Darstellungstheorie III

Orthogonalität von Charakteren, Charaktertafel, Zerlegung direkter Produkte

Hannes Malcha
25.11.2015

1 Orthogonalität von Charakteren

Im folgenden soll eine Orthogonalitätsrelation für Charaktere von Darstellungen aufgestellt werden. Der Charakter einer Darstellung D ist die Menge $\{\chi(g)\}$, wobei $\chi(g)$ die Spur der Matrix $D(g)$ ist. Die Spur hat folgende bekannte Eigenschaften:

1. $\mathrm{Tr}(D'(g)) = \mathrm{Tr}(D(g)), \quad falls \quad D'(g) = SD(g)S^{-1}$
2. $\mathrm{Tr}(D(g')) = \mathrm{Tr}(D(g)), \quad falls \quad D(g') = D(hgh^{-1}) = D(h)D(g)(D(h))^{-1}$
3. $\chi(g^{-1}) = \mathrm{Tr}((D(g))^{-1}) = \mathrm{Tr}(D(g))^{\dagger} = \chi^*(g), \quad falls\ D\ unitär$

Letztere Eigenschaft ist immer wahr für endliche oder kompakte Gruppen, denn wir haben gesehen, dass jede ihrer Darstellungen äquivalent ist zu einer unitären Darstellung. Nun erinnern wir noch kurz an das Orthogonalitätstheorem

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)^*}(g) = \frac{[g]}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}. \tag{1.1}$$

Wir bilden die Spur über i, r und j, s

$$\sum_g \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \sum_{i,j} \frac{[g]}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{ij}. \tag{1.2}$$

Dabei haben wir 3. verwendet. Des weiteren ist $\sum_{i,j} \delta_{ij}\delta_{ij} = \sum_i \delta_{ii} = n_\mu$. Wir erhalten

$$\frac{1}{[g]} \sum_g \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \delta^{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

Die linke Seite der Gleichung kann als ein $[g]$-dimensionales Skalarprodukt der beiden Vektoren $\left(\chi^\mu(g_1), \chi^\mu(g_2), \dots, \chi^\mu(g_{[g]})\right)$ und $\left(\chi^\nu(g_1), \chi^\nu(g_2), \dots, \chi^\nu(g_{[g]})\right)$ aufgefasst werden. Wir definieren dann allgemein für zwei Charaktere ϕ und χ

$$\langle \phi, \chi \rangle \coloneqq \frac{1}{[g]} \sum_g \phi(g) \chi(g^{-1}) = \langle \chi, \phi \rangle\ . \tag{1.4}$$

Wegen Gl. (1.3) ist das Skalarprodukt der Charaktere verschiedener irreduzibler Darstellungen orthonormal

$$\left\langle \chi^{(\mu)}, \chi^{(\nu)} \right\rangle = \delta^{\mu\nu}. \tag{1.5}$$

Alle Elemente einer Konjugationsklasse haben wegen 2. den selben Charakter, so dass wir für k verschiedene Konjugationsklassen K_i die Charaktere mit einem Index $i = 1, \dots, k$

unterscheiden können. Ferner sei k_i die Anzahl der verschiedenen Elemente einer Konjugationsklasse K_i. Dann können wir die Summe über g aus Gl. (1.3) als Summe über i schreiben

$$\frac{1}{[g]} \sum_i k_i \, \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)^*} = \delta^{\mu\nu}. \tag{1.6}$$

Diesen Ausdruck können wir nun als Orthogonalität der Vektoren $k_i^{1/2} \chi_i^{(\mu)}$ verstehen. Natürlich kann es nicht mehr als k solcher linear unabhängigen Vektoren geben. Daher ist die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Darstellungen beschränkt durch die Anzahl der Konjugationsklassen $r \leq k$. Des Weiteren kann man zeigen, dass die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Darstellungen mindestens so groß sein muss wie die Anzahl der Konjugationsklassen[1]

$$\frac{1}{[g]} \sum_\mu k_i \, \chi_i^{(\mu)} \chi_j^{(\mu)^*} = \delta_{ij}. \tag{1.7}$$

Daraus folgt dann aber $r = k$.

