Das Wignersche Theorem

Karl Kortum

11 November, 2015

1 Formale Definition der Symmetrie

Definition: Symmetrie. G ist eine Symmetrie-Gruppe des quantenmechanischen Systems S genau dann, wenn die Darstellung $\hat{G}$ die Zustandsprodukte von S invariant lässt:

$G : g \in G$ transformiert $\quad S \to S' = gS$
$\hat{G} : \hat{g} \in \hat{G}$ transformiert $\quad \hat{\psi} \to \hat{\psi}' = \hat{g}\hat{\psi}$ mit $\hat{G}$ *homomorph*; d.h. $\hat{\psi} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\psi}' \cdot \hat{\varphi}'$.

Wir erinnern uns: In der Quantenmechanik liegen Zustände als 'Strahlen' vor, da alle Zustände, die sich nur um einen skalaren Faktor und/oder eine Phase unterscheiden, den gleichen physikalischen Zustand beschreiben. Die Elemente $\hat{\psi}_i$ der Gruppe $\hat{G}$ sind Zustände im Strahlenraum und die Hilbertzustände $|\psi_i\rangle$ sind Elemente von $\hat{\psi}_i$. Das Skalarprodukt zweier Strahlen ist definiert als der Betrag des Skalarproduktes zweier zu den Strahlen korrespondierender normierter Hilbertvektoren. Mathematisch ausgedrückt heißt das folgendes:

$$\hat{\psi} \cdot \hat{\varphi} = |\langle \psi_0 | \varphi_0 \rangle| \; (1)$$

2 Motivation

Um in der Quantenmechanik zu rechnen zu können müssen wir allerdings nicht die Strahlenzustände $\hat{\psi}_i$, sondern die Hilbertvektoren $|\psi_i\rangle$ transformieren. Da alle Transformationen $\{T\} : |\psi_i\rangle \to |\psi_i'\rangle$ nur der Bedingung $|\psi_i\rangle \in \hat{\psi}_i$ und $|\psi_i'\rangle \in \hat{\psi}_i'$ genügen müssen, gibt es für jede Strahlentransformation $\hat{g}$ unendlich viele kompatible Transformationen $T_{\hat{g}}$. $\{T_{\hat{g}}\}$ enthält hiermit auch unstetige und nicht-lineare Transformationen. Dies ist für das Rechnen in der Quantenmechanik erstmal sehr unpraktisch. Jedoch werden wir gleich sehen, dass die Lage nicht so schlimm ist, wie sie zunächst erscheint. Indem wir der unendlichen Menge der Transformationen $\{T_{\hat{g}}\}$ alle Anforderungen aufzwingen, die wir in eine symmetrische Transformation vorfinden möchten und unsere Freiheit in der Wahl der Transformation nutzen, können wir $\{T_{\hat{g}}\}$ immer auf ein Satz von entweder unitären oder anti-unitären Transformationen reduzieren. Dies ist Wigners Theorem.

3 Herleitung

Aus der Definition der Symmetrie folgt, dass $\hat{\psi} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\psi}' \cdot \hat{\varphi}'$ gilt. Daraus folgt sofort, dass eine Orthogonalbasis $\{|\varphi_n\rangle\} \in \hat{\varphi}$ von T auf eine Orthogonalbasis $\{|\varphi_n'\rangle\} \in \hat{\varphi}'$ abgebildet wird. Zunächst nehmen wir uns eine willkürliche Basis $\{|\tilde{\varphi}_n\rangle\}$ aus $\hat{\varphi}$.

(i) Wir wählen einen willkürlichen Vektor $\hat{\psi}$ und sein Bild $\hat{\psi}'$ und wählen von beiden Strahlen einen darstellenden Hilbertvektor $|\psi\rangle$ und $|\psi'\rangle$. Diese Stellen wir jetzt in unseren eben gewählten Basen da: $|\psi\rangle = \sum A_n |\varphi_n\rangle$; $|\psi'\rangle = \sum A_n |\tilde{\varphi}'_n\rangle$ Daraus folgt mit Gleichung (1):

$$|A_n| = \hat{\psi} \cdot \hat{\varphi_n} = \hat{\psi}' \cdot \hat{\varphi}' = |A'_n|$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit schreiben wir jetzt:

$$A_n = a_n e^{i\alpha_n} \text{ mit } a_n \geq 0;\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ (2)}$$

Dann folgt:

$$a_n = a'_n \text{ (3)}$$

(ii) Wir betrachten einen beliebigen Vektor $|\psi\rangle$ mit realen, nicht-negativen Koeffizienten.

