Die Gruppen SO(2) und SO(3)

Phuoc Thien Le

02.12.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der SO(2) und SO(3)-Gruppe, die zu den kontinuierlichen Gruppen gehören, da sie Rotationen um beliebige Winkel φ beschreiben. Außerdem werden wir dafür den infinitesimalen Generator einführen und Verbindungen zu den quantenmechanischen Drehimpuls herstellen.

1.1 Defintion der speziellen orthogonalen Gruppen SO(n)

Die ***SO(n)*** Gruppe ist die Gruppe der orthogonalen (n x n)-Matrizen mit Determinante 1. Also gilt für die Gruppe:

$$\forall\ R\ \in\ SO(n)\ gilt: RR^T = R^T R = \mathbb{1} \tag{1}$$

$$\det(R) = 1 \tag{2}$$

2 SO(2)-Gruppe

2.1 Eigenschaften der SO(2)-Gruppe

Die SO(2) Gruppe ist also die spezielle orthogonale Gruppe der (2 x 2)-Matrizen. Bisher bekannt ist die zyklische Gruppe C_n deren Elemente Rotationen um einen Winkel von 2πk/n, k = 0,1,...n-1 sind. Dagegen beschreiben die Elemente der SO(2)-Gruppe zweidimensionale Rotationen um beliebige Winkel φ mit $\varphi \in [0,2\pi)$ um eine Drehachse. Im Folgenden beschränken wir uns auf die $x-y-$Ebene also $z = 0$. Wie bekannt sieht die entsprechende Drehmatrix folgendermaßen aus:

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Diese Drehmatrix folgt auch aus leichten geometrischen Überlegungen. Es ist leicht nachzurechnen, dass diese Drehmatrix die Eigenschaften der SO(n)-Gruppen erfüllt und somit ein Element dieser ist.

Bermerkungen

i.) Die Drehmatrix *R(φ)* ist nur eine Darstellung der abstrakten Gruppe der Drehungen in zwei Dimension. Jedoch ist der Kern der Abbildung die Identität (φ=0) und damit eine 'treue' Darstellung also isomorph zur Gruppe selbst.

ii.) *R(φ)* ist im reellen irreduzibel jedoch reduzibel im Falle der komplexen Zahlen. Nach Lösen des Eigenwertproblems und der Ausnutzung der Diagonalisierbarkeit der Matrix gilt:

$$\begin{pmatrix} x' + iy' \\ x' - iy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix} \tag{4}$$

Anschaulicher ist diese Gleichung wenn man sie in Polarkoordinaten darstellt.

$$\begin{pmatrix} r'e^{i\theta'} \\ r'e^{-i\theta'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} re^{i(\theta+\varphi)} \\ re^{-i(\theta+\varphi)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

iii.) Da die Gruppe offensichtlich abelsch ist mit *R(φ)R(φ')=R($\varphi + \varphi'$)* folgt, dass die irreduziblen Darstellungen 1-dimensional sind mit $m \in \mathbb{Z}$:

$$D^{(m)}(\varphi) = e^{-im\varphi} \tag{6}$$

2.2 Skalarprodukt

Bisher wurde das Skalarprodukt für diskrete Gruppen folgendermaßen definiert:

$$\langle \chi^{(\mu)}, \chi^{(\nu)} \rangle = \frac{1}{[g]} \sum_g \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g^{-1}) \tag{7}$$

Bei der SO(2) handelt es sich um eine kompakte Gruppe mit endlichen Parameter φ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$, sodass die Summe $(1/[g]\sum$ auch als Integral $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi/2\pi$ aufgefasst werden und daher folgt:

$$\langle \chi^{(m)}, \chi^{(m')} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} = \delta_{mm'} \tag{8}$$

Daraus folgt für die Clebsch-Gordan-Reihe:

$$D^{(m)} \otimes D^{(m')} = D^{(m+m')} \tag{9}$$

Die in (4) ausgerechnete Zerlegung in irreduzible Darstellungen lässt sich nun mithilfe des neu definierten Skalarprodukts überprüfen:

$$\begin{aligned} a_m = \langle \chi^{(m)}, \chi \rangle \; mit \; \chi = 2cos(\varphi) \quad \chi : Charakter \; von \; R(\varphi) \\ a_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} \; 2\cos\varphi \; d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \; d\varphi \\ &= \delta_{m,-1} + \delta_{m,1} \end{aligned}$$

