Übungsklausur Theoretische Physik I WS 09/10

Lösen Sie 4 der folgenden 5 Aufgaben.

Aufgabe 1

Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Masse m und Reibungskoeffizient γ. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \qquad \gamma, \omega \in \mathbb{R} \ , \quad \gamma < \omega \qquad (*)$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $(*)$.

b) Für $t < 0$ ruht der Oszillator in seiner Gleichgewichtslage und bekommt dann einen konstanten Kraftstoß $F(t) = m f_0$ für $0 \leq t \leq T$. Bestimmen Sie $x(t)$ für $0 \leq t \leq T$.

c) Bestimmen Sie $x(t)$ für $t > T$ für den Fall $\gamma = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass $x(t = T)$ und $\dot{x}(t = T)$ stetig sind.

Aufgabe 2

Ein Teilchen mit Masse m bewege sich in der $x - y$ Ebene im Potenzial $U(r)$.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktionen für dieses System in Polarkoordinaten (r, φ) auf.

b) Welche zyklische Variable hat das System, wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße und zu welcher Symmetrie korrespondiert sie?

c) Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen für das System?

d) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für φ. Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für r in der Form

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr}$$

und berechnen Sie das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$.

e) U sei gegeben durch

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{h}{r^2} \ , \qquad \kappa > 0 \ , \quad h = \text{konstant} \ .$$

Für welche Werte von h sind stabile Kreisbahnen möglich und welchen Radius haben sie?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Ladungsdichte

$$\rho = q\Big(\delta(\vec{x}) - \frac{\alpha^3}{8\pi}\, e^{-\alpha r}\Big) \;, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie die Gesamtladung, die sich innerhalb einer Kugel mit Radius R befindet. Welche Ladung befindet sich im ganzen Raum?

   Hinweis: $\int r^2 e^{-\alpha r} dr = -e^{-\alpha r}(\frac{r^2}{\alpha} + \frac{2r}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3})$.

b) Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld mit Hilfe des Gaußschen Satzes im ganzen Raum.

c) Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld für das Potenzial

$$\Phi = q(a + \tfrac{b}{r} + \tfrac{c}{r^2})\, e^{-\alpha r} \;, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\;.$$

   Für welche a, b, c-Werte ergibt sich das in b) berechnete $\vec{E}$-Feld?

Aufgabe 4

Gegeben sei die die Stromdichte

$$\vec{j} \;=\; I\,\delta(R_\perp - r_\perp)\,\delta(z)\,\vec{e}_\varphi \;, \qquad r_\perp^2 = x^2 + y^2 \;, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \;,$$

wobei $I, R_\perp$ konstant sind.

a) Zeigen Sie zunächst, dass für $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ gilt: $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \;=\; \frac{1}{r} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{r^3} + \ldots$.

b) Benutzen Sie das Ergebnis aus a), um das von $\vec{j}$ hervorgerufene Vektorpotenzial $\vec{A}$ für $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ zu berechenen.

   Hinweis: Benutzen Sie $\int \vec{j}(\vec{x}')d^3x' = 0$ sowie $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$.

c) Schreiben Sie das Ergebnis aus b) in der Form $\vec{A} = \frac{1}{r^3}\,\vec{m} \times \vec{x}$ und bestimmen Sie so $\vec{m}$.

Aufgabe 5

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewege sich in einem elektromagnetischen Feld. Das $\vec{E}$ feld sei gegeben durch

$$\vec{E} = E_0\Big(\cos(kz - \omega t)\vec{e}_x + (\sin(kz - \omega t)\vec{e}_y\Big) \;, \qquad \omega = ck \;, \quad k, E_0 \in \mathbb{R}\;.$$

a) Berechnen Sie das zugehörige $\vec{B}$-Feld.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Teilchen in Komponenten auf.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens gilt $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = 0$.