Einführung – Gruppen, Beispiele, Konjugationsklassen

Fabian Rühle

21.10.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Definition von Gruppen und einfache Beispiele

Definition (Gruppe). Eine *Gruppe* G ist eine Menge von Elementen $\{a, b, c \dots\}$ mit einer Gruppenoperation $\circ$, $\circ : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \circ b$ mit folgenden Eigenschaften:

(G0) Abgeschlossenheit
Die Gruppe ist unter der Gruppenverknüpfung geschlossen: $\forall a, b \in G$ gilt: $a \circ b \in G$.

(G1) Assoziativität
Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

(G2) Neutrales Element
Es existiert ein neutrales Element $e \in G$ so dass für alle $a \in G$ gilt: $a \circ e = e \circ a = a$.

(G3) Inverses Element
Für alle $a \in G$ existiert ein inverses Element a^{-1} für das gilt: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Im Allgemeinen ist $a \circ b \neq b \circ a$. Falls $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ gilt, dann heißt G *abelsch* oder *kommutativ*. In [1] wird die Gruppenoperation $\circ$ als Multiplikation geschrieben (und entsprechend weggelassen). Je nach Darstellung bietet sich ggf. auch die Schreibweise der Addition an. Je nach Schreibweise werden dann auch die Einheitselemente 1 oder 0 genannt und die Inversen a^{-1} oder (seltener) $-a$.

Bemerkungen

i.) Das neutrale Element ist eindeutig: Seien e, e' neutrale Elemente, so gilt $e \circ e' = e'$ und $e \circ e' = e$ und somit $e = e'$.

ii.) Das inverse Element ist eindeutig: Seien a', a'' invers zu a, so gilt:
$a' = a' \circ (a \circ a'') = (a' \circ a) \circ a'' = a''$.

iii.) Es gilt die *Kürzungsregel*: $a \circ b = a \circ c \;\Rightarrow\; b = c$, was direkt nach Linksmultiplikation mit a^{-1} folgt.

Definition (Kardinalität). Die *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* $|G|$ einer Gruppe G ist die Anzahl der Gruppenelemente.

Definition (Ordnung). Die *Ordnung* eines Gruppenelements a einer endlichen Gruppe G ist die kleinste positive natürliche Zahl n für die gilt $a^n = e$.

Beispiele

1. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden eine Gruppe unter Addition. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden keine Gruppe unter Addition da für $a \in \mathbb{N}$ im Allgemeinen $-a \notin \mathbb{N}$.

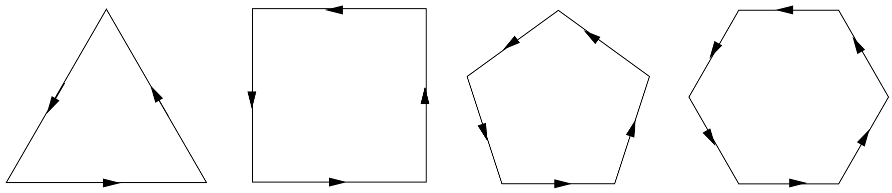
2. Die geraden ganzen Zahlen $2\mathbb{Z}$ bilden eine Gruppe unter Addition. Die ungerade ganzen Zahlen bilden keine Gruppe unter Addition, da sie nicht abgeschlossen sind.

3. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden eine Gruppe unter Addition aber nicht unter Multiplikation, da 0 kein Inverses hat.

2 Die zyklische Gruppe C_n

Zyklische Gruppen treten in den unterschiedlichsten Bereichen der Mathematik und Physik auf. Sie finden beispielsweise in der Festkörperphysik Anwendung. Darüber hinaus sind sie ein einfaches Beispiel für abelsche Gruppen.

Definition (Zyklische Gruppe). Die *zyklische Gruppe* C_n ist die Symmetriegruppe der Rotationen eines regulären Polygons mit n gerichteten Kanten.