Daraus folgt wie schon in (4) berechnet:

$$R = D^{(1)} \otimes D^{(-1)} \tag{10}$$

2.3 Infinitesimaler Generator

Im Folgenden wird der Begriff der Generatoren eingeführt. Dafür betrachten wir Elemente, die infinitesimal nahe am neutralen Elemente (φ=0) liegen. Unter dieser Betrachtung lässt sich *R(φ)* eine Taylor-Entwicklung durchführen. Terme ab der Ordnung 2 werden dabei vernachlässigt:

$$R(\varphi) = \mathbb{1} \; - \; i\varphi X \; + \; O(\varphi^2) \tag{11}$$

wobei

$$-iX = \left. \frac{dR(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} \tag{12}$$

X ist der *infinitesimaler Generator* von der SO(2)-Gruppe. Im Falle der Drehmatrix R(φ) gilt:

$$-iX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Der infinitesimaler Generator generiert dabei jede Drehung um einen Winkel φ durch Exponenzierung.

$$R(\varphi) = \exp(-i\varphi X) \tag{14}$$

Wir wollen nun die Richtigkeit der Gleichung (14) zeigen. Die Exponenzierung einer Matrix ist durch eine Reihe definiert. In diesem Fall folgt für die Exponenzierung in Geichung (14):

$$\exp(-i\varphi X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\varphi)^n X^n \tag{15}$$

Da $X^2{=}\mathbb{1}$ gilt lässt sich die Reihe in gerade Terme und ungerade Terme aufteilen:

$$\exp(-i\varphi X) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cos(\varphi) + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sin(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$
$$= R(\varphi)$$

Also wurde damit die Richtigkeit der Gleichung (14) gezeigt.

Bemerkung

i.) X ist in diesem Fall hermitisch und gleich einer der Pauli-Matrizen ($X{=}\sigma_2$). Außerdem ist die Spur von X gleich 0. Die Hermizität kann schnell gezeigt werden:

$$\mathbb{1} = R^\dagger(\varphi)R(\varphi) = (\mathbb{1} + i\varphi X^\dagger)(\mathbb{1} - i\varphi X) \tag{16}$$
$$= \mathbb{1} - i\varphi(X - X^\dagger) + O(\varphi^2) \tag{17}$$
$$\Rightarrow X = X^\dagger \tag{18}$$

ii.) Im Allgemeinen wird der Generator für allgemeine Darstellungen entsprechend definiert:

$$-iX = \left.\frac{dD(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} \tag{19}$$
$$mit \quad D(\varphi) = \exp(-i\varphi X) \tag{20}$$

2.4 Beziehung des Generators X mit $\hat{J}_z$

In der Quantenmechanik ist der Generator X mit dem Differentialoperator $\hat{X}$ verknüpft, der jedoch auf Wellenfunktionen wirkt. Die Rotation von einer Wellenfunktion ψ zu einer Wellenfunktion ψ' ist jedoch äquivalent zu einer Rotation der Achsen mit der die Wellenfunktion beschrieben wird, da die Wahrscheinlichkeitsdichte erhalten bleibt. Die Rotation wird durch einen (unitären) Operator $\hat{U}_R$ beschrieben. Daraus folgt:

$$\hat{U}_R\psi(x) = \psi(R^{-1}x)$$

Für kleine Winkel φ gilt nach Entwicklung in der ersten Ordnung:

$$(1 - i\varphi\hat{X})\psi(r,\theta) = \psi(r,\theta) - \varphi\frac{d\psi(r,\theta)}{d\theta}$$
$$\Rightarrow i\hat{X} = \frac{d}{d\theta}$$
$$\Rightarrow \hat{X} = -i\frac{d}{d\theta} = \frac{\hat{J}_z}{\hbar} \tag{21}$$

3 SO(3)-Gruppe

Die SO(3) beschreibt nun Rotationen in drei Dimensionen. In diesem Fall benötigen wir für die komplette Beschreibung von Rotationen in drei Dimensionen auch drei Darstellungen , da um jede Achse gedreht werden kann. Was im Folgenden auch gezeigt wird, ist dass diese Darstellungen auch nicht miteinander kommutieren aber eine Kommutatorrelation zwischen diesen besteht. Diese Darstellungen lassen sich geometrisch herleiten und lauten wie folgt.

