Übungsblatt 10 Mathematischen Grundlagen der Physik WS 11/12

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den Gradienten für folgende Funktionen

$$i) \quad f(x,y) = 2\ln\sqrt{x^2+(y-1)^2}\ , \qquad ii) \quad g(x,y) = ae^{xy}\ , \quad a \in \mathbb{R}\ .$$

b) Berechnen Sie für $f(x,y)$ aus $i)$ die Richtungsableitung im Punkt $(x,y) = (-1,2)$ und in Richtung des Vektors $\underline{n} = 3\underline{e}_x + 4\underline{e}_y$. (Ergebnis:$\frac{1}{5}$)

c) Berechnen Sie für $g(x,y)$ aus $ii)$ die Richtungsableitung im Punkt $(x,y) = (2,1)$ entlang der Richtung, die mit der x-Achse einen Winkel von 135^0 bildet. (Ergebnis: $\frac{ae^2}{\sqrt{2}}$)

d) Gegeben seien der Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ und ein konstanter Vektor $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$. Zeigen Sie:

$$i) \quad \vec{\nabla} r = \hat{r}\ , \qquad \text{für} \quad r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}\ ,$$

$$ii) \quad \vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}\ ,$$

$$iii) \quad \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|}\ ,$$

$$iv) \quad \vec{\nabla}\ \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^5}(r^2\vec{a} - 3\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})),$$

$$v) \quad \vec{\nabla} r^n = nr^{n-2}\vec{r}\ , \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse von Übungsblatt 9, Aufgabe 2.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x^2) + \cos(y^2)\ , \qquad \text{für} \quad |x| \le \sqrt{\pi/2}\ , \quad |y| \le \sqrt{\pi}\ .$$

a) Bestimmen Sie alle (neun) kritischen Punkte von $f(x,y)$.

b) Berechnen sie die Hessematrix der 2. Ableitungen und werten Sie sie an den kritischen Punkten aus.

c) Für welche kritischen Punkte liegt ein Minimum, Maximum, Sattelpunkt vor bzw. für welche kritischen Punkte ist keine Aussage möglich? (Ergebnis: 2 Minima, 4 Sattelpunkte, 3 Punkte unbestimmt.)

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Mehrfachintegrale:

$$i)\ \int_{x=2}^{3}\int_{y=x}^{x^2}(x+2y)dydx \quad (=\tfrac{2747}{60})\ , \qquad ii)\ \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dydx \quad (=\pi)\ ,$$

$$iii)\ \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{1-x-y}(2x+y+z)dzdydx \quad (=\tfrac{1}{6})\ .$$

Hinweis: Benutzen Sie in *ii)* Polarkoordinaten.

Aufgabe 4

Gegeben seien ein konstanter Vektor $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$ sowie der Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ mit $r = |\vec{r}|$.

a) Berechnen Sie Divergenz und Rotation folgender Vektorfelder:

$$i)\ \vec{F} = \vec{a}\times\vec{r}\ , \qquad ii)\ \vec{F} = (2x+y)\vec{e}_x + (x+2yz)\vec{e}_y + (y^2+2z)\vec{e}_z\ , \qquad iii)\ \vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}\ .$$

b) Welche Vektorfelder in a) sind Gradientenfelder? Berechnen Sie für diese Vektorfelder das Potential U mit $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.