Die Symmetrieoperationen führen das Polygon in sich selbst über. Die Gruppenelemente sind genau die Rotationen um einen Winkel von $2\pi k/n$, $k = 0, 1, \dots n-1$ um eine Achse die durch das Zentrum und orthogonal zur Ebene verläuft in der das Polygon liegt. Wir nennen die Gruppenelemente C_n^k und führen die Notation $c = C_n^1$ ein. Es gilt dann $c^n = e$, da eine Rotation um 2π identisch mit keiner Rotation ist. Des Weiteren ist $C_n^k = c^k$ und die Gruppenelemente sind daher $\{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$.

Bemerkungen

i.) Die Gruppe wird durch c *erzeugt*, d.h. dass alle Gruppenelemente durch sukzessive Anwendung von c erhalten werden können. Man spricht daher vom *erzeugenden Produkt (generating product)* und schreibt $C_n = \mathrm{gp}\{c\}$.

ii.) Die Gruppe C_n ist abelsch da $c^r c^s = c^{r+s} = c^{s+r} = c^s c^r$.

iii.) Die Gruppe C_n ist *isomorph* (d.h. es gibt eine strukturerhaltende Bijektion zwischen den Gruppenelementen) zur Gruppe $\mathbb{Z}_n$ der ganzen Zahlen modulo n, $C_n \cong \mathbb{Z}_n$, vermöge der Identifikation $c^r \in C_n \leftrightarrow r \in \mathbb{Z}_n$. Beachte dass $\mathbb{Z}_n$ eine Gruppe unter Addition ist.

Die Gruppenstruktur lässt sich auch mit Hilfe einer *Verknüpfungstafel* darstellen. Aufgrund der Kürzungseigenschaft tauchen in jeder Zeile und jeder Spalte jedes Element nur einmal auf. Die Verknüpfungstafel abelscher Gruppen ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen. Die Verknüpfungstafel von C_3 ist beispielsweise

g_1 \ g_2	e	c	$b(=c^2)$
e	e	c	b
c	c	b	e
b	b	e	c

3 Die Diedergruppe D_n

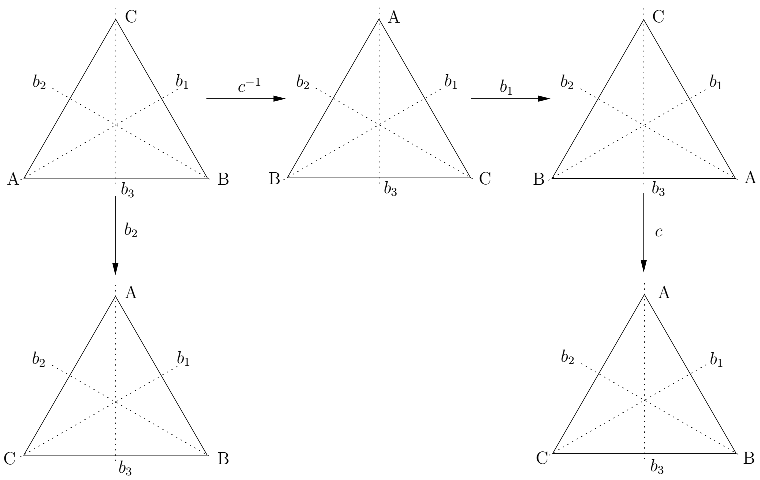
Die Diedergruppe findet ihre Anwendungen beispielsweise in der Molekülphysik.

Definition (Diedergruppe). Die *Diedergruppe D_n* ist die Symmetriegruppe der Rotationen eines regulären Polygons mit n ungerichteten Kanten.

Neben den n Drehungen, welche schon Symmetrietransformationen von C_n sind, hat die Diedergruppe noch n Spiegelungen (welche die Orientierung umkehren und daher nicht in C_n sind) als Symmetrietransformationen. Daher ist C_n eine *Untergruppe*[1] von D_n. Im Gegensatz zu C_n ist D_n nicht abelsch.

Beispiel D_3

In der Notation von Abschnitt 2 sind die Elemente von D_3 durch e, c, c^2 sowie durch die Spiegelungen b_1, b_2, b_3 entlang der Mittelsenkrechten der Kanten gegeben. Spiegelungen sind *Inversionen*, d.h. $b_i^2 = e$. Unter Rotation um c geht b_i in b_{i+1} (mod 3) über. Es gilt daher beispielsweise $b_2 = c\, b_1\, c^{-1}$. Dies ist ein Beispiel für *Konjugation*, wie wir in Abschnitt 5 sehen werden.