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix} \quad R_2(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$
$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{22}$$

Wobei die Indizes 1,2,3 für die drei verschiedenen Drehachsen steht. Im Folgenden identifiziert mit den x,y,z-Achsen. Diese Darstellung erfüllen wieder die Eigenschaften der speziellen orthogonalen Gruppe SO(n). Ein Beweis wird an dieser Stelle verzichtet.

3.1 Infinitesimale Generatoren von SO(3)

Die Generatoren von Drehungen über die kartesischen Achsen lassen sich ganz einfach mithilfe der Drehmatrizen (22) berechnen. Dafür wird die Gleichung (19) benutzt woraus für die Generatoren folgt:

$$-iX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; -iX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; -iX_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass für die Generatoren folgende Beziehung gilt:

$$(X_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk} \tag{24}$$

Die mehr physikalische Methode diese Generatoren zu bestimmen ist sich eine Rotation von r unter einem kleinen Winkel φ um eine beliebige Achse n anzuschauen. Die dadurch entstehende Verrückung ist orthogonal zu der Ebene, die durch n und r aufgespannt wird. Also folgt:

$$\begin{aligned} \delta r &= n \; \times \; r\varphi \\ \textit{oder auch} \quad r' &= r \; + \; \varphi(n \; \times \; r) \end{aligned}$$

Wenn man das Kreuzprodukt als Tensor auffasst folgt in der Summenkonvention:

$$\begin{aligned} r'_i = r_i + \varphi\epsilon_{ikj}n_k r_j &= r_i - \varphi\epsilon_{ijk}n_k r_j = (\delta_{ij} - \varphi\epsilon_{ijk}n_k)r_j \\ \Rightarrow (R_n(\varphi))_{ij} &= \delta_{ij} - \varphi\epsilon_{ijk}n_k \end{aligned}$$

Nach Gleichung (11) gilt für kleine φ außerdem:

$$\begin{aligned} (R_n(\varphi))_{ij} &= \delta_{ij} - i\varphi(X_n)_{ij} \\ \Rightarrow (X_n)_{ij} &= -i\epsilon_{ijk}n_k = n_k(X_k)_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_n = n \cdot X \tag{25}$$

Mit dieser Formel lässt sich jeder Generator für dreidimensionale Rotationen um eine beliebige Achse n berechnen mit Hilfe der "kartesischen Generatoren"$X = (X_1, X_2, X_3)$. Das Resultat (25) zeigt auch folgende Beziehung:

$$R_n(\varphi) = e^{-in\cdot X\varphi} \tag{26}$$

3.2 Kommutatorrelationen

Die infinitesimalen Generatoren (23) bilden einen Vektorraum. Das heißt, dass jede Linearkombination aus den X_i einen weiteren Generator bilden. Jedoch lassen sich die Beziehung zwischen den Generatoren auch durch eine Kommutatorrelation zeigen, da die SO(3)-Gruppe eine Lie-Algebra bilden, welche in einem späteren Vortrag genauer definiert wird. Im Folgenden soll die Kommutatorrelation auf zwei verschiedene Weisen ausgerechnet werden:

a) Da die Darstellungen "treue" Darstellungen sind, lassen sich die Kommutatorrelationen direkt mit der Definition eines Kommutators berechnen. Nach einfachen Matrixmultiplikationen folgt:

$$-[X_1, X_2] = iX_3$$

Äquivalent folgt das für die die zyklischen Permutationen:

$$[X_i, X_j] \;=\; i\epsilon_{ijk}X_k \tag{27}$$

b) Die mehr physikalische Methode, um die Kommutatorrelation zu bestimmen ist sich eine Drehung um eine gedrehte Achse anzuschauen. Es wird die folgende Konjugation betrachtet:

$$R_{n'}(\varphi) = S(\theta)R_n(\varphi)S^{-1}(\theta) \tag{28}$$

Wobei φ als infinitesimal klein angenommen wird. Im Folgenden wird für n die x-Achse verwendet und außerdem wird mit $S(\theta)$ eine Drehung um die z-Achse mit dem Winkel θ beschrieben. Daher ist $n' = Sn$ die gedrehte Achse. Aus geometrischen Betrachtung folgt dieser Zusammenhang (28). Dies folgt aber auch durch die Gruppenstruktur. Dabei kannn' in kartesischen Koordinaten folgendermaßen beschrieben werden kann.

