Darstellungstheorie II - Reduzibilität, Maschkes Theorem, Schurs Lemma, Orthogonalität

Tom Weber

18.11.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Reduzibilität

1.1 G-Modul

Wiederholung Definition

Sei G ein Gruppe. Ein *G-Modul* ist eine abel'sche Gruppe $(M,+)$ mit der Bedingung, dass die Abbildung $G \times M \to M,\ (g,m) \mapsto g \cdot m$ homomorph ist. Ein Vektorraum V ist insbesondere eine abel'sche Gruppe bezüglich der Addition und somit ein G-Modul, wenn die Abbildung

$$(G \times V) \to V,\ (g,u) \mapsto T(g)u$$

homomorph ist, wobei $T(g)$ eine Darstellung von G ist.

Reduzibilität und G-Modul

Eine Darstellung heißt reduzibel, wenn es ein *Submodul* gibt, also einen Untervektorraum $U \subset V$, welcher geschlossen ist unter den Operationen der Gruppe bzw. ihrer Darstellung:

$$u \in U \subset V \Rightarrow T(g)u \in U$$

Sei nun $\{e_i\},\ i = 1, ..., m$ eine Basis von U. Wir können diese durch Basisvektoren $\{e_i\},\ i = m+1, ..., m+n$ zu einer Basis von V erweitern, wobei diese Vektoren einen Unterraum W mit Dimension n aufspannen. Bezüglich dieser Basis ist die darstellende Matrix $D(g)$ zu einer linearen Transformation T gegeben durch

$$T(g)e_j = D_{ij}(g)e_i$$

Da U ein Submodul und damit geschlossen ist, haben die Basisvektoren aus U keine Komponenten in W. Die darstellende Matrix hat also die Einträge $D_{ij} = 0$, wenn sowohl $j = 1, ..., m$ und $i = m+1, ..., m+n$ gilt. Damit ergibt sich, was wir über die Matrix $D(g)$ bereits wussten:

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

Wir werden später sehen, dass $C(g)$ für endliche Gruppen null sein muss.

1.2 Orthonormalbasen

Definitionen

1. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Einheitsvektor*, wenn $\|v\| = 1$.

2. Eine Basis $\{e_i\}$ von V aus Einheitsvektoren heißt *Orthonormalbasis*, wenn $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Bemerkung

Die Matrixelemente D_{ij} einer linearen Transformation T, definiert durch die Gleichung $Te_j = D_{ij}e_i$ (siehe Vortrag "*Darstellungstheorie I*"), sind gegeben durch

$$D_{ij} = \langle e_i, Te_j \rangle$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \langle u, Tv \rangle &= u_i^* D_{ij} v_j \qquad bzw. \\ \langle u, Tv \rangle &= u^\dagger D v \end{aligned}$$

wobei $u^\dagger = (u^*)^T$

1.3 Vollständige Reduzibilität

Zunächst wollen wir nun noch einmal zum Submodul und zur Reduzibilität zurückkommen. Wir können die Basis unserer Unterräume $U \subset V,\ W \subset V$ orthonormal wählen. Dadurch würde jeder Vektor $w \in W$ orthogonal zu jedem $u \in U$ liegen. Insbesondere ist W damit das *orthogonale Komplement* von U, es gilt also:

$$W = \{ w \in V \mid \langle w, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U \}$$

Wenn nun nicht nur U geschlossen ist unter Gruppenoperationen, sondern auch W, so ist $T(g)$ vollständig reduzibel.

Bemerkungen

1. Wenn $T(g)$ bezüglich des gewählten Skalarprodukts unitär ist für alle $g \in G$, so ist die Darstellung reduzibel, denn $\langle T(g)w, u \rangle = \langle w, T^{-1}(g)u \rangle$. Weiterhin ist $T^{-1}(g) = T(g^{-1})$ und U unter Gruppenoperationen geschlossen, sodass mit $T(g^{-1})u = u' \in U$ gilt:

   $$\begin{aligned} \langle T(g)w, u \rangle = \langle w, u' \rangle = 0 \\ \Rightarrow T(g)w = w' \in W \end{aligned}$$

   Für unitäre $T(g)$ ist als auch W geschlossen und damit $T(g)$ eine vollständig reduzible Darstellung. Wir stellen weiterhin fest, dass damit $D_{ij}(g) = 0$ für $j = m+1, ..., m+n$ und gleichzeitig $i = 1, ..., m$. Also ist die Matrix $C(g) = 0$.

