

Noether-Theorem und SO(4)-Symmetrie des Wasserstoffatoms

Simon Reichert

16. Dezember 2015

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird das bekannte Noether-Theorem hergeleitet und damit, als Anwendung, die SO(4)-Symmetrie des Wasserstoffatoms gezeigt. Das Noether-Theorem sagt aus, dass aus jeder kontinuierlichen Symmetrie (kontinuierlich mit der Identität verbunden) eine korrespondierende Erhaltungsgröße, also eine erhaltene Observable, folgt.

2 Das Noether-Theorem

Sei G eine kontinuierliche Gruppe eines physikalischen Systems. Dann ist entweder ganz G oder zumindest ein Teil (eine normale Untergruppe) kontinuierlich mit der Identität verbunden. Im Folgenden wird immer dieser Teil betrachtet.

Außerdem benutzen wir zusätzlich noch fünf Aussagen, die zum Teil in den vorherigen Vorträgen hergeleitet wurden:

- (i) Nach dem Wignerschen Theorem existiert für die Gruppe G mit den Elementen $g(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ eine unitäre Darstellung $U(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$
- (ii) Die Parameter α_i können nahezu beliebig gewählt werden. Es bietet sich jedoch an, die sogenannten kanonischen Parameter zu benutzen. Wir schreiben $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \equiv \boldsymbol{\alpha} \equiv \alpha \mathbf{n}_\alpha$ und erhalten so eine Abelsche Untergruppe, die nur einen Parameter hat. Wir können hier natürlich auch $\mathbf{n}_\alpha = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \equiv \mathbf{n}_i$ wählen, wobei hier eine 1 an der i -ten Stelle und sonst nur 0 stehen.
- (iii) Zu jedem Gruppenelement $g(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ definieren wir

$$\dot{g}_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(0, \dots, 0), \quad \dot{U}_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} U(0, \dots, 0). \quad (1)$$

Jeder dieser Sätze von Matrizen spannt einen Vektorraum der Dimension r auf, der mit dem Kommutator $[\dot{g}, \dot{h}] = \dot{g}\dot{h} - \dot{h}\dot{g}$ als Multiplikationsvorschrift zu einem Ring erweitert wird. Dies ist die Lie-Algebra \dot{G} zur Gruppe G . Wie wir im nächsten Punkt sehen werden, sind die \dot{g}_i die infinitesimalen Erzeuger der Gruppe G .

- (iv) In der Nähe der Identität können die Gruppenelemente als

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \exp \left[\sum_{k=1}^r \alpha_k \dot{g}_k \right] \quad (2)$$

geschrieben werden und analog für die Darstellung

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \exp \left[\sum_{k=1}^r \alpha_k \hat{U}_k \right] \equiv \exp \left[\sum_{k=1}^r i\alpha_k \hat{B}_k \right], \quad (3)$$

wobei $\hat{B}_k \equiv -i\hat{U}_k$ hermitesch ist:

$$1 = U(\alpha)U^\dagger(\alpha) = \exp \left[\sum_{k=1}^r i\alpha_k \hat{B}_k \right] \exp \left[-\sum_{k=1}^r i\alpha_k \hat{B}_k^\dagger \right] \stackrel{[\hat{B}_k, \hat{B}_k^\dagger]=0}{=} \exp \left[\sum_{k=1}^r i\alpha_k (\hat{B}_k - \hat{B}_k^\dagger) \right]$$

$$\Leftrightarrow \hat{B}_k - \hat{B}_k^\dagger = 0 \Leftrightarrow \hat{B}_k = \hat{B}_k^\dagger.$$

- (v) Der Hamilton-Operator ist invariant unter den Transformationen der Symmetriegruppe.

