. Phys. B **88**, 257 (1975).

[25] L. O'Raifeartaigh, *Spontaneous symmetry breaking for chiral scalar superfields*, Nucl. Phys. B **96**, 331 (1975).

[26] P. Fayet und J. Iliopoulos, *Spontaneously broken supergauge symmetries and Goldstone spiinors*, Phys. Lett. B **51**, 461 (1974).

[27] S. W. Hawking und G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

[28] M. B. Green, J. H. Schwarz und E. Witten, *Superstring Theory*, Cambrige University Press, Cambridge, 1987.

[29] J. Polchinski, *String Theory Vol. I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998;
J. Polchinski, *String Theory Vol. II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[30] J. Louis, *Phenomenological aspects of string theory*, Vorlesungen gehalten auf Kloster Banz, 1999, `http://www.desy.de/~jlouis/banz_f.ps`.

[31] M. Graña, *Flux compactifications in string theory: a comprehensive review*, [arXiv:hep-th/0509003].

[32] E. Witten, *Non-perturbative superpotentials in string theory*, Nucl. Phys. B **474**, 343 (1996) [arXiv:hep-th/9604030].

[33] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas, D. V. Nanopoulos, *Naturally vanishing cosmological constant in $N = 1$ supergravity*, Phys. Lett. B **133**, 61 (1983).

[34] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey und D. E. Knuth, *On the Lambert W Function*, Adv. Comp. Math **5**, 329 (1996).

[35] K. Choi, A. Falkwoski, H. P. Nilles and M. Olechowski, *Soft Supersymmetry breaking in KKLT flux compactification*, Nucl. Phys. B **718**, 113 (2005) [arXiv:hep-th/0503216].

[36] A. Falkowski, persönliche Mitteilung, 2005.

[37] P. Breitenlohnner und D. Z. Freedman, *Positive energy in anti-de Sitter backgrounds and gauged extended supergravity*, Phys. Lett. B **115**, 197 (1982);
P. Breitenlohner und D. Z. Freedman, *Stability in gauged extended supergravity*, Ann. Phys. **144**, 249 (1982).

[38] B. Craps, F. Roose, W. Troost und A. Van Proeyen, *What is Special Kähler Geometry ?*, Nucl. Phys. B **503**, 565 (1997) [arXiv:hep-th/9703082].

[39] S. J. Gates, Jr., *Superspace formulation of new nonlinear sigma models*, Nucl. Phys. B **238**, 349 (1984);
J. Bagger und E. Witten, *Matter couplings in $N = 2$ supergravity*, Nucl. Phys. B **222**, 1 (1983).

[40] P. Candelas und X. de la Ossa, *Moduli space of Calabi-Yau manifolds*, Nucl. Phys. B **355**, 455 (1991).

[41] S. Gukov, C. Vafa und E. Witten, *CFT's from Calabi-Yau four-folds*, Nucl. Phys. B **584**, 69 (2000) [Erratum-ibid. B **608**, 477 (2001)] [arXiv:hep-th/9906070].

[42] T. R. Taylor, C. Vafa, *RR flux on Calabi-Yau und partial symmetry breaking*, Phys. Lett. B **474**, 130 (2000) [arXiv:hep-th/9912152].

[43] P. Candelas und X. de la Ossa, *Comments on conifolds*, Nucl. Phys. B **342**, 246 (1990).

[44] I. R. Klebanov und M. J. Strassler, *Supergravity and a confining gauge theory: duality cascades and a χsb-resolution of naked singularities*, JHEP **0008**, 052 (2000) [arXiv:hep-th/0007191].

[45] S. P. de Alwis, *Effective potentials for light moduli*, (2005) [arXiv:hep-th/0506266];
S. P. de Alwis, *On integrating out heavy fields in SUSY theories*, (2005) [arXiv:hep-th/0506267].

[46] C. Escoda, M. Gómez-Reino und F. Quevedo, *Saltatory de Sitter string vacua*, HEP **0311**, 065 (2003) [arXiv:hep-th/0307160];

[47] J. J. Blanco-Pillado *et al.*, *Racetrack inflation*, JHEP **0411**, 063 (2004) [arXiv:hep-th/0406230].

[48] T. Frankel, *The geometry of physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[49] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Institute of Physics Publishing, 1990.

[50] M. Marcus und H. Ming, *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Allyn and Bacon, Boston, 1964.

[51] C. P. Burgess, R. Kallosh und F. Quevedo, *de Sitter string vacua from supersymmetric D-terms*, JHEP **0310**, 056 (2003) [arXiv:hep-th/0309187].

[52] P. Binetruy, G. Dvali, R. Kallosh und A. Van Proeyen, *Fayet-Iliopoulos Terms in Supergravity and Cosmology*, Class.Quant.Grav. 21, 3137 (2004) [arXiv:hep-th/0402046].

Danksagung und Erklärung

Danksagung

Es ist nun an der Zeit, ein paar Worte des Dankes zu äußern.

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Prof. Jan Louis für die interessante Aufgabenstellung und die engagierte sowie freundliche Betreuung bedanken.

Adam Falkowski und Hans Jockers danke ich für erklärende Gespräche und Hinweise. Ersterer hat mir freundlicherweise Einsicht in einige Berechnungen mit Mathematica gewährt.

Desweiteren habe ich Mira Krämer, Jacek Swiebodzinski, Stellan Bohlens und Christian Hambrock für hilfreiche Tipps, lehrreiche Diskussionen und angenehme Abwechslung in unserem Büro zu danken. Ihr seid allesamt Freaks.

Besonderer Dank gebührt Jens Koesling dafür (und für vieles andere), dass er meine Neugier und mein Interesse an Theoretischer Physik und Mathematik immer wieder neu entfacht hat.

Meiner Familie und meinem guten Freund Matthias Merk danke ich für die generelle vielfache Unterstützung während meines gesamten Studiums.

Vor allem aber möchte ich mich bei meiner lieben Frau Jasmyn bedanken, die im letzten Jahr leider oft nur wenig von mir hatte und mir dennoch fabelhaft den Rücken von so einigen Widrigkeiten des Alltags frei gehalten hat.

Erklärung

Hiermit versichere ich gemäß § 21 (9) der Prüfungsordnung für den Studiengang Physik/Diplom, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur mit Hilfe der angegebenen Quellen verfasst habe.

Desweiteren gestatte ich die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Christian Blohm
Hamburg, 30. November 2005