Darstellungstheorie I

- Darstellungen, Charaktere, Reduzibilität -

Manuel Formela

Inhaltsverzeichnis:

1 Darstellung: Definition, Äquivalenz, Charakter, Reduzibilität

1.1 Darstellung:

Definition:

Eine *Darstellung* D der Dimension n einer Gruppe G ist ein Homomorphismus $D: G \to GL(n,\ \mathbb{C})$ auf die Menge der invertierbaren (regulären) $n \times n$-Matrizen $GL(n,\ \mathbb{K})$ mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$.

Bemerkungen:

1. Eine Darstellung erhält die Struktur der Gruppe, da sie laut Definition homomorph ist: $D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2)$

2. Die Invertierbarkeit folgt aus der Strukturerhaltung: $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$

3. $D(C_3)$ ist eine Teilmenge von $GL(3,\mathbb{C})$, da die Matrizen reell und orthogonal sind. Für *orthogonale* Matrizen R gilt:

$$RR^T = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x'^2 = x'^T x' = (Rx)^T (Rx) = x^T R^T R x = x^2$$

Sie sind also skalarprodukterhaltend.
Weiterhin gilt für orthogonale Matrizen $\det R = \pm 1$, wobei Rotationsmatrizen $\det R_1 = +1$ mit $R_1 \in SO(n)$ und Drehspiegelungen $\det R_2 = -1$ mit $R_2 \in O(n) \backslash SO(n)$ haben.

4. Eine *isomorphe Darstellung* wird auch *treu* genannt.
Dies ist der Fall, wenn: $\ker D = e \in G$ $\quad$ (e ist das neutrale Element aus G)

Beispiel:

1. Rotation:
Die Gruppe der Rotationen um die z-Achse $\mathrm{gp}\{c\}$ um Vielfache von $120° \hat{=} 2\pi/3 =: c$ findet ihre Darstellung in:

$$D(c) = \begin{pmatrix} \cos(c) & -\sin(c) & 0 \\ \sin(c) & \cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

denn: $\quad D(c^2) = D(c)^2, \quad D(c^3) = D(c)^3 = D(e) = 1$

2. Induzierte Transformation einer QM-Wellenfunktion:
Wellenfkt $\psi(x) \propto cos(\theta)$ eines 2p-elektrons in einem H-Atom

1.2 Äquivalenz von Darstellungen:

Definition:

Zwei Darstellungen $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ heißen *äquivalent*, falls:

$$D^{(1)}(g) = SD^{(2)}(g)S^{-1} \quad \forall g \in G, \; S \in GL(n, \mathbb{K})$$

Wobei S unabhängig von g ist.

Bemerkungen:

1. Die Transformation von einer Darstellung zur Anderen ist verträglich mit den Gruppeneigenschaften:

$$\begin{aligned} SD^{(2)}(gg')S^{-1} &= SD^{(2)}(g)D^{(2)}(g')S^{-1} \\ &= (SD^{(2)}(g)S^{-1})(SD^{(2)}(g')S^{-1}) \\ &= D^{(1)}(g)D^{(1)}(g') \\ &= D^{(1)}(gg') \end{aligned}$$

2. Die beiden Darstellungen sind äquivalent zueinander ($D^{(1)} \sim D^{(2)}$) - gehören also in dieselbe Äquivalenzklasse - und stellen dieselbe lineare Transformation nur im Bezug zu verschiedenen Basen dar.

3. Um festzustellen ob Darstellungen äquivalent sind, ist die Einführung des Charakters einer Darstellung von Nutzen.

1.3 Charakter einer Darstellung

Definition:

Der *Charakter* einer Darstellung D von einer Gruppe G ist die Menge:

$$\chi := \{\chi(g)|\ g \in G\} \qquad \text{mit } \chi(g) := Tr(D(g)) = \textstyle\sum_i D(g)_{ii}$$

Bemerkungen:

1. Diese Definition ermöglicht es Darstellungen, die bis auf eine lineare Transformation identisch sind, gegenseitig zuzuordnen, denn:

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \sum_{ijk} A_{ij} B_{jk} C_{kl} = \sum_{ijk} B_{jk} C_{kl} A_{ij} = \mathrm{Tr}(BCA)$$

folglich:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(D^{(2)}) &= \mathrm{Tr}(SD^{(1)}(g)S^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(D^{(1)}(g)SS^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(D^{(1)}(g)) \qquad\qquad \forall g \in G\end{aligned}$$

2. Es gilt allgemein: $\qquad D^{(1)} \sim D^{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \chi^{(1)} = \chi^{(2)}$

1.4 Reduzibilität von Darstellungen

Definition:

Eine Darstellung D der Dimension $(n+m)$ heißt *reduzibel*, falls sie die Form:

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ O & B(g) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } g \in G$$

mit $A \in$Mat$(m, m, \mathbb{C})$, $B \in$Mat$(n, n, \mathbb{C})$, $C \in$Mat$(m, n, \mathbb{C})$, O $(n \times m)$-Nullmatrix annimmt.

Bemerkungen:

1. Multipliziert man zwei reduzible Matrizen einer Gruppe miteinander:

$$
\begin{aligned}
D(gg') = D(g)D(g') &= \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ O & B(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(g') & C(g') \\ O & B(g') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A(g)A(g') & A(g)C(g') + C(g)B(g') \\ O & B(g)B(g') \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   so folgt:

$$
A(gg') = A(g)A(g') \qquad B(gg') = B(g)B(g') \qquad C(gg') = A(g)C(g') + C(g)B(g')
$$

   Also sind A mit Dimension m und B mit Dimension n Darstellungen der Gruppe G.

2. Für alle endlichen Gruppen folgt aus dem Maschke Theorem, dass $C(g)$ auch zu einer Nullmatrix transformiert werden kann. Die Darstellung heißt dann *vollständig reduzibel* oder *zerlegbar* und man schreibt:

$$
D(g) = A(g) \oplus B(g)
$$

   Wobei A und B selbst auch weiter zerlegbar sein können.
   Dieser Prozess kann dann weitergeführt werden bis man auf die *irreduziblen* Darstellungen stößt. Diese sind nicht weiter zerlegbar.

3. D ist reduzibel $\quad \Rightarrow \quad$ Es existiert ein G-Modul V mit mindestens einem Submodul, denn:
   Sei der $(m+n)$-dimensionale Vektorraum V ein G-Modul zu G für den man einen Untervektorraum $U \subset V$ der Dimension n (mit Basis $\{e_i\},\ i = 1, ..., m$) findet, der ebenfalls ein (Sub-)G-Modul bildet. Dann ist $W = V \backslash U$ das Komplement von U zu V m-dimensional (mit Basis $\{e_i\},\ i = m{+}1, ..., m{+}n$). Aufgrund der Geschlossenheit von U als Submodul, hat die Transformation von $e_i \in U$ keine Komponenten in W:

$$
T(g)e_j = D_{ij}e_i \quad \Rightarrow \quad D_{ij}(g) = 0 \qquad \text{für } (i = m+1, ..., m+n) \cap (j = 1, ..., m)
$$

   Also nimmt $D(g)$ genau die Form einer reduzierten Matrix an!

Beispiel:

C_3 : Rotation im 3-dimensionalen Raum
Bei Rotation um die z-Achse sieht die Darstellung R von $c \in C_3$ folgendermaßen aus:

$$
R(c) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Bei dieser Rotation ändern sich die x- und y-Komponente abhängig voneinander, wobei die z-Komponente unverändert bleibt, sodass sich der Vektor $x = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$ in zwei unabhängige Teile $u = x \cdot i + y \cdot j,\ v = z \cdot k$ zerlegen lässt. Nun kann man die 2-dimensionale Darstellung $D^{(2)}$, die nur auf u wirkt, und die triviale Darstellung $D^{(1)} = 1$, die nur auf v wirkt, definieren. Setzt man diese Blockmatrizen in $R(c)$ ein und führt zwei verschiedene Rotationen hintereinander aus, wird die Unabhängigkeit der beiden Darstellungen weiter deutlich:

$$\begin{aligned} R(g)R(g') &= \begin{pmatrix} D^{(2)}(g) & O \\ O & D^{(1)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(2)}(g') & O \\ O & D^{(1)}(g') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{(2)}(g)D^{(2)}(g') & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D^{(2)}(gg') & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } D^{(1)} = 1 \end{aligned}$$