Beweis. Wir betrachten die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (SG)

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

und die Transformation

$$U |\psi\rangle = |\psi'\rangle.$$

Da wir U als zeitunabhängig annehmen, gilt

$$0 = \frac{d}{dt}(U |\psi\rangle - |\psi'\rangle) = U \frac{d}{dt} |\psi\rangle - \frac{d}{dt} |\psi'\rangle \stackrel{\text{SG}}{=} -\frac{i}{\hbar} U H |\psi\rangle + \frac{i}{\hbar} H U |\psi\rangle \\ \Leftrightarrow 0 = H U - U H = [H, U].$$

Damit bleibt H invariant unter der Transformation U . □

Sei nun $U(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ die unitäre Darstellung unserer Symmetriegruppe G nach (i). Für kleine α lässt sich das nach (iv) schreiben als

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \exp \left[\sum_{k=1}^r i\alpha_k \hat{B}_k \right] \text{ mit } \hat{B}_k \equiv -i\hat{U}_k. \quad (4)$$

Wir wählen im Raum der kanonischen Parameter die Richtung $\mathbf{n}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ und erhalten als Abelsche Untergruppe in Anlehnung an (ii)

$$U(\alpha) = \exp \left[i\alpha \hat{B}_k \right]. \quad (5)$$

Mit (v) wissen wir außerdem, dass der Hamiltonian H invariant unter unitären Transfor-

mationen ist, also solchen, die wir betrachten, was wir auch als

$$H' = U(\alpha)HU^{-1}(\alpha) = H \quad (6)$$

schreiben können. Setzen wir hier Gleichung (5) ein, und entwickeln die Exponentialfunktion bis zur ersten Ordnung für $\alpha \rightarrow 0$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} H &= \exp \left[i\alpha \dot{B}_k \right] H \exp \left[-i\alpha \dot{B}_k \right] \approx (1 + i\alpha \dot{B}_k) H (1 - i\alpha \dot{B}_k) \\ &= H - i\alpha (H \dot{B}_k - \dot{B}_k H) + \mathcal{O}(\alpha^2) \approx H - i\alpha \left[H, \dot{B}_k \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Das bedeutet, dass \dot{B}_k und H kommutieren:

$$\left[H, \dot{B}_k \right] = 0. \quad (8)$$

Daraus folgt, dass \dot{B}_k eine Erhaltungsgröße und außerdem eine Observable ist. Das gleiche gilt für alle Richtungen \mathbf{n}_i , $i = 1, \dots, r$. Da außerdem alle Elemente der Lie-Algebra (die Lie-Algebren von \dot{B} und \dot{U} unterscheiden sich nur im Faktor i) gegeben sind durch die Basis \dot{B}_k durch

$$\dot{B}(\alpha) = \sum \alpha_k \dot{B}_k = \alpha \sum \frac{\alpha_k \dot{B}_k}{\alpha} = \alpha \dot{B}(\mathbf{n}_\alpha), \quad (9)$$

können wir Gleichung (8) auf beliebige Richtungen \mathbf{n}_α verallgemeinern. D.h. alle Operatoren $\dot{B}(\mathbf{n}_\alpha)$ sind Observablen und Erhaltungsgrößen. Da aber die Basis-Elemente \dot{B}_k , $k = 1, \dots, r$ die gesamte Lie-Algebra aufspannen, reicht es diese zu betrachten.

Die \dot{B}_k kommutieren nicht alle untereinander. Tatsächlich ist sogar die gesamte Struktur der lokalen Gruppe und seiner Lie-Algebra in den Kommutator-Relationen, die die Form

$$\left[\dot{B}_i, \dot{B}_k \right] = \sum_{l=1}^r C_{ik}^l \dot{B}_l \quad (10)$$

annehmen, enthalten. Dabei sind C_{ik}^l die sogenannten Struktur-Konstanten (die aber natürlich nicht invariant unter einem Basiswechsel sind). Wir können einen Satz $\{B_1, \dots, B_\ell\}$ von kommutierenden Operatoren wählen. Diese kommutieren nicht nur paarweise miteinander sondern auch mit dem Hamiltonian, so dass wir die Quantenzustände mit ihren Quantenzahlen b_1, \dots, b_ℓ bezeichnen. Diese sind selbst meistens nicht geeignet, um einen Quantenzustand zu beschreiben, es kann aber Funktionen $F(\dot{B}_1, \dots, \dot{B}_r)$ des Satzes $\{B_1, \dots, B_r\}$ geben, für die das zutrifft.