$$n' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher folgt mit Gleichung (25):

$$n' \cdot X = X_1 \cos(\theta) + X_2 \sin(\theta)$$
$$\Rightarrow R_{n'}(\varphi) = e^{-in'X\varphi} = e^{-i(X_1\cos(\theta)+X_2 sin(\theta))\varphi}$$

und da $S(\theta)$=$e^{-iX_3\theta}$ folgt äquivalent zu Gleichung (28):

$$e^{-iX_3\theta}e^{-iX_1\varphi}e^{iX_3\theta} = e^{-i(X_1\cos(\theta)+X_2\sin(\theta))\varphi}$$

Entwickelt man dies um φ=0 in der ersten Ordnung ergibt dies:

$$e^{-iX_3\theta}(1 - iX_1\varphi))e^{iX_3\theta} = 1 - i(X_1\cos(\theta) + X_2\sin(\theta))\varphi$$

und damit

$$e^{-iX_3\theta}X_1e^{iX_3\theta} = X_1\cos(\theta) + X_2\sin(\theta)$$

Nach Ableitung nach θ und Einsetzung von θ=0 erhalten wir:

$$-iX_3X_1 + X_1iX_3 = -i[X_3, X_1] = X_2$$

Analog erhält man auch die anderen Kommutatoren und daraus folgt die Gleichung (27).

3.3 Irreduzible Darstellungen von SO(3)

Bisher haben wir uns dreidimensionale Drehungen im dreidimensionalen Raum betrachtet. Dies lässt sich auch um dreidimensionale Drehungen in Hilberträumen erwarten, da die SO(3)-Gruppe allgemein dreidimensionale Drehungen beschreibt. Ein Standardproblem ist es irreduzible Darstellungen zu finden, die auch die Kommutatorrelationen (27) erfüllen. Wir haben bisher die Beziehung des Generators von der SO(2)-Gruppe zum Drehimpulsoperator $\hat{J}_z$ gezeigt. Dies lässt sich in der SO(3)-Gruppe zu $\vec{J}$=$\hbar\vec{X}$ verallgemeinern. Für die irreduziblen Darstellungen definiert man sich die Leiteroperatoren J_+ und J_-:

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$$

und entsprechend

$$X_\pm = X_1 \pm iX_2$$

Mit diesen lassen sich die Matrixelemente der Generatoren X_i bestimmen. Im Folgenden werden auf Herleitungen verzichtet.

$$\begin{aligned}\langle jm'|X_3|jm\rangle &= m\delta_{m',m}\\ \langle jm'|X_+|jm\rangle &= [(j-m)(j+m+1)]^{1/2}\delta_{m',m+1}\\ \langle jm'|X_-|jm\rangle &= [(j+m)(j-m+1)]^{1/2}\delta_{m',m-1}\end{aligned} \tag{29}$$

$|jm\rangle$ ist dabei ein Eigenzustand von J_3 und $\hat{J}^2$ bzw. von X_3 und $\hat{X}^2$. Der Eigenwert m von X_3 nimmt dabei ganzzahlige Werte von $-j, ..., +j$ an. Also nimmt m insgesamt $2j+1$ Werte an. Aus dieser lässt sich wieder eine irreduzible Darstellung konstruieren mit den Eigenwerten in der Hauptdiagonalen.

3.4 Charaktere

Mithilfe der irreduziblen Darstellungen der Generatoren lassen sich ganz einfach die Charaktere der Drehmatrizen im Hilbertraum bestimmen. Wie zuvor besprochen hat X_3 folgende Gestalt.

$$X_3 = \mathrm{diag}(j, j-1, ..., -j+1, -j)$$

Nach einer Exponenzierung (14) folgt

$$R_3(\varphi) = e^{-iX_3\varphi} = \mathrm{diag}(e^{-ij\varphi}\ ,\ e^{-i(j-1)\varphi}\ ,...,\ e^{i(j-1)\varphi}\ ,\ e^{ij\varphi})$$

mit der Spur

$$\chi^{(j)}(\varphi) = e^{-ij\varphi} + e^{-i(j-1)\varphi} + ... + e^{i(j-1)\varphi} + e^{ij\varphi}$$

Da dies geometrische Reihen sind lässt sich dies auch ausdrücken als:

$$\chi^{(j)}(\varphi) = e^{-ij\varphi}\frac{1-e^{i(2j+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$$