2 Maschkes Theorem

Maschkes Theorem. *Alle reduziblen Darstellungen von endlichen Gruppen sind vollständig reduzibel.*

Beweis. Für reduzible unitäre Darstellungen haben wir bereits gesehen, dass sie vollständig reduzibel sind. Wir wollen nun zeigen, dass wir für jede endliche Gruppe ein Skalarprodukt finden können, bezüglich dessen die Darstellung unitär ist. Dieses Skalarprodukt werden wir im Folgenden mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ bezeichnen. Wir definieren es wie folgt:

$$\langle v, v' \rangle_G := \frac{1}{[g]} \sum_{g \in G} \langle T(g)v, T(g)v' \rangle$$

mit $v, v' \in V$. Sei nun $h \in G$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle T(h)v, T(h)v' \rangle_G &= \frac{1}{[g]} \sum_{g} \langle T(g)T(h)v, T(g)T(h)v' \rangle \\ &= \frac{1}{[g]} \sum_{g} \langle T(gh)v, T(gh)v' \rangle \end{aligned}$$

Da $gh \in G$, schreibe $gh = g'$. Da die Summen $\sum\limits_{g}$ und $\sum\limits_{g'}$ gleich sind, gilt:

$$\begin{aligned} \langle T(h), v, T(h)v' \rangle_G &= \frac{1}{[g]} \sum_{g'} \langle T(g')v, T(g')v' \rangle \\ &= \langle v, v' \rangle_G \end{aligned}$$

□

Bemerkungen

1. Wenn wir wieder Martizen betrachten, so können wir $T(h)$ darstellen durch eine unitäre Matrix $D'(h)$. Dazu wählen wir eine Orthogonalbasis $\{f_i\}$ bezüglich unseres definierten invarianten Skalarprodukts (Gram-Schmidt). Die ersten m Basisvektoren sollen dabei U aufspannen. Es gilt nun: $D'(h) = SD(h)S^{-1}$, wobei S den Basiswechsel zwischen $\{f_i\}$ und $\{e_i\}$ beschriebt. D ist also äquivalent zu einer vollständig reduziblen Darstellung D'.

2. Das Theorem gilt ebenso für unendliche, aber kompakte Gruppen.

3 Schurs Lemma

Wir werden im Folgenden sowohl mit Matrizen als auch mit linearen Operatoren im Allgemeinen arbeiten. In der Notation unterscheiden sich diese wie folgt:

- Matrizen: B
- Lineare Operatoren: $\hat{B}$

Schurs erstes Lemma. *Eine Matrix B, die mit allen Matrizen $D(g)$ einer irreduziblen Darstellung kommutiert, muss ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein:*

$$(BD(g) = D(g)B \quad \forall g \in G) \Rightarrow B = \lambda \mathbb{1}$$

Alternativ:

$$\boxed{(\hat{B}T(g) = T(g)\hat{B} \quad \forall g \in G) \Rightarrow \hat{B} = \lambda \mathbb{E}}$$

Beweis. Wir werden das Lemma in der zweiten Form beweisen, da Matrizen eine Teilmenge der linearen Operatoren sind.
Sei b ein Eigenvektor von $\hat{B}$ mit Eigenwert λ:

$$\hat{B}b = \lambda b$$

Dann gilt aufgrund der vorausgesetzten Kommutativität:

$$\hat{B}(T(g)b) = T(g)\hat{B}b = T(g)\lambda b = \lambda T(g)b$$

Mit b ist also auch immer $T(g)b$ ein Eigenvektor von $\hat{B}$ und hat insbesondere denselben Eigenwert. Die Eigenvektoren b spannen nun einen Unterraum von U auf, welcher geschlossen ist unter den Operationen $T(g)$ der Gruppe, also ist der Unterraum ein G-Modul. Da wir aber irreduzible Darstellungen gefordert haben, existiert kein Submodul außer (a) U selbst und (b) dem Raum aus dem Nullvektor. Mit letzterem Fall müssen wir uns nicht beschäftigen, da er unmöglich ist, denn eine lineare Abbildung hat immer mindestens einen nicht-trivialen Eigenvektor (außer der Nullabbildung, die wir aber nicht betrachten). Kommen wir also zum Fall (a): Wenn der Raum der Eigenvektoren der ganze Raum U ist, so gilt für alle $u \in U$: $\hat{B}u = \lambda u$. Damit gilt $\hat{B} = \lambda \mathbb{E}$. $\square$

Schurs zweites Lemma. *Für zwei inäquivalente irreduzible Darstellungen D,D' gilt:*

$$(BD(g) = D'(g)B \quad \forall g \in G) \Rightarrow B = \hat{O}$$

bzw. für lineare Operatoren:

$$\boxed{\left(\hat{B}T(g) = T'(g)\hat{B} \quad \forall g \in G\right) \Rightarrow \hat{B} = \hat{O}}$$

wobei $\hat{O}$ der Nulloperator bezüglich U' ist.