1.1 Zerlegung reduzibler Darstellungen

Nach Maschkes Theorem ist jede reduzible Darstellung einer endlichen oder kompakten Gruppe vollständig reduzibel, wobei in einer solchen Zerlegung jede irreduzible Darstellung öfter auftreten darf. Allgemein schreibt man die Zerlegung als

$$D = \bigoplus_\nu a_\nu D^{(\nu)}, \tag{1.8}$$

wobei $a_\nu \in \mathbb{N}$. Durch bilden der Spur von Gl. (1.8) erhalten wir

$$\chi(g) = \sum_\nu a_\nu \chi^{(\nu)}(g). \tag{1.9}$$

Am einfachsten bestimmt man die Koeffizienten mit dem eben eingeführten Skalarprodukt

$$a_\nu = \left\langle \chi^{(\nu)}, \chi \right\rangle. \tag{1.10}$$

Dabei ist χ der Charakter einer Komposition D (Kompositionscharakter) und $\chi^{(\nu)}$ der Charakter einer Zerlegung $D^{(\nu)}$ (einfacher Charakter).

1.2 Die reguläre Darstellung

Wir erinnern uns an Cayley's Theorem, dass jede (endliche) Gruppe isomorph ist zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe $S_{[g]}$, gegeben durch Linksmultiplikation. Wir können daher folgende Gleichung schreiben

$$g g_i = \sum_j D^R_{ji}(g) g_j. \tag{1.11}$$

[1] Auch [Jon98] verzichtet hier auf einen Beweis, da dieser den Begriff einer *Algebra* erfordert.

Dabei bilden die $[g] \times [g]$ Matrizen $D^R_{ji}(g)$ eine $[g]$-dimensionale Darstellung der Gruppe, die sog. reguläre Darstellung. Die Matrix $D^R_{ji}(g)$ hat in jeder Zeile und Spalte wegen der Eindeutigkeit der Multiplikation von Gruppenelementen nur einen von Null verschiedenen Eintrag. Man beachte, dass die reguläre Darstellung nur auf die Elemente ihrer Gruppe wirkt. Es ist daher möglich ohne Kenntnis konkreter Eigenschaften der Gruppe die reguläre Darstellung zu konstruieren. Man rechnet schnell nach, dass die reguläre Darstellung tatsächlich eine Darstellung ist

$$\begin{aligned}
&\sum_j D^R_{ji}(g_1 g_2) g_j = (g_1 g_2) g_i = g_1 (g_2 g_i) \\
&= g_1 \left(\sum_j D^R_{ji}(g_2) g_j \right) = \sum_j D^R_{ji}(g_2) \sum_k D^R_{kj}(g_1) g_k \\
&= \sum_k \left(\sum_j D^R_{kj}(g_1) D^R_{ji}(g_2) \right) g_k \\
\Rightarrow\ & D^R(g_1 g_2) = D^R(g_1) D^R(g_2)\,.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Wir betrachten nun als Beispiel die Gruppe C_3. Dann sehen die drei darstellenden Matrizen der regulären Darstellung wie folgt aus

$$D^R(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^R(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D^R(c^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Wir zerlegen die reguläre Darstellung nun nach Gl. (1.8). Die Koeffizienten bestimmten wir über den Charakter, dieser ist aber für die reguläre Darstellung trivial

$$\chi(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ [g] & g = e \end{cases}. \tag{1.14}$$

Also

$$a_\mu = \chi^{(\mu)}(e) = n_\mu. \tag{1.15}$$

Dann setzten wir a_μ in Gl. (1.9) ein und ferner $g = e$ dann folgt

$$[g] = \sum_\nu n_\nu \cdot n_\nu = \sum_\nu n_\nu^2. \tag{1.16}$$

Wir sehen also, dass die zuvor noch als Ungleichung eingeführte Relation in der Tat eine Gleichung ist. Für $g \neq e$ folgt

$$0 = \sum_\nu n_\nu \chi^{(\nu)}(g). \tag{1.17}$$

Zusammen liefert uns das den Spezialfall von Gl. (1.7), wenn K_1 nur ein Element e enthält

$$\frac{1}{[g]} \sum_\nu \chi^{(\nu)}(e) \chi^{(\nu)}(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ 1 & g = e \end{cases}. \tag{1.18}$$

2 Die Charaktertafel

Wir entwickeln nun das Konzept der Charaktertafel, einer quadratischen Tabelle in der in den Spalten die verschiedenen irreduziblen Darstellungen und in den Reihen die Konjugationsklassen aufgetragen sind. Diese wird es uns erlauben die Charaktere irreduzibler Darstellungen endlicher Gruppen zu bestimmen. Dazu verwenden wir folgende drei Regeln:

1. Anzahl der irreduziblen Darstellungen = Anzahl der Konjugationsklassen ($r = k$)
2. $\sum_\mu n_\mu^2 = [g]$
3. Orthogonalität: $\sum_i k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)^*} = [g]$
4. Alle weiteren Informationen über die Gruppe

Ein Beispiel für den 4. Punkt ist, dass für den 1-dimensionalen Fall die Darstellung gleich ihrer Spur ist. Entsprechend bleiben auch die Eigenschaften der Verknüpfung von Gruppenelementen erhalten. Bei abelschen Gruppen sind außerdem alle irreduziblen Darstellungen 1-dimensional. Das folgt direkt aus Schur's erstem Lemma, denn die Kommutatoren sind alle trivial Null. Wir betrachten nun zwei Beispiele zur Veranschaulichung.