Noether-Theorem

Diese Ergebnisse können wir zusammenfassen in der gruppentheoretischen Version des Noether-Theorems:

Die Erzeuger $\dot{B}_1, \dots, \dot{B}_r$ einer Symmetrie-Gruppe (die kontinuierlich mit der Identität

verbunden ist) sind Erhaltungsgrößen, deren Kommutator-Relationen allein durch die Struktur der Gruppe gegeben sind.

Das gilt natürlich nur dann, wenn sich die Dynamik des Systems in Hamiltonian-Form formulieren lässt, und dann $[H, \dot{B}] = 0$ ist. Die Invarianz der Bewegungsgleichungen allein ist nicht ausreichend.

Bekannte Beispiele für die Anwendung des Noether-Theorems sind die Impulserhaltung, die aus der Translationsinvarianz folgt und die Drehimpulserhaltung, die aus der Rotationsinvarianz folgt. Im folgenden Kapitel wollen wir uns speziell der SO(4)-Symmetrie des Wasserstoffatoms widmen, die die zusätzliche Entartung der Grobstruktur erklären kann.

3 SO(4)-Symmetrie des Wasserstoffatoms

Viele zufällige Entartungen sind das Resultat einer tiefer liegenden Symmetrie. Im Wasserstoffatom, allgemeiner im $1/r$ -Potential, sind die Energieniveaus unabhängig von der Drehimpulsquantenzahl, was auf eine zusätzlich zur SO(3)-Symmetrie von rotationsinvarianten Potentialen auftretenden Symmetrie schließen lässt. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass wir die Symmetrie-Gruppe auf SO(4), welche lokal isomorph zu $SO(3) \times SO(3)$ ist. Damit können wir nicht nur die zusätzliche Entartung erklären, sondern auch das Spektrum des Wasserstoffatoms vorhersagen.

3.1 Runge-Lenz-Vektor

Der Hamiltonian des Wasserstoffatoms ist durch

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e_M^2}{r} \quad (11)$$

gegeben und ist rotationsinvariant. Das lässt sich durch den verschwindenden Kommutator von $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ und H ausdrücken:

$$[\vec{L}, H] = 0. \quad (12)$$

Das ist in der klassischen Physik äquivalent zu einem zeitlich erhaltenen Drehimpuls:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad (13)$$

wobei wir hier verwendet haben, dass

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\vec{p}}{m} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} = -\text{grad}V(r) = -\frac{e_M^2}{r^3} \vec{r}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Erhaltung des Drehimpulses bedeutet klassisch, dass die Bewegung in einer Ebene liegt, deren Normale durch \vec{L} gegeben ist. Außerdem ist eine klassisch gebundene Bahn

im allgemeinen eine Ellipse, die mit der großen Halbachse eine weitere feste Richtung hat. Wir werden im folgenden sehen, dass es einen weiteren erhaltenen Vektor, den *Runge-Lenz-Vektor*

$$\vec{M} := \vec{v} \times \vec{L} - \frac{e_M^2}{r} \vec{r} \quad (15)$$

gibt, der in genau diese Richtung zeigt. Der Runge-Lenz-Vektor ist zeitlich erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} - e_M^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= -\frac{e_M^2}{mr^3} \vec{r} \times \vec{L} - \frac{e_M^2}{m} \left[\frac{\vec{p}}{r} - \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^3} \right] \\ &= \frac{e_M^2}{mr^3} [\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{r}) + \vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p})] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

und senkrecht zu \vec{L}

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{L} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{L} - \frac{e_M^2}{r} \vec{r} \right) = -\frac{e_M^2}{r} (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} = 0 \quad (17)$$

und ist damit ein Vektor der Ebene. Um zu verdeutlichen, dass der Vektor in Richtung der großen Halbachse zeigt, bilden wir das Skalarprodukt aus \vec{r} und \vec{M} :

