Gruppentheorie in der QM

- Darstellungen und Gewichte -

Manuel Formela

Inhaltsverzeichnis:

1 Wiederholung:

$$[H_i, H_j] = 0 \qquad \forall i, j = 1, ..., r \tag{1}$$

$$[H_i, E_\alpha] = (\alpha)_i E_\alpha \qquad \forall i, j = 1, ..., r \quad \alpha = 1, ..., (d-r) \tag{2}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{i=1}^{r} (\alpha)_i H_i = \alpha H \qquad \forall \alpha = 1, ..., (d-r) \tag{3}$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_j}] = \frac{1}{2} \delta_{ij} \alpha_i H_{\alpha_i} \qquad \forall \alpha_i \in W_{einf} \tag{4}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \qquad \forall \beta \neq -\alpha \tag{5}$$

$$J_3 = \frac{1}{2} H_\alpha = \frac{\alpha\mu}{\alpha^2} \qquad \text{(halbzahlige Eigenwerte)} \tag{6}$$

$$J_\pm = \sqrt{\frac{2}{\alpha^2}} E_{\pm\alpha} \tag{7}$$

$$J_3 \left| j, m \right\rangle = m\hbar \left| j, m \right\rangle \tag{8}$$

$$J_\pm \left| j, m \right\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \left| j, m \pm 1 \right\rangle \tag{9}$$

$$J_+ \left| j, j \right\rangle = 0 \tag{10}$$

2 Gewichte:

2.1 Definitionen und Bemerkungen:

Definition:

Ein *Gewicht* $\mu \in \mathbb{K}^r$ eines Zustands einer Darstellung D besteht aus den Einträgen $(\mu)_i$ mit $i = 0, ..., r$ für die gilt:

$$H_i \left|\mu\right\rangle = (\mu)_i \left|\mu\right\rangle \qquad \text{mit} \tag{11}$$

i.A. gilt: $\mu \neq \left|\mu\right\rangle$

Bemerkungen:

1. $M := \{\mu \in \mathbb{K}^r \mid \mu \text{ ist ein Gewicht}\}$
2. E_α ist der Leiteroperator, der ein Gewicht μ zu $\mu + \alpha$ macht.
   Bew.:

$$\begin{aligned} H_i(E_\alpha \left|\mu\right\rangle) &= ([H_i, E_\alpha] + E_\alpha H_i) \left|\mu\right\rangle \\ &= (\alpha + \mu)_i (E_\alpha \left|\mu\right\rangle) \qquad\qquad \text{mit Gl. (2)} \\ \longrightarrow E_\alpha \left|\mu\right\rangle &\propto \left|\mu + \alpha\right\rangle \end{aligned}$$

3. es folgt sofort: $\quad E_\beta E_\alpha \left|\mu\right\rangle \propto \left|\mu + \alpha + \beta\right\rangle$

Definition:

Ein *fundamentales Gewicht* $\lambda_i \in \mathbb{K}^r$ ist ein Gewicht für das gilt:

$$\frac{2\lambda_i \alpha_j}{\alpha_j^2} = \delta_{ij} \qquad \forall \alpha_j \in W_{einf} := \ \{\text{Menge der einfachen Wurzeln} \tag{12}$$

Bemerkungen:

1. fundamentale Gewichte sind das Analogon zu einfachen Wurzeln
2. $\forall \mu \in M: \qquad \mu = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i \qquad \text{mit } m_i \in \mathbb{Z}$
   Bew.:

$$\left(\frac{2\alpha_j}{\alpha_j^2}\right)\mu = \sum_{i=1}^r m_i \frac{2\lambda_i \alpha_j}{\alpha_j^2} = m_j \qquad\qquad \text{mit Gl. (6) und (12)}$$

Im Folgenden werden die Leiteroperatoren E_{α_i} der einfachen Wurzeln α_i betrachtet. Die mehrfache Anwendung dieser Aufsteigeoperatoren auf einen Zustand muss unausweichlich auf einen Zustand $\left|\mu\right\rangle$ führen für den gilt, dass $E_\alpha \left|\mu\right\rangle = 0$. Dies ist analog zum Zustand $\left|j, j\right\rangle$ aus $SU(2)$ mit $J_+ \left|j, j\right\rangle = 0$.