2.1 Charaktertafel von $\mathbf{C_3}$

Die Grundstruktur der Charaktertafel für C_3 ist nach 1. klar, denn wir haben bereits alle drei Konjugationsklassen von C_3 bestimmt.

C_3	e	c	c^2
$D^{(1)}$			
$D^{(2)}$			
$D^{(3)}$			

Wir benutzen 2.

$$\sum_{\mu=1}^{3} n_\mu^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad n_\mu = 1. \tag{2.1}$$

Alle Darstellungen sind also eindimensional. Daraus folgt, wie oben erklärt, dass für die Konjugationsklassen die selben Rechenregeln gelten wie für die Elemente von C_3

$$\begin{aligned} &\chi(c^2) = (\chi(c))^2, \\ &(\chi(c))^3 = \chi(c^3) = \chi(e) = 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Daraus folgt dann sofort, dass $\chi(c) = \sqrt[3]{1}$. Also sind die drei Charaktere von C_3: 1, $\omega := e^{2\pi i/3}$ und $\omega^2 = \omega^* = e^{4\pi i/3}$. Die erste Spalte in der Charaktertafel gibt jeweils die Dimension der Darstellung $D^{(i)}$ an, denn $\chi^{(\mu)}(e) = n_\mu$. Wir füllen mit diesen Informationen die Charaktertafel aus.

C_3	e	c	c^2
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	ω	ω^2
$D^{(3)}$	1	ω^2	ω

Mit 3. können wir die Richtigkeit der Tabelle prüfen. Dazu berechnen wir alle möglichen Skalarprodukte zwischen den einzelnen Zeilen

$$\begin{aligned}\left\langle\chi^{(\mu)},\chi^{(\nu)}\right\rangle &= \delta^{\mu\nu}\\ \left\langle\chi^{(1)},\chi^{(1)}\right\rangle &= \frac{1}{3}(1+1+1)=1\\ \left\langle\chi^{(1)},\chi^{(2)}\right\rangle &= \frac{1}{3}(1+\omega^2+\omega)=0\\ \left\langle\chi^{(1)},\chi^{(3)}\right\rangle &= \frac{1}{3}(1+\omega+\omega^2)=0.\\ &\vdots\end{aligned} \tag{2.3}$$

Diese Bedingung ist also trivial erfüllt.
Aus der Charaktertafel kann man z.B. ganz einfach den Kern einer Darstellung bestimmen. Wir wissen

$$\ker D^{(i)} = \{g \mid D^{(i)}(g) = e\}. \tag{2.4}$$

Also

$$\ker D^{(1)} = C_3, \quad \ker D^{(2)} = \ker D^{(3)} = e. \tag{2.5}$$

Außerdem kann man mit der Charaktertafel die Zerlegung einer Gruppe bestimmen. Die Koeffizienten berechnen wir mit Gl. (1.10). Dafür brauchen wir noch eine Darstellung von C_3, z.B.

$$\begin{aligned}D^V(e) &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\\ D^V(c) &= \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0\\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix},\\ D^V(c^2) &= \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & 0\\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Das V im Exponenten steht dabei für Vektordarstellung, also die Darstellung, die im Gegensatz zur regulären Darstellung nicht im Raum der Gruppenelemente sondern im $\mathbb{R}^3$ lebt. Es folgt

$$\chi^V = \left(\chi^V(e),\chi^V(c),\chi^V(c^2)\right) = (3,0,0)\,. \tag{2.7}$$

Wir finden dann

$$a_\nu = \left\langle\chi^V,\chi^{(\nu)}\right\rangle = \frac{1}{3}\left(3\chi^{(\nu)}(e)\right) = 1 \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow D^V = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(1)}. \tag{2.9}$$

2.2 Charaktertafel von $\mathbf{D_3}$

Die Konjugationsklassen von D_3 sind $(e), (c, c^2)$ und (b, bc, bc^2). Wir haben also wieder eine 3×3 Tabelle. 2. liefert

$$\begin{aligned} & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6 \\ \Rightarrow \quad & n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = 2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Für $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ gilt dann $\chi(bc) = \chi(b)\chi(c)$ und $\chi(b) = \chi(bc) = \chi_3$, also $\chi(c) = \chi_2 = 1$. Außerdem ist $\chi(b)^2 = \chi(b^2) = \chi(e) = 1$. Daraus folgt $\chi_3 = \pm 1$. Wir setzen dann einfach $D^{(1)}$ wieder gleich der trivialen Abbildung. Dann ist alles was wir noch nicht wissen $\chi_2^{(3)} = \alpha$ und $\chi_3^{(3)} = \beta$.

