Vivian Hoppe

Handout

Thema: Untergruppen, Homomorphismen

Inhalt

1. Untergruppen und Nebenklassen

Untergruppen

Eine Untergruppe H, ist eine Untermenge $H \subset G$ der Gruppe G, die in sich selbst eine Gruppe bildet.

Gruppe

G0. (abgeschlossen unter Verknüpfung)
für $a, b \in G$ gilt $a \cdot b \in G$
G1. (Assoziativität)
für $a,b,c \in G$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
G2. (neutrales Element)
Es ex. $e \in G \Rightarrow e \cdot g = g \cdot e = g \quad \forall g \in G$
G3. (inverses Element)
$\forall a \in G$ ex. $a^{-1} \in G \Rightarrow a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Die kleinste Untergruppe ist $\{e\}$, die größte ganz G.
Gilt ab=ba heißt die Gruppe abelsch.

Beispiel

Für $D_3 = \{e,c,c^2,b,bc,bc^2\}$ sind echte Untergruppen
$C_2 = \{e,b\}$, $C_3 = \{e,c,c^2\}$

(Links-)Nebenklasse

Sei $H = \{h_1,h_2,\dots,h_r\}$ eine Untergruppe von G, dann ist für ein $g \in G$ die Linksnebenklassen definiert als

$$gH = \{gh_1,gh_2,\dots,gh_r\}$$

(Rechtsnebenklassen mit Multiplikation von rechts)

Diese Nebenklassen sind entweder identisch oder disjunkt.

Gilt $a \in bH$, also ex. ein $h \in H : a = b \cdot h$, für $a,b \in G$, so schreiben wir $a \sim b$.
Diese Relation bildet eine Äquivalenzrelation.

Prüfen:

Reflexiv	$a \sim a$	
symmetrisch	$a \sim b$ gilt $b \sim a$?	
	ist $b \in aH$	$\Leftrightarrow b = ah$ für ein $h \in H$
		$\Leftrightarrow a = bh^{-1}$ und $h^{-1} \in H$
transitiv	$a \sim b$, $b \sim c$ gilt $a \sim c$?	
	es gilt $b=ah$ und $c=bh'$ für $h, h' \in H$,	
	also $c=ahh'$ mit $hh' \in H$	

Die Menge der Nebenklassen wird als G/H bezeichnet.

2. Lagrange

Die Ordnung [h] einer UG H von G, muss Teiler der Ordnung [g] von G sein.

Im endlichen haben NK einer UG gleiche Anzahl an unterschiedlichen Elementen, sei dies r. Dies ist genau die Ordnung von H: [h].
Somit können alle Elemente von G, [g], in s NK mit r(=[h]) Elementen zusammengefasst werden. Es gilt also [g] = s[h].

Für Gruppen mit Primzahlordnung sind demnach nur {e} und die Gruppe selber Untergruppen.

Beispiel

D_3 hat drei C_2 UG. Sei H={e,b}. NK von H:

$eH = \{e,b\}$
$cH = \{c,cb\}$
$c^2H = \{c^2,c^2b\}$

$[D_3]=6$, drei NK mit Ordnung 2.

3. Normale Untergruppen

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$\Leftrightarrow$ die Untergruppe $H \subset G$ ist normal

$\Leftrightarrow$ für alle $g \in G$ gilt $gHg^{-1} = H$, H ist also zu sich selber konjugiert

$\Leftrightarrow$ für jedes $h \in H$ gilt $ghg^{-1} \in H$, $\forall\, g \in G$

$\Leftrightarrow$ für jedes $g \in G$ gilt $gH = Hg$

Ist H normal, so bildet G/H eine Gruppe mit $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$

Beweis
Prüfen durch Axiome:

G0. $g_1g_2 \in G/H$?, ja, denn $g_1g_2 \in G$

G1. $(g_1 H)[(g_2 H)(g_3H)] = \ldots = (g_1g_2)g_3H = \ldots = [(g_1 H)(g_2 H)](g_3H)$

G2. $E:=eH=H$, $(eH)(gH)=(eg)H=gH$. Ebenso für $(gH)(eH)$

G3. Inverse ist $g^{-1}H$, da $(gH)(g^{-1}H)=(gg^{-1})H=eH=E$

wohldefiniert:
Sei a'b'H gleiche NK wie abH.
Sei a' aus aH $\Rightarrow$ a'=ah, b'=bh' für h,h' $\in$ H

$\Rightarrow$a'b'H= ahbh'H = ahbH (mit Satz von Cayley hH = H)

da H normal, gilt gH=hG $\Rightarrow$ ahbH=ahHb=aHb=abH

Beispiel

Sei $H=C_3=\{e,c,c^2\}$, zwei NK eH=H=E und $bH=\{b,bc,bc^2\}=B$
finde Isomorphismus zu $C_2=\{e,b\}$

$E^2 = (eH)(eH) = H = E$
$EB = (eH)(bH) = bH = B$
$BE = B$
$B^2 = (bH)(bH) = b^2H = eH = E$

Gegenbeispiel:
C_2 ist nicht normal.
$(cH)(cH) = \{c,cb\}\{c,cb\} = \{c^2,c^2b,b,e\} \neq cH$

4. Gruppenhomomorphismus

Allgemein bei einem Homomorphismus gilt, die Abbildung f: $A \to B$ ist strukturerhaltend.
Alle $a \in A$ werden auf ein eindeutiges Bild, $f(a)=b \in B$, abgebildet.
Die Umkehrung muss nicht gelten, denn f kann
(i) nicht injektiv
(ii) nicht surjektiv sein

Um (ii) zu umgehen, Könen wir nur die Bildmenge

$$\text{Im } f := \{b \in B \mid b=f(a) \text{ für ein } a \in A\},$$

auch f(A) oder Bild(f) gennant, betrachten.

