Universität Hamburg, Department Physik

Übungsblatt 1 Mathematischen Grundlagen der Physik WS 11/12

Aufgabe 1

Gegeben sei das Polynom

$$f(x) = x^2 + px + q \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ ,$$

wobei p, q beliebige reelle Zahlen seien ($p, q \in \mathbb{R}$).

a) Die Nullstellen einer Funktion $f(x)$ sind definiert als die Werte x_0 für die gilt $f(x_0) = 0$. Für welche Werte von p, q hat $f(x)$

   i) keine (reelle) Nullstelle,

   ii) eine Nullstelle,

   iii) zwei (reelle) Nullstellen ?

b) Zeichnen Sie qualitativ den Graphen $f(x)$ in den drei Fällen und geben Sie jeweils den Definitionsbereich und Wertebereich an.

c) Für welche Werte von p, q ist $f(x)$ symmetrisch?

d) Wie lautet die Umkehrfunktion von $f(x)$?

Aufgabe 2

Die sin- und cos-Funktionen erfüllen die Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \ , \qquad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \ .$$

a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \ , \qquad \sin 2x = 2 \cos x \sin x \ , \\ \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \ , \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \ . \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie

$$A \sin(x + a) = B \cos x + C \sin x \ , \qquad a, A, B, C \in \mathbb{R} \ ,$$

und bestimmen Sie B, C in Abhängigkeit von A, a. Drücken Sie auch umgekehrt A, a durch B, C aus.

c) Zeigen Sie

$$A_1 \sin(x + a_1) + A_2 \sin(x + a_2) = A_3 \sin(x + a_3) \ , \qquad a_{1,2,3}, A_{1,2,3} \in \mathbb{R} \ ,$$

und geben Sie A_3, a_3 in Abhängigkeit von A_1, A_2, a_1, a_2 an.

d) Zeigen Sie, dass für $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} = \sin(\arccos x) \ , \qquad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie

i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$,

ii) $\ln x^n = n \ln x$,

iii) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

iv) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$,

v) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n, \quad n \in \mathbb{N}$, ii) $\lim\limits_{x \to 0^\pm} \cot x$, iii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, iv) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1 - x^2}{1 + x}$,

v) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$, vi) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$, vii) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$,

Hinweis: Benutzen Sie in vii) die geometrische Summenformel

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} b^{i-1} \ .$$