Man schreibt daher: $\quad R(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g)$

2 Vektorraum: Definition, lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension, lineare Transformation, G-Modul

2.1 Vektorraum

Definition:

Ein Vektorraum V über einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$ (im folgenden ist $\mathbb{K} := \mathbb{C}$) ist eine Menge mit den beiden Verknüpfungen + (Vektoradditon) und $\cdot$ (Skalarmultiplikation), die die folgenden Axiome erfüllen:

$$\begin{array}{lll} \underline{Vektoraddition}\ (+): & \forall u, v, w \in V & \\ A0 & Geschlossenheit: & (u+v) \in V \\ A1 & Assoziativität: & u + (v + w) = (u + v) + w \\ A2 & Existenz\ der\ Identität: & u + 0 = v \quad mit\ 0 \in V,\ \forall v \in V \\ A3 & Existenz\ des\ Inversen: & \forall u \in V, \exists(-u) \in V: \quad u + (-u) = 0 \\ A4 & Kommutativität: & u + v = v + u \\ \underline{Skalarmultiplikation}\ (\cdot): & \forall u, v \in V,\ a, b \in \mathbb{K} & \\ B0 & Geschlossenheit: & au \in V \\ B1 & Distributivität: & a(v + w) = au + av \\ B2 & & (a + b)u = au + bu \\ B3 & Assoziativität: & a(bu) = (ab)u \\ B4 & Existenz\ der\ Identität: & 1 \cdot u = u \qquad 1 \in \mathbb{K} \end{array}$$

Bemerkungen:

1. Ein Vektorraum V ist also unter Addition + eine Abel'sche Gruppe (sprich: kommutativ).

2. Aus den Axiomen zur Multiplikation folgt, dass $(-1)u = -u$, denn:

$$\begin{aligned} & (1+0)u = u \quad &\Rightarrow \quad & 0 \cdot u = u + (-u) = 0 \\ mit \quad & (1+(-1))u = 0 \cdot u = 0 \quad &\Rightarrow \quad & (-1)u = -u \end{aligned}$$

Beispiel:

Funktionenraum:
Betrachtet man den Raum der komplexen Funktionen $f(x)$, die auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ definiert sind und für die $f(0) = f(1) = 0$ gilt, lassen sich sowohl Addition $((f+g)(x) = f(x) + g(x))$ als auch Multiplikation $((af)(x) = a \cdot f(x))$ so definieren, dass dieser Funktionenraum ein Vektorraum ist.
Solche Funktionen lassen sich in der Quantenmechanik in einem Potentialtopf $V(x)$ finden, der innerhalb des Intervalls $V(x) = 0$ und außerhalb unendlich groß ist. Die Energieeigenwerte u_n =sin($n\pi x$) lassen sich als unendlich große Basis zur Konstruktion beliebiger Funktionen f über die Fourierreihe verwenden: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x)$
Also lassen sich Addition und Multiplikation im Bezug auf die einzelnen Komponenten u_n wie im Fall einfacher Vektoren definieren.

2.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren:

Definition:

Eine Menge an Vektoren $e_i \in V$ mit $i = 1, 2, ..., m$ heißt *linear unabhängig*, falls:

$$\sum_i^m \lambda_i e_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

Also wenn nur die triviale Lösung existiert.

Beispiele:

1. Die Einheitsvektoren sind linear unabhängig: $i = (1, 0, 0),\ j = (0, 1, 0),\ k = (0, 0, 1)$

2. Linear abhängig: $(-2, 1, 1),\ (1, -2, 1),\ (1, 1, -2)$

2.3 Basis eines (Unter-)Vektorraums:

Definition:

Eine *Basis* ist eine maximale Menge an linear unabhängigen Vektoren e_i mit $i = 1, ..., m$ eines Vektorraums V. Diese spannen V auf.