Definition:

Der *Zustand des höchsten Gewichts* $|\mu_{max}\rangle$ einer irreduziblen Darstellung ist der Zustand für den gilt:

$$E_{\alpha_i} |\mu_{max}\rangle = 0 \qquad \forall i = 1, ..., r$$

Das dazugehörige Gewicht μ_{max} heißt *höchstes Gewicht.*

Bemerkungen:

1. $\mu \in M : \mu = \mu_{max} \quad \Longleftrightarrow \quad m_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, ..., r$
2. Daraus folgt sofort: Sei μ ein fundamentales Gewicht $\Rightarrow$ μ ist ein höchstes Gewicht
3. Die restlichen Zustände dieser Darstellung werden durch (mehrfache) Anwendung des Absteigeoperators $E_{-\alpha}$ erzeugt (analog zu Gl. (7)).

2.2 Beispiel: SU(3)

Man betrachte die fundamentale Darstellung von $SU(3)$, dessen höchstes Gewicht λ_1 (alternative Notation: $(m_1, m_2) = (1, 0)$) ist.

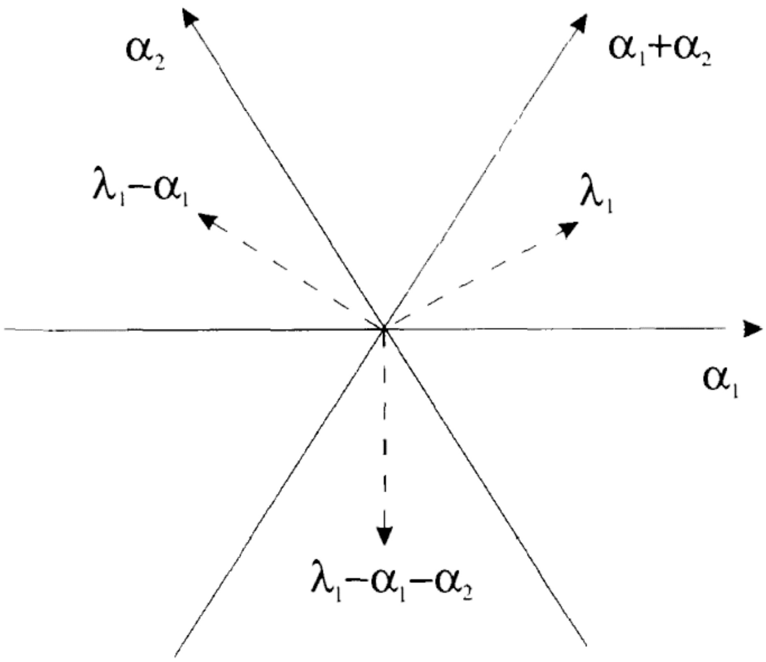

Abb.1: Darstellung einiger Wurzeln und Gewichte von SU(3)

Die normierten (einfache) Wurzeln lauten:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

durch lösen der Gl.(12) erhält man die fundamentalen Gewichte:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Das Gewicht λ_1 ist, wie in der Abb. 1 zu sehen, der Mittelpunkt des durch die Wurzeln α_1 und $\alpha_1 + \alpha_2$ aufgespannten Dreiecks.
Um die anderen Zustände der Darstellung zu erhalten, wird λ_1 um $-\alpha_1$ und $-\alpha_2$ verändert.
Dazu folgende Überlegung:
Das Anwenden eines Leiteroperators $E_{+\beta}$ (bzw. $E_{-\beta}$) auf den Zustand $|\mu\rangle$ führt im Allgemeinen zu den Zustände $|\mu + p\beta\rangle$ (bzw. $|\mu - q\beta\rangle$), so dass insgesamt $(p + q + 1)$ Zustände existieren. Aus ähnlichen Überlegungen wie bei den Wurzeln folgt für die Gewichte:

$$q + p = 2j \tag{13}$$

$$q - p = \frac{2\mu\beta}{\beta^2} \tag{14}$$

Für λ_1 gilt $p = 0$ für α_1 und α_2, sodass für die Anzahl der Zustände folgt:

$$p + q + 1 = 2j + 1 = q + 1 = \frac{2\lambda_j\alpha_i}{\alpha_i^2} + 1 = m_i + 1 = \delta_{ij} + 1 \qquad \text{mit Gl.(12)-(14)} \tag{15}$$

$$\text{für } \lambda_1 \text{ folgt nun:} \quad \alpha_1 : i = 1 \Rightarrow m_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha_2 : i = 2 \Rightarrow m_2 = 0$$

