Universität Hamburg, Department Physik

Übungsblatt 6 Mathematischen Grundlagen der Physik WS 11/12

Aufgabe 1

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ seien Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$,

b) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \sin^2 \phi$,

c) $S(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = S(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = S(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \quad$ für $\quad S(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Aufgabe 2

a) Gegeben sei eine Gerade $\underline{g}$ durch den Ursprung im $\mathbb{R}^n$ in der Paramterdarstellung

$$\underline{g} = \alpha \, \underline{v} \ , \qquad \text{mit} \quad |\underline{v}| = 1 \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

i) Welcher Punkt $\underline{g}_0$ auf der Geraden hat den minimalen Abstand von einem festen Vektor $\underline{u}$? *Hinweis*: Minimieren Sie $|\underline{g} - \underline{u}|^2$.

ii) Berechnen Sie $\underline{v} \cdot (\underline{u} - \underline{g}_0)$. Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

b) Gegeben sei eine Ebene $\vec{E}$ im $\mathbb{R}^3$ in der Paramterdarstellung

$$\vec{E} = \alpha \, \vec{v} + \beta \vec{w} \ , \qquad \text{mit} \quad |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1 \ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

Berechnen Sie $\vec{n} \cdot \vec{E}$ für $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$. Welche geometrische Bedeuting hat $\vec{n}$?

Aufgabe 3

Der Drehimpuls $\vec{L}$ eines Teilchens mit Masse m ist definiert als $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$, wobei $\vec{r}(t)$ der Ortsvektor und $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist.

a) Zeigen Sie

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} \; .$$

b) Berechnen Sie $\dot{\vec{L}}$ für $\vec{F} = f(|\vec{r}|)\, \vec{r}$.

c) Was können Sie über die Bewegung des Teilchens aussagen falls $\dot{\vec{L}} = 0$ gilt?

Hinweis: Berechnen Sie $\vec{L} \cdot \vec{r}$ und $\vec{L} \cdot \dot{\vec{r}}$.

d) Berechnen Sie $\vec{L}$ für die Bewegung

$$\vec{r}(t) = r(t) \cos\phi(t)\, \vec{e}_x + r(t) \sin\phi(t)\, \vec{e}_y \; ,$$

und zeigen Sie $\vec{L} = mr^2 \dot{\phi}\, \vec{e}_z$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Wegintegral

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

für

a) $\vec{F} = x^2 y\, \vec{e}_x + y^2\, \vec{e}_y$ entlang des Wegs $\vec{r} = t\, \vec{e}_x + t^2\, \vec{e}_y$ für $0 \leq t \leq 1$. (Ergebnis: $W = \frac{8}{15}$.)

b) $\vec{F} = (y - x)\, \vec{e}_x - y\, \vec{e}_y + \vec{e}_z$ entlang des Wegs $\vec{r} = \cos(t)\, \vec{e}_x + \sin(t)\, \vec{e}_y$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. (Ergebnis: $W = -\pi$.)

c) $\vec{F} = x\, \vec{e}_x + y\, \vec{e}_y + z\, \vec{e}_z$ entlang der Wege:

i) $\vec{r}_1 = t(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ für $0 \leq t \leq 1$ (Ergebnis: $W = 3/2$).

ii) $\vec{r}_2 = t\, \vec{e}_x + t^2\, \vec{e}_y + t^4\, \vec{e}_z$ für $0 \leq t \leq 1$ (Ergebnis: $W = 3/2$).