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{M} &= (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} - e_M^2 r = \frac{\vec{L}^2}{m} - e_M^2 r \\ &= \frac{\vec{L}^2}{m} - e_M^2 r = rM \cos(\theta) \\ &\Leftrightarrow r(e_M^2 + M \cos(\theta)) = \frac{\vec{L}^2}{m} \end{aligned} \quad (18)$$

Dies ist die Polardarstellung der Ellipsengleichung. Wählt man nun $\theta = 0$, so sind \vec{r} und \vec{M} parallel. Gleichzeitig zeigt \vec{r} für $\theta = 0$ in Richtung der großen Halbachse (da r dann minimal wird). Nun bestimmen wir noch die Exzentrizität $M = |\vec{M}|$, indem wir \vec{M}^2 bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{M}^2 &= \left(\vec{v} \times \vec{L} - \frac{e_M^2}{r} \vec{r} \right)^2 = \frac{1}{m^2} (\vec{p} \times \vec{L})^2 - 2 \frac{e_M^2}{mr} (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} + e_M^4 \\ &= \frac{1}{m^2} \left[\vec{p}^2 \vec{L}^2 - \underbrace{(\vec{L} \cdot \vec{p})^2}_{=0} \right] - 2 \frac{e_M^2}{mr} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{L}}_{=\vec{L}} + e_M^4 \\ &= \frac{2}{m} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e_M^2}{r} \right) \vec{L}^2 + e_M^4 \\ &= \frac{2}{m} \vec{L}^2 E + e_M^4 \end{aligned} \quad (19)$$

wobei wir in der dritten Zeile die Lagrange-Identität für Vektorprodukte benutzt haben:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}). \quad (20)$$

Für den klassischen Fall haben wir nun neben dem Drehimpuls \vec{L} einen weiteren erhaltenen Vektor \vec{M} gefunden. Wir wollen nun die quantenmechanische Version des Runge-Lenz-Vektors finden.

3.2 Runge-Lenz-Vektor quantenmechanisch

Für den quantenmechanischen Fall definieren wir den Runge-Lenz-Vektor durch

$$\vec{M} := \frac{\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}}{2m} - \frac{e_M^2}{r} \vec{r}, \quad (21)$$

wobei wir die Geschwindigkeit \vec{v} durch \vec{p}/m ersetzen. Man kann (mit viel Rechenaufwand) zeigen, dass H und \vec{M} kommutieren und damit das quantenmechanische Analogon zu Gleichung (16) sind:

$$[H, M] = 0 \quad (22)$$

Wie im klassischen Fall können weiterhin die Relationen

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{M} \cdot \vec{L} = 0 \quad (23)$$

und

$$\vec{M}^2 = \frac{2H}{m}(\vec{L}^2 + \hbar^2) + e_M^4 \quad (24)$$

gezeigt werden, wobei letzteres für $\hbar \rightarrow 0$ den klassischen Fall (Gleichung (19)) ergibt.

3.3 SO(4)-Symmetrie im Wasserstoffatom

Da \vec{M} ein Vektoroperator ist, sind die Kommutator-Relationen mit dem Drehimpuls-Operator durch

$$[L_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k \quad (25)$$

gegeben, die sehr ähnlich zu denen der L_i aussehen:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k. \quad (26)$$

Mit viel Rechenaufwand können wir nun noch die Kommutatoren der einzelnen Komponenten von \vec{M} bestimmen:

$$[M_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} \left(-\frac{2H}{m}\right) L_k \quad (27)$$