Wobei m_k die ganzzahligen Koeffizienten für die Linearkombination von Gewichten aus Fundamentalgewichten sind und für fundamentale Gewichte λ_j selbst nur $m_i = \delta_{ij}$ annehmen. Die Darstellung von S_{α_i}, der durch die Anwendung von $E_{-\alpha_i}$ auf λ_1 generiert wird, ist somit ein Doublet für α_1 (weil: $2j+1 = 2$) und ein Singlet für α_2 (weil: $2j+1 = 1$).
Sprich aus dem Zustand $|\lambda_1\rangle$ kommt mit $E_{-\alpha_1}$ noch der Zustand $|\lambda_1 - \alpha_1\rangle$ hervor, wobei für $E_{-\alpha_2}$ kein derartiger Zustand ($E_{\alpha_2}|\lambda_1\rangle = 0$) mehr existiert (siehe Abb. 1).
Weiterhin gilt für den neuen Zustand $|\lambda - \alpha_1\rangle$ gilt immer noch $p = 0$:

$$E_{\alpha_j}(E_{-\alpha_i})|\lambda_1\rangle) = [E_{\alpha_j}, E_{-\alpha_i}]|\lambda_1\rangle + E_{-\alpha_i}E_{\alpha_j}|\lambda_1\rangle = 0 \qquad \text{für } i \neq j$$

Dies ist der Fall, da der Kommutator Null ergibt (siehe Gl. (4)) und ebenfalls $E_{\alpha_j}|\lambda_1\rangle = 0$.
Schreibt man nun den Zustand $\mu = \lambda_1 - \alpha_1$ als linear Kombination der fundamentalen Gewichte λ_i aus, erhält man für die Koeffizienten $m_1 = -1$ und $m_2 = 1$. Man wende nun $E_{-\alpha_2}$ darauf an:

$$E_{-\alpha_2}|\mu\rangle = -E_{-\alpha_2}|\lambda_1\rangle + E_{-\alpha_2}|\lambda_2\rangle = 0 + E_{-\alpha_2}|\lambda_2\rangle \propto |\lambda_2 - \alpha_2\rangle = |-\lambda_2\rangle$$

Der vorletzte Schritt folgt aus derselben Überlegung für λ_2 wie für λ_1, dass es noch einen "tieferen" Zustand geben muss:

$$p = 0 \Rightarrow 2j + 1 = m_2 + 1 = 2$$

Nun wurden alle Zustände von dem höchsten Gewicht λ_1 unter Verwendung jeglicher Kombination von $E_{\pm\alpha_1}$ und $E_{\pm\alpha_2}$ erzeugt. Dieselbe Prozedur kann nun für λ_2 und $\lambda_1+\lambda_2$ analog durchgeführt werden, denn beides sind Zustände zu höchsten Gewichten, da $m_i \geq 0$.

Abb. 2: Dynkin-Diagramm-Notation von SU(3):
(a) Antiquark-Triplett $\overline{3}$: $m_1 = 0, m_2 = 1$, (b) Quark-Triplett 3: $m_1 = 1, m_2 = 0$

Durch die folgenden Anweisungen kann man nun die Vorgehensweise um alle Gewichte zu erhalten, die durch die Anwendung des Absteigeoperators $E_{-\alpha_j}$ auf ein fundamentale Gewicht λ_i resultieren, zusammenfassend beschreiben:

1. Bestimmung der fundamentalen Gewichts λ_i (mithilfe der einfachen Wurzeln und Gl. (12))

2. Berechnung der Anzahl an Zuständen $2j$, die aus der Anwendung eines Absteigeoperators $E_{-\alpha_j}$ auf λ_i resultieren (mit Gl. (15))

3. Berechnung aller dazugehörigen Gewichte unter Berücksichtigung der Anzahl $2j + 1$ durch $\mu_k = \lambda_i - k\alpha_j$ mit $k = 1, ..., 2j$

Es wurde nun also gezeigt wie man alle Gewichte mithilfe von höchsten Gewichten erzeugt. Im Folgenden werden die Matrizen der Darstellungen durch die Berechnung der Proportionalitätskonstanten bestimmt.