[1]Untergruppen werden im Vortrag nächste Woche behandelt.

Des Weiteren ist $b_{i+1} = b_i\,c$. Mit der Bezeichnung $b = b_1$ gilt vermöge dieser Eigenschaften $D_3 = \mathrm{gp}\{b, c\}$. Dies legt die Gruppe nicht vollständig fest. Wie bereits erwähnt ist D_n nicht abelsch und daher insbesondere $cb \neq bc$. Es gilt

$$b_2 = cbc^{-1} = bc \qquad \Rightarrow \qquad cb = bc^2\,.$$

Alternativ (oder als Konsistenzcheck) folgt diese Kommutatorrelation auch aus

$$e = b_2^2 = (bc)^2 = b(cb)c = b(bc^2)c = b^2c^3$$

Die Gruppenelemente sind daher $\{e, c, c^2, b, bc, bc^2\}$ und $D_3 = \mathrm{gp}\{b, c\}$ mit $c^3 = b^2 = (bc)^2 = e$.

Bemerkung

Die Struktur verallgemeinert sich für beliebige D_n zu $D_n = \mathrm{gp}\{b, c\}$ mit $c^n = b^2 = (bc)^2 = e$.

4 Die Permutationsgruppe S_n

Die Permutationsgruppe trifft in vielen physikalischen Systemen auf, die ununterscheidbare Komponenten besitzen. Aufgrund des *Satzes von Cayley* kommt ihr eine besondere Rolle unter den endlichen Gruppen zu.

Definition (Permutationsgruppe). Die *Permutationsgruppe* S_n besteht aus allen Permutationen von n Objekten.

Die Gruppenverknüpfung ist die Hintereinanderausführung der Permutationen. Die Gruppe ist nicht abelsch. Permutationen P, welche Objekte i, $i = 1, 2, \ldots, n$ in Objekte p_i überführen, werden oft wie folgt geschrieben:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}\,.$$

In dieser Notation sind das neutrale Element e und das inverse Element P^{-1} gegeben durch

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}\,, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}\,.$$

Offensichtlich spielt die Reihenfolge der Spalten keine Rolle (die Spalten haben also selbst eine Permutationssymmetrie).

Eine andere gebräuchliche Schreibweise ist die *Zykelschreibweise*. Ein *Zykel* ist die sukzessive Anwendung von Permutation auf ein Element p_i, bis dieses wieder in sich selbst übergeht. Man geht dann induktiv vor und startet einen weiteren Zykel mit einem Element welches nicht in den vorherigen Zykeln enthalten ist, bis jedes Element einem Zykel zugeordnet ist. Die so entstandenen Zykel sind *disjunkt*, d.h. jedes Element gehört zu genau einem Zykel.

Beispiel S_4

Wir betrachten folgende Permutation in S_4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Permutation enthält die zwei Zykel $1 \to 3 \to 4 \to 1$ und $2 \to 2$. Unter Permutation der Spalten kann dies geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da die zweite Zeile eindeutig durch die erste bestimmt ist wird sie weggelassen und man schreibt (1 3 4)(2) für diese Permutation in Zykelschreibweise. Manchmal werden auch triviale Zykel (d.h. Zykel der Länge 1) weggelassen und man schreibt die Permutation als (1 3 4).

Bemerkungen

i.) Zykel der Länge 2 heißen *Transpositionen*.

ii.) Jede Permutation der Ordnung n lässt sich als Verkettung von $n-1$ Transpositionen schreiben vermöge $(p_1\ p_2\ p_3\ \dots\ p_n) = (p_1\ p_2)(p_2\ p_3)\dots(p_{n-1} p_n)$.

iii.) Es gilt $C_2 \cong S_2$. Darüber hinaus findet man $D_3 \cong S_3$ mittels der Identifikation $\{(); (2\ 3), (3\ 1), (1\ 2); (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \leftrightarrow \{e; b, bc, bc^2, c, c^2\}$.