$$|\psi\rangle = \sum a_n |\varphi_n\rangle \text{ mit } a_n \geq 0$$

Dies ist eine Darstellung des Strahls $\hat{\psi}$. Wir wählen außerdem eine beliebige Darstellung $|\psi'\rangle \in \hat{\psi}'$ und stellen diese in der Basis $\{|\tilde{\varphi}_n\rangle\}$ dar. Hier benutzen wir Gleichung (3).

$$|\psi'\rangle = \sum a_n e^{i\alpha'_n} |\tilde{\varphi}_n\rangle$$

Jetzt nutzen wir unsere Freiheit in der Wahl der Transformation aus und *definieren* T so dass:

$$T|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

Außerdem nutzen wir unsere Freiheit um die Wahl unsere Basis $\{|\tilde{\varphi}'_n\rangle\}$ zu korrigieren. Unsere neue Basis ist $|\varphi_n\rangle = e^{i\alpha_n} |\tilde{\varphi}_n\rangle$. So haben wir erreicht, dass ein Vektor $|\psi\rangle$ mit reellen nicht-negative Koeffizienten auf einen neuen Vektor $|\psi'\rangle$ transformiert wird, der die gleichen nicht negativen Koeffizienten hat (in der Transformierten Basis).

(iii) Wir zeigen nun das die Transformation von Vektoren mit reellen, nicht-negativen Koeffizienten wohldefiniert ist; also das alle Vektoren mit reellen, nicht-negativen Koeffizienten in der neuen Basis die selben Koeffizienten haben. Wir wählen:

$$|\varphi\rangle = \sum b_n |\varphi_n\rangle \text{ mit } b_n \geq 0$$

Mit $|\varphi'\rangle \in \hat{\varphi}$, so dass:

$$|\varphi'\rangle = \sum b_n e^{i\beta'_n} |\varphi_n\rangle$$

Wobei der Vektor so gewählt wird, dass $\beta_1 = 0$. Dies ist immer möglich da wir die Freiheit einer Phase haben. Aus $\hat{\psi} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\psi}' \cdot \hat{\varphi}'$ und (2) folgt (hier bezeichnen wir mit $\sum'$ die Summe ohne das erste Element):

$$a_1 b_1 + \sum{}' a_n b_n = \left| a_1 b_1 + \sum{}' a_n b_n e^{i\beta'_n} \right|$$

Auf der linken Seite der Gleichung sind alle Werte größer oder gleich Null, das impliziert sofort, dass $\forall\ b_n \neq 0 \Rightarrow \beta'_n = 0$. Dies ist leicht zu erkennen, wenn man beide Seiten auf der komplexen Ebene visualisiert. Dann wird ersichtlich, dass alle einzelnen Summanden die gleiche Phase haben müssen, damit der Vektor der rechten Seite die gleiche Länge wie der auf der linken Seite hat. Da der erste Summand der linke Seite $a_1 b_1$ rein reell ist müssen auch alle anderen Summanden rein reell sein. Folglich $\beta'_n = 0$.
Wir *definieren* jetzt $|\varphi'\rangle$ als das Abbild von $|\varphi\rangle$. Somit haben wir ein T konstruiert für das alle Vektoren mit nicht negativen reellen Koeffizienten auf Vektoren mit den selben Koeffizienten abgebildet werden:

$$|\varphi\rangle = \sum b_n |\varphi_n\rangle \to T|\varphi\rangle = |\varphi'\rangle = \sum b_n |\varphi_n\rangle$$

Ins Besondere gilt jetzt für die Basis Vektoren $|\varphi_n\rangle$:

$$T|\varphi_n\rangle = |\varphi'_n\rangle$$

(iv) Jetzt Wenden wir uns Vektoren zu die nicht nur reelle nicht-negative Koeffizienten haben. Wir wählen zwei beliebige Vektoren:

$$|\psi\rangle = \sum a_n e^{i\alpha_n} |\varphi_n\rangle \text{ und } |\varphi\rangle = \sum b_n e^{i\beta_n} |\varphi_n\rangle$$

Mit Abbildungen der Form:

$$|\psi'\rangle = \sum a_n e^{i\alpha'_n} |\varphi'_n\rangle \text{ bzw. } |\varphi'\rangle = \sum b_n e^{i\beta'_n} |\varphi'_n\rangle$$

Aus (2) folgt:

$$\left|\sum a_n b_n e^{i(\beta_n - \alpha_n)}\right| = \left|\sum a_n b_n e^{i(\beta'_n - \alpha'_n)}\right|$$