Bemerkungen:

1. Mit der Basis lassen sich alle Elementen $u \in V$ eindeutig ausdrücken:

$$u = \sum_i^m u_i e_i \qquad \text{mit } u_i \in \mathbb{K},\ \forall u \in V$$

   (Im Folgenden wird die Konvention verwendet, dass über gleiche Indizes summiert wird: $u = u_i e_i$)

2. Beispiele:
   - die Einheitsvektoren $\{i, j, k\}$ für $\mathbb{R}^3$
   - $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ für den Funktionenraum, der Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = f(1) = 0$

2.4 Dimension eines Vektorraums:

Definition:

Ein Vektorraum V mit einer Basis $\{e_i\}$ mit n Elementen heißt $n - dimensional$. Man schreibt: $\dim V = n$

Bemerkung:

1. Jede Basis von V muss gleich viele Elemente besitzen. Somit ist die Dimension eines Vektorraums eindeutig.

2.5 Lineare Transformation:

Definition:

Eine Abbildung $T :\ V \to V$ heißt *linear*, wenn:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ u, v \in V$$

Bemerkung:

1. Beispiele:

   - Skalarmultiplikation: $u \mapsto T_1(u) = k \cdot u$ mit $k \in \mathbb{K}$
   - Differentiation auf dem Raum der mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktionen $C(\mathbb{R})$

2. Es ist möglich eine lineare Abbildung T bezogen auf eine Basis $\{e_i\}$ als eine $n \times n$-Matrix D mit den Einträgen D_{ij} zu formulieren. Die Einträge lauten (unter der Berücksichtigung der Summenkonvention): $\quad Te_j = D_{ij}e_i$
   Dies ermöglicht es die lineare Abbildung eines beliebigen Vektors $u \in V$ unter Verwendung der Linearität auf die Anwendung der Matrixeinträge auf die Basisvektoren zurückzuführen:

$$\begin{aligned} Tu = T(u_j e_j) &= u_j T(e_j) \\ &= u_j(D_{ij}e_i) = v = v_i e_i \quad \Rightarrow \quad v_i = D_{ij}u_j \end{aligned}$$

   Somit lässt sich der Spaltenvektor v aus der Multiplikation von Matrix D mit dem Spaltenvektor u ermitteln: $\quad v = Du$

3. Offensichtlich ist die Form der Matrix D einer linearen Transformation T nicht eindeutig, da sie von der Wahl der Basis abhängt. Wählt man also eine neue Basis f_i, erhält man im neuen Matrixeinträge D'_{ij}: $\quad Tf_j = D'_{ij}f_i$
   Außerdem wird der Vektor u in der neuen Basis als: $\quad u = u'_j f_j$
   ausgedrückt. Im neuen Bezugssystem gilt: $\quad v'_i = D'_{ij}u'_j \quad \Rightarrow \quad v' = D'u'$
   Außerdem können wir die Vektoren im alten Koordinatensystem mithilfe einer Linearkombination der neuen Basis ausdrücken: $e_i = S_{ji}f_j \quad \Rightarrow \quad u = u_i e_i = u_i S_{ji} f_j$
   Folglich: $\quad u'_j = u_i S_{ji} \quad \Rightarrow \quad u' = Su$
   Selbiges gilt für $v' = Sv$:

$$v' = Sv \quad \Rightarrow \quad v' = Sv = S(Du) = SD(S^{-1}u') \quad \Rightarrow \quad D' = SDS^{-1}$$

   Dies bedeutet also, dass Matrizen einer linearen Abbildung sich aufgrund der unterschiedlichen Basiswahl nur bis auf eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden.

2.7 G-Modul:

Definition:

Sei T eine beliebige Darstellung der Gruppe G. Dann heißt eine Abel'sche Gruppe $(V, +)$ *G-Modul*, wenn die Abbildung $h : (G \times V) \to V$ mit $(g, u) \mapsto T(g) \cdot u =: h(g, u)$ homomorph ist.

3 Quellen:

1. H.F. Jones: Groups, Representations and Physics. Adam Hilger Ldt., 1990, S.35-53