Die sechs Operatoren \vec{L} und \vec{M} formen eine größere Algebra als SO(3), die in der Form aber noch nicht geschlossen ist. Hier stört der Faktor $\left(-\frac{2H}{m}\right)$ in Gleichung (27), da hier noch Hamiltonian als weiterer Operator auftritt und die Kommutator-Relationen nicht die Form in Gleichung (10) annehmen. Da aber H mit \vec{L} und \vec{M} kommutiert, können wir ein \vec{M}' definieren:

$$\vec{M}' := \vec{M} \left(-\frac{2H}{m}\right)^{-1/2} \quad (28)$$

Die gebundenen Eigenwerte von H sind dabei negativ, $E_n < 0$, was dazu führt, dass $(-2E_n/m)$ ebenfalls positiv ist, da für einen hermiteschen Operator H gilt, dass für die Eigenwerte λ_i zu den Eigenzuständen $|\psi_i\rangle$ $f(H)|\psi_i\rangle = f(\lambda_i)|\psi_i\rangle$ gilt. Auf diese Weise steht unter der Wurzel ein positiver Ausdruck. Die Gleichungen (23), (26) und (25) ändern sich auf diese Weise nicht, nur in Gleichung (27) fällt der Faktor $(-2H/m)$ weg und in (3.2) wird zu:

$$\vec{L} \cdot \vec{M}' = \vec{M}' \cdot \vec{L} = 0 \quad (29)$$

$$\vec{M}'^2 = -\vec{L}^2 - \hbar^2 - e_M^4 \frac{m}{2H} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} [L_i, M'_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} M'_k \\ [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} L_k \\ [M'_i, M'_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} L_k \end{aligned} \quad (31)$$

Hier sehen wir schon, dass die sechs Operatoren \vec{L} und \vec{M}' eine größere Algebra als SO(3) haben. Um das zu verdeutlichen entkoppeln wir nun die Kommutatoren-Relationen durch die Definitionen

$$\begin{aligned} \vec{J}^{(1)} &:= \frac{1}{2} (\vec{L} + \vec{M}') \\ \vec{J}^{(2)} &:= \frac{1}{2} (\vec{L} - \vec{M}') \end{aligned} \quad (32)$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] &= \frac{1}{4} \left\{ (L_i - M'_i) (L_j - M'_j) - (L_j - M'_j) (L_i - M'_i) \right\} \\
&= \frac{1}{4} (L_i L_j + M'_i L_j + L_i M'_j + M'_i M'_j - L_j L_i - M'_j L_i - L_j M'_i - M'_j M'_i) \\
&= \frac{1}{4} ([L_i, L_j] + [L_i, M'_j] - [L_j, M'_i] + [M'_i, M'_j]) \\
&= \frac{2}{4} i\hbar \epsilon_{ijk} (L_k - M_k) = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k^{(1)} \tag{33}
\end{aligned}$$

und analog

$$[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k^{(2)} \tag{34}$$

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}] = 0. \tag{35}$$

Da auf diese Weise $\vec{J}^{(1)}$ und $\vec{J}^{(2)}$ separat als Generatoren von SO(3) interpretiert werden können und die beiden Operatoren kommutieren, kann die gesamte Algebra als $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ bzw. $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ charakterisiert werden. Da $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ isomorph zu SO(4) ist (gilt auch für Lie-Algebren) können wir das auch als SO(4)-Symmetrie auffassen, die von den Operatoren

$$L_{\mu\nu} := x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \tag{36}$$

erzeugt wird, wobei μ und ν von 0 bis 3 laufen und x_μ und p_ν die kanonischen Kommutator-Relationen $[x_\mu, p_\nu] = i\hbar \delta_{\mu\nu}$ erfüllen. Wir definieren dann

$$\vec{L} := \begin{pmatrix} L_{23} \\ L_{31} \\ L_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{K} := \begin{pmatrix} L_{01} \\ L_{02} \\ L_{03} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

wobei wir bei geeigneter Wahl der fiktiven Komponenten x_0 und p_0 \vec{K} mit \vec{M} identifizieren können. Diese Vektoren erfüllen genau die Gleichungen (31).