Satz (Cayley). Jede endliche Gruppe der Kardinalität n ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

Beweis. Der Satz folgt aus der Tatsache dass die Multiplikation aller Gruppenelemente $a_i \in G$ mit einem festen Gruppenelement g diese permutiert,

$$\{ga_1, ga_2, \dots, ga_n\} = \{a_{\pi_1}, a_{\pi_2}, \dots, a_{\pi_n}\}\,.$$

Wir können daher jedem Gruppenelement g eine Permutation $P(g)$ zuordnen,

$$g \mapsto P(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}$$

Aus der Abgeschlossenheit sowie den Bemerkungen in Abschnitt 1 folgt dass diese Zuordnung bijektiv ist. Des Weiteren bleibt die Gruppenstruktur erhalten, denn mit $g_1 \leftrightarrow P(g_1)$ und $g_2 \leftrightarrow P(g_2)$ gilt $g_1 g_2 \leftrightarrow P(g_1)P(g_2)$. $\square$

Die Permutation ist auch direkt aus der Verknüpfungstafel ersichtlich. Beachte dass unter obigem Isomorphismus immer nur n der $n!$ Elemente der Permutationsgruppe den Gruppenelementen zugeordnet werden, weshalb eine (endliche) Gruppe im Allgemeinen nur eine Untergruppe von S_n ist.

Definition (Alternierende Gruppe). Die *alternierende Gruppe* A_n besteht aus allen *geraden* Permutationen, d.h. aus allen Permutationen die sich in eine gerade Anzahl von Transpositionen zerlegen lassen.

Bemerkung

Dies ist eine Gruppe da das Produkt zweier gerader Permutationen gerade ist.

5 Konjugation, Äquivalenz und Äquivalenzklassen

Äquivalenzklassen sind sehr wichtig in der Physik und Mathematik, da sie es erlauben, ähnliche Objekte in Klassen zu unterteilen und dann gegebenenfalls nur ein Objekt jeder Klasse zu untersuchen (anstatt der Menge aller Objekte).

Definition (Konjugation). Zwei Elemente a, b einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls ein Element $g \in G$ existiert so dass $a = gbg^{-1}$. Das Element g heißt *konjugierendes Element.*

Beachte, dass das konjugierende Element im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Konjugation ist ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation.

Definition (Äquivalenzrelation). Eine *Äquivalenzrelation* bestimmt einen Satz von Regeln unter denen zwei Elemente a, b einer Menge M als äquivalent angesehen werden. Die Äquivalenz wird geschrieben als $a \sim b$. Die Relation muss folgende Eigenschaften erfüllen:

(Ä1) Reflexivität
Jedes Element ist äquivalent zu sich selbst: $a \sim a$.

(Ä2) Symmetrie
Wenn a äquivalent zu b ist, so ist b äquivalent zu a: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.

(Ä3) Transitivität
Wenn a äquivalent zu b und b äquivalent zu c ist, so ist a äquivalent zu c:
$a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Beispiele

1. Die Relation "Zwei Gleichungen sind äquivalent wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gleichungen.
2. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Es sei $a \sim b$, wenn
   - $a < b$. Dies ist keine Äquivalenzrelation, sie verletzt (Ä1) und (Ä2).
   - $a \leq b$. Dies ist keine Äquivalenzrelation, sie verletzt (Ä2).
   - $a = b$. Dies ist eine Äquivalenzrelation.
3. Konjugation ist eine Äquivalenzrelation auf einer Gruppe G:
   - (Ä1) ist erfüllt mit $a = eae^{-1}$.
   - (Ä2) ist erfüllt, denn mit $a = gbg^{-1}$ für ein $g \in G$ ist $b = g^{-1}ag$, d.h. g^{-1} ist das konjugierende Element für die Äquivalenz $b \sim a$.
   - (Ä3) ist erfüllt, denn mit $a = gbg^{-1}$ und $b = hch^{-1}$ für $g, h \in G$ ist $a = g(hch^{-1})g^{-1} = (gh)c(gh)^{-1}$, d.h. gh ist das konjugierende Element für die Äquivalenz $a \sim c$.