Dies muss für alle a_n, b_n, α_n und β_n gelten. Wir wählen jetzt $\beta_n = 0\ \forall\ n$ und $b_n = 0\ \forall\ n \neq l, k$. Daraus folgt, dass $\beta'_n = 0\ \forall\ n$ und $b'_n = 0\ \forall\ n \neq l, k$. Es folgt:

$$|a_l b_l e^{-i\alpha_l} + a_k b_k e^{-i\alpha_k}| = |a_l b_l e^{-i\alpha'_l} + a_k b_k e^{-i\alpha'_k}|$$

$$\Leftrightarrow |a_l b_l + a_k b_k e^{-i(\alpha_k - \alpha_l)}| = |a_l b_l + a_k b_k e^{-i(\alpha'_k - \alpha'_l)}|$$

$$\Rightarrow \alpha_k - \alpha_l = \pm(\alpha'_k - \alpha'_l) \ (4)$$

Jetzt können wir über einen Gegenbeweis zeigen, dass das Vorzeichen für l und k erhalten sein muss:

$$\alpha_k - \alpha_l = \alpha'_k - \alpha'_l \text{ und } \alpha_k - \alpha_j = -\alpha'_k + \alpha'_j$$

Aus Addition der Gleichungen folgt: $2\alpha_k - \alpha_j - \alpha_l = \alpha'_j - \alpha'_l$. Das steht offensichtlich im Widerspruch zu (4). Wir wählen jetzt

$$\alpha'_k = \pm\alpha_k - \lambda_k$$

Es folgt mit (4), dass alle Lambda gleich sein müssen. Also können wir jetzt allgemein für alle $|\psi\rangle$ die Transformation T definieren.

$$T : |\psi\rangle = \sum a_n e^{i\alpha_n} |\varphi_n\rangle \to |\psi'\rangle = e^{i\lambda} \sum a_n e^{\pm i\alpha'_n} |\varphi_n\rangle$$

Wir haben allerdings immer noch die Freiheit, die Phase λ selber auszuwählen. Konsistent mit der Überlegung, dass Vektoren mit nicht negativen Koeffizient auf Vektoren mit den selben Koeffizienten abgebildet werden, ergibt es Sinn die Phase $\lambda \equiv 0$ zu setzen.

(v) Wir haben gezeigt, dass für eine Transformation die Phasen der Koeffizienten entweder auf sich selbst (Plus-Eigenschaft), oder auf ihr additives Inverses (Minus-Eigenschaft) abgebildet werden. Nehmen Wir an es gäbe zwei Vektoren, $|\psi_+\rangle \, und \, |\psi_-\rangle$, die folgendermaßen definiert sind:

$$|\psi_+\rangle = \sum a_n e^{i\alpha_n} |\varphi_n\rangle \to |\psi'_+\rangle = \sum a_n e^{i\alpha_n} |\varphi'_n\rangle;$$
$$|\psi_-\rangle = \sum a_n e^{i\beta_n} |\varphi_n\rangle \to |\psi'_-\rangle = \sum a_n e^{-i\beta_n} |\varphi'_n\rangle$$

Dann wäre der Vektor $|\psi\rangle = |\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle$ weder vom Plus noch vom Minus Typ. Daraus folgt, dass die Plus/Minus-Eigenschaft nicht eine Eigenschaft des Vektors, sondern eine Eigenschaft der Transformation sein muss.

(vi) Wenn die Transformation die Plus-Eigenschaft besitzt, gilt:

$$|\psi\rangle = \sum A_n |\varphi_n\rangle \to T|\psi\rangle = |\psi'\rangle = \sum A_n T |\varphi_n\rangle$$

Daraus folgt, dass T linear ist. Also ist T unitär. <u>Unitär</u> heißt: T ist linear, bijektiv, Norm- und Abstand-erhaltend. Folglich gilt

$$\langle T\varphi | T\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$$

Analg gilt, wenn die Transformation die Minus-Eigenschaft besitzt:

$$|\psi\rangle = \sum A_n |\varphi_n\rangle \to T|\psi\rangle = |\psi'\rangle = \sum \bar{A}_n T |\varphi_n\rangle$$

Daraus folgt, dass T anti-linear ist. Also ist T anti-unitär. <u>Anti-Unitär</u> heißt: T ist anti-linear, bijektiv, Norm- und Abstand-erhaltend. Folglich gilt

$$\left\langle \overline{T}\varphi \middle| \overline{T}\psi \right\rangle = \overline{\langle\varphi|\psi\rangle} = \langle\psi|\varphi\rangle$$

Hier bemerken wir, dass die (Anti-)Unitarität nur von der Symmetrie Gruppe G abhängt. Wir können zu jeder symmetrischen Strahlentransformation $\hat{g}$ folglich immer eine entweder unitäre oder anti-unitäre Vektortransformation T finden; die damit verträglich ist.

