Übungsblatt 2 Mathematischen Grundlagen der Physik WS 11/12

Aufgabe 1

Berechnen Sie Ableitungen folgender Funktionen:

i) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$,

ii) $f(x) = \cot x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$,

iii) $f(x) = \tanh x$, $x \in \mathbb{R}$,

iv) $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$,

v) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, $x \in [-1, 1]$,

Zeigen Sie

vi) $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

Aufgabe 2

Bestimmen Sie lokale und absolute Extrema folgender Funktionen:

a) $f(x) = x^4 + ax^2 + b$, $x, a, b \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = \frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}$, $x \neq a, b$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

$$a_n = \frac{n}{n+1} , \qquad a_n = \frac{n}{2^n} , \qquad a_n = (1 - \tfrac{1}{n})^n .$$

Hinweis: Benutzen bei der dritten Folge die e-Funktion.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Reihen:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Hinweis: Benutzen Sie $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$ und schreiben Sie die Glieder explizit aus.

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a}{b^{k+1}}$, $b > 1$.

Hinweis: Benutzen Sie die geometrische Reihe.

c) Geben Sie mit Hilfe der geometrische Reihe eine Reihendarstellung der folgenden Funktionen an

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \ , \ |x| < 1 \ , \qquad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \ , \ |x| < 1 \ .$$

Hinweis: Benutzen Sie $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}$.

d) Für welche x konvergiert die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{a^{k-1}} \ , \qquad a \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

und berechnen Sie im Konvergenzbereich $f(x)$.

Hinweis: Benutzen Sie die geometrische Reihe.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Taylorreihe für $x_0 = 0$ für folgende Funktionen:

$$i)\ f(x) = \sin x \ , x \in \mathbb{R} \ , \quad ii)\ f(x) = \sqrt{1+x} \ , \ |x| < 1 \ , \quad iii)\ f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} \ , \ |x| < 1 \ .$$

Hinweis: Benutzen sie für *iii)* das Ergebnis aus der Vorlesung.

b) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Reihenentwicklung folgende Grenzwerte:

$$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 1}{x} \ , \qquad ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{1-\cos x} \ ,$$

c) Berechnen Sie die folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \ , \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \ , \qquad \lim_{x\to\infty} x \ln\frac{x-a}{x-b} \ , \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \ .$$