D_3	(e)	(c, c^2)	(b, bc, bc^2)
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1
$D^{(3)}$	2	α	β

Wir benutzen nun 3., um α und β zu bestimmen

$$\begin{aligned} & \left\langle \chi^{(3)}, \chi^{(1)} \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 3 \cdot \beta \cdot 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 + 2\alpha + 3\beta = 0 \\ & \left\langle \chi^{(3)}, \chi^{(2)} \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 3 \cdot \beta \cdot (-1)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 + 2\alpha - 3\beta = 0 \\ \\ \Rightarrow \quad & \alpha = -1,\ \beta = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Mit 3. prüft man dann außerdem noch die Orthonormalität aller Zeilen. Aus der Charaktertafel kann dann wieder die Zerlegung von D^V bestimmt werden. Dafür brauchen wir aber noch $\chi^V = \left(\chi^V(e), \chi^V(c), \chi^V(b)\right)$.
$\chi(e)$ und $\chi(c)$ haben wir schon für C_3, einer Untergruppe von D_3, bestimmt, also fehlt uns nur noch $\chi(b)$. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit wählen wir für b die Spiegelung an der x-Achse, dann sieht eine mögliche Darstellung so aus

$$D^V(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi^V(b) = -1. \tag{2.12}$$

Dann ist $\chi^V = (3, 0, -1)$. Damit bestimmen wir die Koeffizienten der Zerlegung

$$\begin{aligned} a_1 &= \left\langle \chi^{(1)}, \chi^V \right\rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0 \\ a_2 &= \left\langle \chi^{(2)}, \chi^V \right\rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 1 \\ a_3 &= \left\langle \chi^{(3)}, \chi^V \right\rangle = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot (-1)) = 1\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Insgesamt ergibt sich so

$$D^V = D^{(2)} \oplus D^{(3)}. \tag{2.14}$$

Eine Zerlegung der 6-dimensionalen regulären Darstellung von D_3 ließe sich ebenso schnell bestimmen und wäre dann

$$D^R = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus 2D^{(3)}. \tag{2.15}$$

3 Zerlegung direkter Produkte

Wir betrachten ein System aus zwei Teilchen, z.B. zwei Elektronen, mit den Ortswellenfunktionen $\psi_a(\mathbf{x}), \varphi_c(\mathbf{x})$, die sich durch die zwei irreduziblen Darstellungen $D^{(\mu)}, D^{(\nu)}$ einer Symmetriegruppe G folgendermaßen transformieren

$$\begin{aligned} \psi_a(\mathbf{x}) &= D^{(\mu)}_{ba}(g)\psi_b(\mathbf{x}) \\ \varphi_c(\mathbf{x}) &= D^{(\nu)}_{dc}(g)\varphi_d(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die Produktwellenfunktion $\psi_{ac}(\mathbf{x}) \coloneqq \psi_a(\mathbf{x}) \otimes \varphi_c(\mathbf{x})$ transformiert entsprechend gemäß

$$\psi_{ac}(\mathbf{x}) = \left(D^{(\mu)}_{ba}(g) \otimes D^{(\nu)}_{dc}(g)\right)\psi_{bd}(\mathbf{x}). \tag{3.2}$$

Wir können das Produkt aus zwei Matrizen in Gl. (3.2) als eine einzelne Matrix auffassen, dessen erster Index das Paar $(bd) \coloneqq B$ und dessen zweiter Index das Paar $(ac) \coloneqq A$ ist.

$$D^{(\mu\times\nu)}_{BA}(g) = D^{(\mu\times\nu)}_{bd;ac}(g) \coloneqq D^{(\mu)}_{ba}(g) \otimes D^{(\nu)}_{dc}(g). \tag{3.3}$$