Beweis. Wir müssen beim Beweis von Schurs zweitem Lemma verschiede Fälle von Dimensionen betrachten. Seien $n := \dim U$ und $n' := \dim U'$.

Fall $n < n'$: Wenden wir $T'(g)\hat{B}$ auf einen beliebigen Vektor $u \in U$ an, dann ist nach Voraussetzung:

$$T'(g)\hat{B}u = \hat{B}T(g)u$$

Weiterhin wissen wir, dass U ein G-Modul ist, also $T(g)u \in U$. Darum muss gelten:

$$T'(g)(\hat{B}u) \in \hat{B}U$$

$\hat{B}U$ ist also ein Submodul von U'. Da wir gefordert haben, dass die Darstellungen irreduzibel sind und deshalb auch U' nicht weiter reduziert werden kann, muss nach den ersten Lemma $\hat{B}U$ entweder der ganze Raum U' oder der Nullvektor $0'$ sein. Da $\dim U < \dim U'$ ist, kann das Bild von $\hat{B}$ nicht der ganze Raum sein. Also muss das Bild von $\hat{B}$ der Nullvektor sein und somit $\hat{B} = \hat{O}$.

Fall $n > n'$: In diesem Fall müssen wir für den Beweis den Kern

$$K := \{k \in U | \hat{B}k = 0'\}$$

betrachten. Dieser Raum ist ein Submodul von U, denn

$$\hat{B}\left(T\left(g\right)k\right) = T'(g)\hat{B}k = 0'$$

Weiterhin muss aufgrund der Irreduzibilität der Darstellung auch U irreduzibel sein. Damit aber ist der Kern K entweder der ganze Raum U oder der Nullvektor. Da die Dimension unter $\hat{B}$ aber verringert wird, kann der Kern nicht trivial 0 sein. Also ist der Kern $K = U$ und damit $\hat{B} = \hat{O}$

Fall $n = n'$: Wieder muss K ein Submodul von U sein. Jetzt ist der Fall $K = 0$ ausgeschlossen, weil die Darstellungen nicht äquivalent sein sollen. Also muss wieder $K = U$ gelten und damit $\hat{B} = \hat{O}$

□

4 Das Orthogonalitätstheorem

4.1 Theorem und Beweis

Orthogonalitätstheorem. *Seien $D^{(\mu)}$ und $D^{(\nu)}$ die Matrizen zweier irreduzibler Darstellungen. Dann gilt:*

$$\boxed{\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{[g]}{n_\mu}\delta^{\mu\nu}\delta_{rs}\delta_{ij}}$$

Beweis. Seien zunächst U_ν und U_μ die G-Module zweier nicht äquivalenter, irreduzibler Darstellungen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Indizes ν und μ positiv und ganzzahlig. Sei weiterhin $\hat{A} : U_\nu \to U_\mu$ eine lineare Abbildung. Wir definieren

$$\hat{B} := \sum_g T^{(\mu)}(g)\hat{A}T^{(\nu)}(g^{-1})$$

Sei nun $h \in G$. Wir betrachten die Wirkung von $T^{(\mu)}(h)$ auf $\hat{B}$:

$$\begin{aligned} T^{(\mu)}(h)\hat{B} &= \sum_g T^{(\mu)}(h)T^{(\mu)}(g)\hat{A}T^{(\nu)}(g^{-1}) \\ &= \sum_g T^{(\mu)}(hg)\hat{A}T^{(\nu)}(g^{-1}) \end{aligned}$$

Nun sei $hg =: g'$. Damit können wir das Argument von $T^{(\nu)}$ umschreiben zu $g^{-1} = g'^{-1}h$. Dabei wechselt der Index der Summe einfach von g zu g', da über jedes Gruppenelement summiert wird:

$$\begin{aligned} T^{(\mu)}(h)\hat{B} &= \sum_{g'} T^{(\mu)}(g')\hat{A}T^{(\nu)}(g'^{-1}h) \\ &= \sum_{g'} T^{(\mu)}(g')\hat{A}T^{(\nu)}(g'^{-1})T^{(\nu)}(h) \\ T^{(\mu)}(h)\hat{B} &= \hat{B}T^{(\nu)}(h) \end{aligned}$$