(vii) Nun wollen wir die Klasse der (anti-)unitären Transformationen verträglich mit $\hat{g}$ finden. Wir nehmen uns zwei Transformationen T und R welche beide mit $\hat{g}$ verträglich sind. Dann gilt mit (1):

$$T|\varphi\rangle = \omega(\varphi)R|\varphi\rangle \text{ mit } |\omega(\varphi)| = 1;\ T|\psi\rangle = \omega(\psi)R|\psi\rangle \text{ mit } |\omega(\psi)| = 1$$

Wir überprüfen nun ob ω unabhängig vom Transformationsvektor ist. Angenommen $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ sind voneinander linear unabhängig, so folgt:

$$T(|\varphi\rangle + |\psi\rangle) = T|\varphi\rangle + T|\psi\rangle = \omega(\varphi)R|\varphi\rangle + \omega(\psi)R|\psi\rangle$$
$$T(|\varphi\rangle + |\psi\rangle) = \omega(\varphi,\psi)R(\varphi + \psi) = \omega(\varphi,\psi)R|\varphi\rangle + \omega(\varphi,\psi)R|\psi\rangle$$

Daraus folgt sofort, dass ω unabhängig vom Transformationsvektor ist. Für linear-abhängige Vektoren $|\varphi\rangle$ und $|\psi\rangle$ existiert auf jeden Fall ein $|\chi\rangle$ welches linear-unabhängig zu den beiden Vektoren ist. Dann können wir die gleiche Rechnung durchführen und erhalten:

$$\omega(\chi) = \omega(\psi) = \omega(\varphi) \text{ und } \omega(\chi) = \omega(\psi,\chi) = \omega(\varphi,\chi)$$

Hier ist ω immernoch unabhängig vom Transformationsvektor. Daraus folgt, dass alle (anti-)unitären Transformationen die mit gegebenem $\hat{g}$ kompatibel sind sich nur um ein ω mit $|\omega| = 1$ unterscheiden.

(viii) Wir können jetzt einen 'Operator-Strahl' im 'Strahlenraum' definieren, der den Satz aller (anti-)unitären Transformation darstellt, die verträglich mit der Strahlenkorrespondenz $\hat{g}$ sind:

$$\hat{U}(\hat{g}) = \{\omega(\hat{g})U(\hat{g}) : |\omega| = 1\} \ (5)$$

Jetzt haben wir einen direkte Beziehung zwischen den Strahlenkorrespondenzen $\hat{g}$ und (anti-)unitären Operator-Strahlen $\hat{U}$ gefunden. Da die Strahlenkorrespondenzen eine Gruppe bilden, induziert diese Beziehung auch eine isomorphe Gruppe von $\hat{U}$. Dies gilt allerdings nicht für die Hilbertraum Transformationen U selbst. Dem widmen wir uns im nächsten Schritt.

(ix) Angenommen $\hat{g}$, $\hat{h}$ und $\hat{j}$ sind drei Strahlenkorrespondenzen $\in \hat{G}$, dann dürfen wir laut (5) beliebige $U \in \hat{u}$ auswählen um diese darzustellen. Angenommen das Produkt $\hat{g} \cdot \hat{h} = \hat{j}$, so wählen wir:

$$U_g \in \hat{U}_g;\ U_h \in \hat{U}_h \text{ und } U_j \in \hat{U}_j = \hat{U}_{g\cdot j}$$

Dann ist $U_g \cdot U_h \in \hat{U}_j$, aber im Allgemeinen ist $U_g \cdot U_h \neq U_j$. Denn sie können sich noch um einen Faktor vom Betrag eins unterscheiden.

$$U_g \cdot U_h = \omega(g;h)U_{g\cdot h}$$

Die (anti-)unitären Operatoren bilden folglich nur eine 'Darstellung mit einem Faktor vom Betrag eins'.

(x) Wir sammeln jetzt alle Ergebnisse und finden das Wigner Theorem:

Fuer jede Symmetrie Gruppe G eines physikalischen Systems existieren

(I) eine Gruppe $\hat{G}$ von Strahlenkorrespondezen $\hat{g}$;
(II) eine Gruppe $\hat{U}_G$ von (anti-)unitären Operatorstrahlen $\hat{U}$;
(III) eine Menge von (anti-)unitären Operatoren $U \in \hat{U}$;

wobei die Gruppen G, $\hat{G}$ and $\hat{U}_g$ isomorph sind. Wenn man ein beliebiges U aus jedem $\hat{U}$ nimmt, so bilden die (anti-)unitären Transformationen $U(g)$ eine Darstellung mit einem Faktor vom Betrag eins der Gruppe G.

Literatur

[1] M. Chaichian und R. Hagedorn. *Symmetries in Quantum Mechanics: From Angular Momentum to Supersymmetry*. IOP Publishing Ltd 1998.