3.4 Eigenwerte des Wasserstoffatoms

Im nächsten Schritt wollen wir die Eigenwerte des Wasserstoff-Hamiltonians bestimmen. Dazu betrachten wir die Gleichungen (33), (34) und (35), so dass wir analog zum Drehimpuls-Operator die Eigenwerte für $(\vec{J}^{(1)})^2$ und $(\vec{J}^{(2)})^2$

$$(\vec{J}^{(1)})^2 |\psi_{j_1}\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |\psi_{j_1}\rangle \tag{38}$$

$$(\vec{J}^{(2)})^2 |\psi_{j_2}\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |\psi_{j_2}\rangle \tag{39}$$

erhalten, wobei j_1 und j_2 halb- oder ganzzahlig ($j_1, j_2 = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots$) sein können. Mit Gleichung (29) und $\vec{L} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$ und $\vec{M}' = \vec{J}^{(1)} - \vec{J}^{(2)}$ folgt

$$\begin{aligned} 0 = \vec{L} \cdot \vec{M}' |\psi\rangle &= (\vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}) (\vec{J}^{(1)} - \vec{J}^{(2)}) |\psi\rangle \\ &= \left((\vec{J}^{(1)})^2 - (\vec{J}^{(2)})^2 \right) \\ &= (j_1(j_1 + 1)\hbar^2 - j_2(j_2 + 1)\hbar^2) |\psi\rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

woraus folgt, dass $j_1 = j_2 = j$ ist. Außerdem können wir mit (29) und (30) $(\vec{J}^{(1)})^2$ explizit bestimmen:

$$\begin{aligned} (\vec{J}^{(1)})^2 &= \frac{1}{4} (\vec{L} + \vec{M}')^2 = \frac{1}{4} (\vec{L}^2 + \vec{L}\vec{M}' + \vec{M}'\vec{L} + \vec{M}'^2) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{L}^2 + \vec{M}'^2) = \frac{1}{4} (\vec{L}^2 - \vec{L}^2 - \hbar^2 - e_M^4 \frac{m}{2H}) \\ &= \frac{1}{4} \left(-\hbar^2 - e_M^4 \frac{m}{2H} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Wenn wir dies auf einen Eigenzustand wirken lassen erhalten wir

$$\begin{aligned} j(j+1)\hbar^2 |\psi_j\rangle &= (\vec{J}^{(1)})^2 |\psi_j\rangle = -\frac{1}{4} \left(\hbar^2 + e_M^4 \frac{m}{2H} \right) |\psi_j\rangle \\ \Leftrightarrow j(j+1)\hbar^2 &= -\frac{1}{4} \left(\hbar^2 + e_M^4 \frac{m}{2E_n} \right) \\ \Leftrightarrow e_M^4 \frac{m}{2E_n} &= (4j(j+1) + 1)\hbar^2 = (2j+1)^2\hbar^2 \\ \Leftrightarrow E_n &= \frac{-me_M^4}{2\hbar^2(2j+1)^2} = \frac{-me_M^4}{2\hbar^2n^2} \end{aligned} \quad (42)$$

wobei $n := 2j + 1$ ist. E_n ist unabhängig von der Drehimpulsquantenzahl l also in ihr entartet. Das wird auch dadurch klar, dass sich \vec{L} als innere Summe der beiden „Drehimpuls Operatoren“ $\vec{J}^{(1)}$ und $\vec{J}^{(2)}$ mit $j_1 = j_2 = j$ schreiben lässt:

$$\vec{L} = \vec{J}^{(1)} \oplus \vec{J}^{(2)}. \quad (43)$$

Die Drehimpulsquantenzahl l kann damit die ganzzahligen Werte von $|j_1 - j_2| = 0$ bis $j_1 + j_2 = 2j$, was gleichbedeutend mit $l \leq n - 1$ ist, annehmen, welche aber alle zur gleichen Hauptquantenzahl $n = 2j + 1$ führen. Zusammen mit der Entartung der z -Komponente des Drehimpulses entspricht der Entartung $(2j + 1)^2 = n^2$.

Literatur

- [1] M. Chaichian und R. Hagedorn. *Symmetries in quantum Mechanics*. IOP, 1998.
- [2] H.F. Jones. *Groups, Representations and Physics*. IOP, 1990.