Wir sehen direkt, dass $\hat{B}$ damit die Voraussetzung für Schurs zweites Lemma erfüllt und damit $\hat{B} = \hat{O}$ gilt, es sei denn, $\mu = \nu$. In dem Falle wären also die Darstellungen $T^{(\nu)}$ und $T^{(\mu)}$ gleich und die Bedingung für Schurs erstes Lemma erfüllt, also würde gelten $\hat{B} = \lambda\mathbb{E}$. In Matrixschreibweise erhalten wir also:

$$B := \sum_g D^{(\mu)}(g)\, AD^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\mu)}\delta^{\mu\nu}\mathbb{1} \tag{1}$$

Der Faktor $\lambda_A^{(\mu)}$ hängt nun noch von der Darstellung sowie der Wahl der Matrix A ab. Seien nur alle Einträge von A Null, außer $A_{rs} = 1$. Wir können diese Eigenschaft umschreiben zu $A_{lm} = \delta_{lr}\delta_{ms}$. Weiterhin benennen wir $\lambda_A^{(\mu)}$ um zu $\lambda_{rs}^{(\mu)}$. Das Matrixelement B_{ij} aus Gleichung (1) wird dann wie folgt berechnet:

$$B_{ij} = \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \tag{2}$$

Wir wollen nun noch $\lambda_{rs}^{(\mu)}$ bestimmen. Dazu setzen wir $\nu{=}\mu$ und sumieren über alle i, j:

$$\begin{aligned} \sum_{g,i} D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{si}^{(\mu)}(g^{-1}) &= \sum_g \left(D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g)\right)_{sr} \\ &= n_\mu \lambda_{rs}^{(\mu)} \end{aligned} \tag{3}$$

wobei n_μ die Dimension der Matrix $D^{(\mu)}$ ist. Da aber $D^{(\mu)}(g^{-1})D^{(\mu)}(g) = \mathbb{1}$ ist, gilt für den sr-ten Eintrag:

$$\left(D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g)\right)_{sr} = \delta_{sr} \tag{4}$$

Damit ergibt die Summe über alle Gruppenelemente $g \in G$ entweder die Anzahl der Gruppenelemente $[g]$ oder 0, je nach s und r:

$$\sum_g \left(D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g)\right)_{sr} = [g]\delta_{rs}$$

Wenn wir nun (3) und (4) vergleichen, so erhalten wir:

$$[g]\delta_{rs} = n_\mu \lambda_{rs}^{(\mu)}$$

Fügen wir unser Ergebnis in (2) ein, so kommen wir zur Aussage des Theorems:

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{[g]}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{rs} \delta_{ij}$$

$\square$

4.2 Wichtige Folgerung

Wir wollen das Orthogonalitätstheorem nun auf unitäre Darstellungen anwenden. Wie sehen zunächst:

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{[g]}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{rs} \delta_{ij}$$
$$\Leftrightarrow \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g) = \frac{[g]}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{rs} \delta_{ij} \tag{5}$$

Betrachten wir die linke Seite dieser Gleichung. Wir stellen fest, dass wir die Summe über unsere $[g]$ Gruppenelemente unter der Annahme, dass wir die Indizes i und r konstant lassen, mit einem komplexen Skalarprodukt identifizieren können zwischen den zwei Vektoren $\{D_{ir}^{(\mu)}(g_1), D_{ir}^{(\mu)}(g_2), ..., D_{ir}^{(\mu)}(g_{[g]})\}$ und $\{D_{js}^{(\nu)}(g_1), D_{js}^{(\nu)}(g_2), ..., D_{js}^{(\nu)}(g_{[g]})\}$. Da jeder Index n_μ verschiedene Werte annehmen kann, gibt es insgesamt n_μ^2 verschiedene Vektoren, die aufgrund von (5) alle orthogonal sind. Ebenso sehen wir anhand von (5), dass alle Vektoren der Darstellung $D^{(\mu)}$ orthogonal sind zu jedem Vektor einer anderen Darstellung $D^{(\mu')}$. Addieren wir die Anzahl aller möglichen orthogonalen Vektoren, so erhalten wir $\sum_\mu n_\mu^2$. In einem Raum der Dimension $[g]$ kann es aber maximal $[g]$ orthogonale (und damit linear unabhängige) Vektoren geben, sodass wir für die Dimensionen unserer Darstellungen folgende Beschränkung erhalten:

$$\boxed{\sum_\mu n_\mu^2 \leq [g]}$$

Literatur

[1] H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Adam Hilger Ltd., 1990