Seien G, G' Gruppen. Ein Gruppenhomomorphismus f ist gegeben, wenn für die Abbildung f: $G \to G'$ gilt

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \qquad a,b \in G$$

Im f ist UG von B.

$\ker f := \{a \in A \mid f(a) = e \in B\}$ ist der Kern von f und bildet eine Gruppe:

(i) $k_1,k_2 \in \ker f \quad \Rightarrow f(k_1) = f(k_2) = e$

$\Rightarrow f(k_1k_2) = f(k_1)\, f(k_2) = e \;\Rightarrow k_1k_2 \in \ker f$

(ii) neutrales Element:
$f(a)=f(ae)=f(a)f(e)$ $(f(a)^{-1}$ von links)
$e = f(e)$
(iii) Inverse:
vorerst $e=f(e)=f(gg^{-1})=f(g)f(g^{-1}) \Leftrightarrow f(g)^{-1}=f(g^{-1})$
Sei nun $k \in \ker f$: $f(k^{-1})=f(k)^{-1}=e \Rightarrow k^{-1} \in \ker f$

ker f ist sogar normale UG, denn
$f(gkg^{-1})=f(g)f(k)f(g^{-1})=f(g)ef(g)^{-1}=e$

Notation

Ist f Homomorphismus und G=G' $\Rightarrow$ f: $G \to G$ heißt Endomorphismus

Ist f Isomorphismus (bij. Hom.) und G=G' $\Rightarrow$ f: $G \to G$ heißt Automorphismus

5. Isomorphiesatz

Ist $f: G \to G'$ Gruppenhomomorphismus, K ist ker f.
Dann gilt

$$\mathrm{Im}\,(f) \simeq G/K$$

Beweis
Bilde dafür Korrespondenz $f(g) \leftrightarrow gK$, das Bild eines Elementes g wird NK gK zugeordnet.

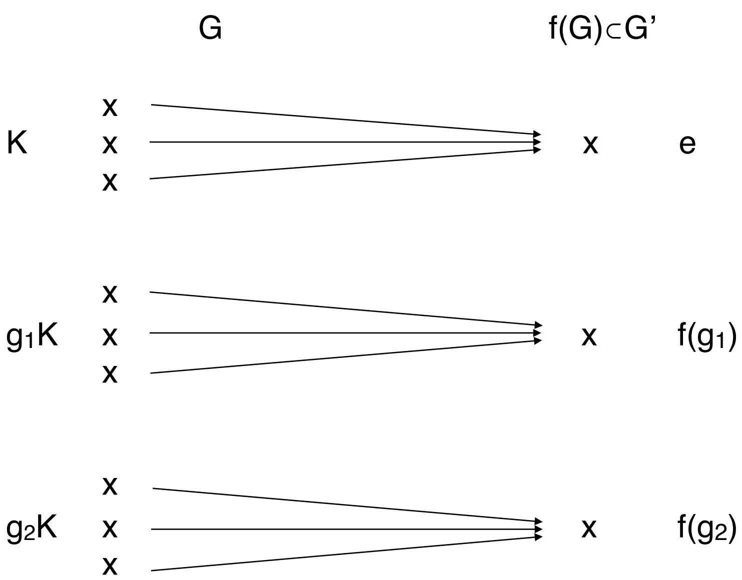
(i) Abb. $f(g) \mapsto gK$ ist wohldefiniert. Angenommen $f(g)=f(g')$ mit $g,g' \in G$

$\Rightarrow$ $f(g)$ wird gK zugeordnet, $f(g')$ wird $g'K$ zugeordnet.

mit $f(g)=f(g') \Leftrightarrow e=f(g')f(g)^{-1}=f(g'g^{-1}) \Rightarrow g'g^{-1} \in K$ und die NK $g'K$ und gK sind äquivalent

(ii) $gK \mapsto f(g)$ ist wohldefiniert
ist g' aus NK $g \Rightarrow gg' \in K$ und $g'g^{-1} \in K$ (analog zu (i)) $\Rightarrow f(g')=f(g)$

(iii) gruppenstrukturerhaltend
$f(g)f(g')=f(gg')$ wird auf $gg'K$ abgebildet mit $(gK)(g'K)=gg'K$
und damit $f(g)f(g') \leftrightarrow (gK)(g'K)$



Der Kern wird auf $e \in G'$ abgebildet. Gesamte NK g_iK werden („als Block") einzelnen Elementen $f(g_i)$ zugeordnet.