Wenn man die Relation $e^{-ij\varphi} = e^{-i(j+1/2)\varphi}/e^{-i\varphi/2}$ benutzt folgt weiterhin:

$$\chi^{(j)}(\varphi) = \frac{e^{-i(j+1/2)\varphi} - e^{i(j+1/2)\varphi}}{e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}}$$

und damit schließlich:

$$\chi^{(j)}(\varphi) = \frac{\sin((j+\frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} \tag{30}$$

Dieser Charakter gilt auch für alle anderen Drehachsen, da sich innerhalb einer Konjugationsklasse der Charakter nicht ändert. Für ganzzahligen Spin lässt sich die Formel vereinfachen zu:

$$\chi^{(l)}(\varphi) = 1 + 2\sum_{m=1}^{l}\cos(m\varphi) \tag{31}$$

und für halbzahligen Spin, $j = s = n + \frac{1}{2}$

$$\chi^{(s)}(\varphi) = 2\sum_{m=0}^{n}\cos((m+\frac{1}{2})\varphi) \tag{32}$$

3.5 Orthogonalität

Wie bei der SO(2)-Gruppe möchte man im Skalarprodukt die Summe mit einem Integral ersetzen. Dabei muss zum einen gelten:

$$\int d\mu(\varphi) = 1$$

damit es den "Mittelwert der Gruppe $1/[g]\sum_g$ ersetzt. Und außerdem muss gelten:

$$\int d\mu(\varphi)... = \int d\mu(\varphi')...$$

damit das Skalarprodukt unter Rotationen erhalten bleibt. Unter dieser Betrachtung ergibt sich für das Integral:

$$\tfrac{1}{[g]}\sum_g \to \int_0^{2\pi} \tfrac{d\varphi}{2\pi}(1-\cos(\varphi))$$

Um dies zu überprüfen berechnen wir das Skalarprodukt von zwei Charakteren $\chi^{(j)}$ und $\chi^{(j')}$ wobei j und j' halbzahlig oder ganzzahlig sein können. Mithilfe von trigonometrischen Formeln folgt:

$$\begin{aligned}\langle\chi^{(j)},\chi^{(j')}\rangle &= \int \frac{d\varphi}{2\pi} 2\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)\frac{\sin((j+\frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)}\frac{\sin((j'+\frac{1}{2})\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} \\ &= \int \frac{d\varphi}{2\pi}[\cos((j-j')\varphi) - \cos((j+j'+1)\varphi)] \\ &= \delta_{jj'} \end{aligned} \tag{33}$$

Dies zeigt die Richtigkeit des eingeführten Skalarproduktes.

3.6 Clebsch-Gordan-Reihe

Die Glebsch-Gordan-Reihe erlaubt es direkte Produkte von irreduziblen Darstellung in eine Summe von irreduziblen Darstellungen umzuschreiben. Dies ist vergleichbar mit dem Problem von Addition zweier Drehimpulse j_1 und j_2. Bekannt ist, dass dabei alle Drehimpulse zwischen $|j_1-j_2|$ und j_1+j_2 vorkommen. Als Clebsch-Gordan-Reihe also aufgeschrieben als.

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \bigoplus \sum_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)} \tag{34}$$

Dies lässt sich ebenso mithilfe der Charaktere bestimmen. o.B.d.A kann man $j_1 \geq j_2$ setzen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\chi^{(j_1)}(\varphi)\chi^{(j_2)}(\varphi) &= \frac{e^{i(j_1+1/2)\varphi} - e^{-i(j_1+1/2)\varphi}}{2i\ \sin(\frac{1}{2}\varphi)} \sum_{m=-j_2}^{j_2} e^{im\varphi} \\ &= \frac{1}{2i\ \sin(\frac{1}{2}\varphi)} \sum_{m=-j_2}^{j_2} (e^{i(j_1+m+1/2)\varphi} - e^{-i(j_1-m+1/2)\varphi})\end{aligned}$$

Da m über einen symmetrischen Wertebereich aufsummiert wird, kann man m mit -m ersetzen und definiert man sich zudem $j := j_1 + m$ folgt:

$$\begin{aligned}\chi^{(j_1)}(\varphi)\chi^{(j_2)}(\varphi) &= \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \frac{\sin((j+1/2)\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} \\ &= \sum_{j_1-j_2}^{j_1+j_2} \chi^{(j)}(\varphi)\end{aligned} \tag{35}$$

womit die Clebsch-Gordan-Reihe gezeigt wurde.

4 Literatur

[1] H.F. Jones, *Groups, Representation and Physics*, Adam Hilger Ltd., 1990