So dass Gl. (3.2) dann zu

$$\psi_A(\mathbf{x}) = D^{(\mu\times\nu)}_{BA}(g)\psi_B(\mathbf{x}) \tag{3.4}$$

wird. Wir rechnen nach, dass $D^{(\mu\times\nu)}(g)$ tatsächlich eine Darstellung ist

$$\begin{aligned} D^{(\mu\times\nu)}(g_1g_2) &= D^{(\mu)}(g_1g_2) \otimes D^{(\nu)}(g_1g_2) \\ &= \left(D^{(\mu)}(g_1)D^{(\mu)}(g_2)\right) \otimes \left(D^{(\nu)}(g_1)D^{(\nu)}(g_2)\right) \\ &= \left(D^{(\mu)}(g_1) \otimes D^{(\nu)}(g_1)\right)\left(D^{(\mu)}(g_2) \otimes D^{(\nu)}(g_2)\right) \\ &= D^{(\mu\times\nu)}(g_1)D^{(\mu\times\nu)}(g_2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wenn wir in erster Näherung jegliche Wechselwirkung zwischen den zwei Teilchen vernachlässigen, dann haben wir eine Symmetrie der Form $G \times G$. Das heißt das System ist invariant unter unabhängigen Rotationen g_1, g_2 der zwei Teilchen. Die zugehörige Matrix, die diese Eigenschaft erfüllt ist

$$D^{(\mu\times\nu)}_{BA}((g_1, g_2)) = D^{(\mu\times\nu)}_{bd;ac}((g_1, g_2)) \coloneqq D^{(\mu)}_{ba}(g_1) \otimes D^{(\nu)}_{dc}(g_2). \tag{3.6}$$

Es ist klar, dass $D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)}$ eine irreduzible Darstellung der Produktgruppe $G \times G$ ist, falls $D^{(\mu)}$ und $D^{(\nu)}$ irreduzibel sind. Wäre das nicht der Fall, so würde das bedeuten es gäbe einen nicht trivialen Unterraum $\forall g_1, g_2 \in G$. Wenn wir nun o.B.d.A. $g_2 = e$ setzen, so müsste es ein Submodul für den Vektorraum von $D^{(\mu)}$ geben, dieses existiert aber nach

Voraussetzung nicht.
Wir nehmen nun an die selbe Rotation würde auf beide Teilchen gleichzeitig wirken, also $g_1 = g_2 = g$. Dann ist die Produktdarstellung im Allgemeinen reduzibel für beliebige Darstellungen. Die Zerlegung von $D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)}$ in eine Summe irreduzibler Darstellungen

$$D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)} = \bigoplus_{\sigma} a_\sigma D^{(\sigma)} \tag{3.7}$$

nennt man *Clebsch-Gordan* Reihe. Diese ist sehr wichtig für die physikalische Anwendung der Darstellungstheorie, z.B. bei der Kopplung von Drehimpulsen. Wir bestimmen noch die a_σ, dazu brauchen wir aber noch die Spur von $D^{(\mu\times\nu)}(g)$

$$\begin{aligned}\chi^{(\mu\times\nu)}(g) &= \sum_a \left(\sum_c D^{(\mu)}_{aa}(g) D^{(\nu)}_{cc}(g)\right) \\ &= \left(\sum_a D^{(\mu)}_{aa}(g)\right)\left(\sum_c D^{(\nu)}_{cc}(g)\right) \\ &= \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Also

$$a_\sigma = \left\langle \chi^{(\sigma)}, \chi^{(\mu\times\nu)} \right\rangle = \left\langle \chi^{(\sigma)}, \chi^{(\mu)}\chi^{(\nu)} \right\rangle . \tag{3.9}$$

Zum Schluss noch ein Beispiel.

3.1 Beispiel: $\mathbf{D^{(3)} \bigotimes D^{(3)}}$ in $\mathbf{D_3}$

Aus der Charaktertafel von D_3 sehen wir, dass der Charakter von $D^{(3)}$ $(2, -1, 0)$ ist. Der von $D^{(3)} \otimes D^{(3)}$ ist daher $(4, 1, 0)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{6}(1\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 0) = 1 \\ a_2 &= \frac{1}{6}(1\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot (-1)\cdot 0) = 1 \\ a_3 &= \frac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot (-1)\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 0) = 1 ,\end{aligned} \tag{3.10}$$

d.h.

$$\chi^{D^{(3)}\otimes D^{(3)}} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3. \tag{3.11}$$

Also zerfällt die Produktdarstellung $D^{(3)} \otimes D^{(3)}$ in

$$D^{(3)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)}. \tag{3.12}$$

Das hätte man aber auch ganz einfach aus der Charaktertafel ablesen können.

Literatur

[Jon98] Jones, H F. (1998). *Groups, Represenetations and Physics* (Second Edition). New York [u.a.]: IOP.