

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution die Stammfunktionen folgender Funktionen ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} i) f(x) &= (\alpha x + \beta)^{\frac{n}{2}}, & ii) f(x) &= x\sqrt{x^2 + \alpha^2}, \\ iii) f(x) &= x \ln(\alpha x^2 + \beta), & iv) f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{\alpha + \cos x}}. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution und partieller Integration die Stammfunktionen folgender Funktionen ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$i) f(x) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad ii) f(x) = \sin(\ln x).$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

$$\begin{aligned} i) \int_0^\infty x e^{-x^2} dx, & \quad ii) \int_1^a \frac{2x}{x^2 - 1} dx, & \quad iii) \int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx, \\ iv) \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx, & \quad v) \int_{a>1}^\infty \frac{1}{x^2 - 1} dx. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung folgende Integrale:

$$\begin{aligned} i) \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \\ ii) \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx, \\ iii) \int \frac{x^3 + 1}{x(x^2 - 5)^2} dx, \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie in *iii)* an geeigneter Stelle $\int \frac{1}{(x^2-5)^2} dx = \int \frac{x^2-5+x^2}{(x^2-5)^2} dx$ und integrieren Sie dann den letzten Term partiell.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Fourierreihe für folgende Funktionen

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ A & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

b)

$$f(x) = x^2, \quad \text{für } -\pi \leq x < \pi, \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$