Aufgabe 1

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} , \qquad C = (\delta \; \epsilon \; \phi) \; ,$$

wobei alle Matrixelemente reelle Zahlen seien.

a) Berechnen Sie $A \cdot B$, $C \cdot A$, $B \cdot C$, $C \cdot B$.

b) Berechnen Sie A^T. Für welche Werte von $a, \ldots, i$ ist A symmtrisch bzw. schiefsymmetrisch?

c) Berechnen Sie $\det(A)$ wenn A symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist.

d) Berechnen Sie $\mathrm{Sp}(A)$ und $\mathrm{Sp}(B \cdot C)$.

Aufgabe 2

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} , \quad a \in \mathbb{R} \; .$$

i) Berechnen Sie $A^2 = A \cdot A$ und $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

ii) Berechnen Sie $A^n, n \in \mathbb{N}$ indem Sie einen geeigneten Ansatz für A^{n-1} machen und dann $A \cdot A^{n-1}$ berechnen (Vollständige Induktion).

b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \; .$$

i) Zeigen Sie $\det(A) = (c - b)(b - a)(c - a)$.

ii) Für welche Werte von a, b, c gilt $\mathrm{rg}(A) = 3, \mathrm{rg}(A) = 2, \mathrm{rg}(A) = 1$?

Aufgabe 3

Eine orthogonale $n \times n$ Matrix O erfüllt $O \cdot O^T = \mathbf{1}$. ($\mathbf{1}$ sei die Einheitsmatrix.)

a) Zeigen Sie $\det(O) = \pm 1$.

b) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier orthogonaler Matrizen O_1, O_2 orthogonal ist.

c) Zeigen Sie, dass die inverse Matrix O^{-1} orthogonal ist.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} , \qquad O = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} , \qquad a \in \mathbb{R} , \quad \phi \in [0, \tfrac{1}{2}\pi] .$$

a) Berechnen Sie $O^T \cdot A \cdot O$

b) Berechnen Sie $\det(O^T \cdot A \cdot O)$ und $\mathrm{Sp}(O^T \cdot A \cdot O)$.

c) Bestimmen Sie ϕ so das $O^T \cdot A \cdot O$ eine Diagonalmatrix D ist und berechnen Sie die Matrixelemente von D. (Ergebnis: $\pm a$.)

d) Berechnen Sie die inversen Matrizen von A und D.