3 Matrix der Proportionalitätskonstanten von E_α:

Um die darstellenden Matrize zu bestimmen müssen die Proportionalitätskonstanten berechnet werden:

$$\begin{aligned} E_{-\alpha} |\mu\rangle &= N_{-\alpha,\mu} |\mu - \alpha\rangle \\ \Rightarrow N_{-\alpha,\mu} &= \langle\mu - \alpha| E_{-\alpha} |\mu\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

Weiterhin gilt:

$$\langle\mu| [E_\alpha, E_{-\alpha}] |\mu\rangle = \langle\mu| \alpha H |\mu\rangle = \alpha\mu \qquad \text{mit Gl. (3)}$$

Gleichzeitig gilt aber auch mit $E_{-\alpha} = E_\alpha^\dagger$:

$$\begin{aligned}
\langle\mu|\,[E_\alpha, E_{-\alpha}]\,|\mu\rangle &= \langle\mu|\,E_\alpha E_{-\alpha}\,|\mu\rangle - \langle\mu|\,E_{-\alpha}E_\alpha\,|\mu\rangle \\
&= \langle E_{-\alpha}\mu|\,E_{-\alpha}\,|\mu\rangle - \langle E_\alpha\mu|\,E_\alpha\,|\mu\rangle \\
&= |N_{-\alpha,\mu}|^2\,\langle\mu-\alpha|\mu-\alpha\rangle - |N_{\alpha,\mu}|^2\,\langle\mu+\alpha|\mu+\alpha\rangle \\
&= |N_{-\alpha,\mu}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 \\
&= |N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 = \alpha\mu
\end{aligned} \tag{17}$$

Wobei beim vorletzten Gleichzeichen $N_{-\alpha,\mu} = N^*_{\alpha,\mu-\alpha}$ verwendet wurde. Dies folgt aus:

$$N_{-\alpha,\mu} = \langle\mu-\alpha|\,E_{-\alpha}\,|\mu\rangle = (\langle\mu|\,E_\alpha\,|\mu-\alpha\rangle)^\dagger = N^*_{\alpha,\mu-\alpha}$$

Nimmt man nun einen Zustand eines höchsten Gewichts $|\mu\rangle$, entstehen durch den Absteigeoperator $E_{-\alpha}$ alle möglichen Zustände $|\mu\rangle\,, ...,\ |\mu - q\alpha\rangle$ mit $q = \frac{2\mu\alpha}{\alpha}$, sodass man folgende Menge an Gleichungen erhält:

$$\begin{array}{lcll}
|N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 & - & 0 & = \alpha\mu \\
|N_{\alpha,\mu-2\alpha}|^2 & - & |N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 & = \alpha(\mu-\alpha) \\
|N_{\alpha,\mu-3\alpha}|^2 & - & |N_{\alpha,\mu-2\alpha}|^2 & = \alpha(\mu-2\alpha) \\
\quad ... & & \quad ... & \quad ... \\
|N_{\alpha,\mu-(b+1)\alpha}|^2 & - & |N_{\alpha,\mu-b\alpha}|^2 & = \alpha(\mu-b\alpha) \\
\quad ... & & \quad ... & \quad ... \\
\quad 0 & - & |N_{\alpha,\mu-q\alpha}|^2 & = \alpha(\mu-q\alpha)
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich nun lösen mit $b \in \{0, 1, ..., q\}$:

$$\begin{aligned}
|N_{\alpha,\mu-b\alpha}|^2 = -\alpha(\mu-b\alpha) + |N_{\alpha,\mu-(b+1)\alpha}|^2 &= -\alpha(\mu-b\alpha) - ... - |N_{\alpha,\mu-q\alpha}|^2 \\
&= -\sum_{s=b}^{q}\alpha(\mu-s\alpha) \\
&= -\frac{1}{2}(q-b+1)(2\alpha\mu - \alpha^2(q+b)) \\
&= \frac{1}{2}\alpha^2 r(q-b+1)
\end{aligned} \tag{18}$$

Diese Einträge sind bestimmt bis auf eine komplexe Phase. Durch Einsetzen von $q = 2j$ und $r = j - m$, erhält man im Wesentlichen denselben Faktor wie in Gl.(9). Dieselbe Vorgehensweise kann man für die Koeffizienten $N_{\alpha\beta}$ verweden.

4 Quellen:

1. H.F. Jones: Groups, Representations and Physics. Adam Hilger Ldt., 1990, S.190-197