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge erlaubt die Zerlegung dieser Menge in disjunkte *Äquivalenzklassen.*

Definition (Äquivalenzklasse). Eine *Äquivalenzklasse* eines Elements a einer Menge M mit gegebener Äquivalenzrelation ist die Menge aller Elemente $b \in M$ die äquivalent zu a sind, $(a) = \{b \mid b \sim a\}$.

Definition (Konjugationsklasse). Die Äquivalenzklassen der Konjugation heißen *Konjugationsklassen* und sind gegeben durch $(a) = \{b \mid b = gag^{-1}$ für ein $g \in G\}$.

Bemerkung

Für abelsche Gruppen definiert jedes Element seine eigene Konjugationsklasse, denn es gilt $a = gag^{-1} = gg^{-1}a = a$.

Beispiele

1. Die zyklischen Gruppen C_n ist abelsch. Daher definiert jedes Element seine eigene Äquivalenzrelation.

2. Die Diedergruppe D_3 hat drei Konjugationsklassen:

   - (e), welches immer eine eigene Konjugationsklasse ist vermöge $e = geg^{-1}$.
   - (c, c^2), denn c ist zu c^2 konjugiert mit konjugierendem Element b, da gilt $bcb^{-1} = b(cb) = b(bc^2) = c^2$.
   - (b, bc, b^2c), welche die Spiegelungen b_1, b_2, b_3 sind.

3. Für die Permutationsgruppen S_n sind die Konjugationsklassen durch die Zykel gegeben. Man ordne für eine Permutation

$$P = (a_1\ a_2\ \dots\ a_{l_1})(b_1\ b_2\ \dots\ b_{l_2})(c_1\ c_2\ \dots\ c_{l_3})\dots$$

   die Zykel so, dass $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \dots \geq l_r$ ist. Dies gibt eine *Zerlegung* von n, d.h. eine Menge geordneter natürlicher Zahlen l_i mit $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$. Die Konjugationsklassen sind nun gegeben durch die verschiedenen Zerlegungen von n. Betrachte zwei Elemente $P, P' \in S_n$ mit derselben Zykelstruktur,

$$P = (a_1\ a_2\ \dots\ a_{l_1})(b_1\ b_2\ \dots\ b_{l_2})\dots\,, \qquad P' = (A_1\ A_2\ \dots A_{l_1})(B_1\ B_2\ \dots B_{l_2})\,.$$

   Diese Permutationen sind in derselben Konjugationsklasse, vermöge der Konjugation

$$\begin{aligned} QPQ^{-1} = &\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{l_1} & b_1 & b_2 & \dots & b_{l_2} & \dots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{l_1} & B_1 & B_2 & \dots & B_{l_2} & \dots \end{pmatrix} (a_1\ a_2\ \dots\ a_{l_1})(b_1\ b_2\ \dots\ b_{l_2})\dots \\ &\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{l_1} & B_1 & B_2 & \dots & B_{l_2} & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{l_1} & b_1 & b_2 & \dots & b_{l_2} & \dots \end{pmatrix} \\ = &\ (A_1\ A_2\ \dots A_{l_1})(B_1\ B_2\ \dots B_{l_2})\dots = P'\,. \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Gruppen sind abgeschlossen, assoziativ und haben ein eindeutiges neutrales Element sowie eindeutige inverse Elemente. Gruppen, deren Elemente kommutieren, heißen abelsch.
- Die zyklische Gruppe C_n ist die Symmetriegruppe der gerichteten Polygone. Sie ist abelsch und isomorph zu $\mathbb{Z}_n$.
- Die Diedergruppe D_n ist die Symmetriegruppe der ungerichteten Polygone. Sie ist nicht-abelsch und hat C_n als Untergruppe.
- Die Permutationsgruppe S_n enthält alle n! Permutationen von Objekten. Permutationen der Länge 2 heißen Transpositionen. Alle geraden Permutationen bilden die alternierende Gruppe.
- Der Satz von Cayley besagt dass jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe ist.
- Äquivalenzrelationen sind reflexiv, symmetrisch und transitiv. Konjugation ist eine Äquivalenzrelation. Äquivalenzrelation erlauben die Einteilung in Äquivalenzklassen.

Literatur

[1] H. F. Jones *Groups, Representations and Physics.* Taylor & Francis Group 1998.