Abgabe: 29.10

Aufgabe 1

An einem gedämpften eindimensionalen harmonischer Oszillator mit Frequenz ω und Reibungskoeffizient γ (siehe Aufgabe 2, Blatt 1) greift eine zusätzliche äußere Kraft der Form

$$F_A = k_A \cos(\Omega\, t)$$

mit konstantem k_A und konstantem Ω an.

a) Wie lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung?

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch den Ansatz

$$z_p(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \ .$$

und zeigen Sie

$$A = \frac{k_A(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \ , \qquad B = \frac{\gamma k_A \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \ .$$

Wann kommt es zur Resonanzkatastrophe?

c) Schreiben Sie $z_p(t)$ in der Form

$$z_p(t) = c \cos(\Omega t + \varphi)$$

und berechnen und skizzieren Sie c und φ als Funktion von Ω.

d) Zeigen Sie, dass $z(t) = z_p(t) + z_h(t)$ ebenfalls die Bewegunsggleichung erfüllt, falls z_h die Bewegungsgleichung für $F_A = 0$ löst. Warum ist $z(t)$ die allgemeinste Lösung? Wie verhält sich $z(t)$ für grosse t?

Aufgabe 2

Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluß der Kraft

$$\vec{F} = -k_x x \, \vec{e}_x - k_y y \, \vec{e}_y$$

a) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen auf und geben Sie die Lösungen an.

b) Wie lautet die potentielle Energie des Systems und wie seine Gesamtenergie?

c) Berechnen Sie für $k_x = k_y$ die Drehimpulskomponente L_z und $\dot{L}_z$.

Aufgabe 3

Auf ein Teilchen wirke die Kraft

$$\vec{F} = -B \frac{y}{\rho^2} \vec{e}_x + B \frac{x}{\rho^2} \vec{e}_y \; , \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 \; , \qquad B = \text{konstant} \; .$$

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

b) Berechnen Sie $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entlang einer geschlossenen Kreisbahn, die die z-Achse umschließt.

Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten ($x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z$).

c) Zeigen Sie, dass das Potential gegeben ist durch

$$U = -B \arctan(y/x) \; .$$

d) Warum ist $\vec{F}$ nicht konservativ?

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie den Impuls $p(t)$ für den eindimensionalen ungedämpften harmonischen Oszillator.

b) Zeigen Sie

$$\frac{p^2(t)}{a^2} + \frac{z^2(t)}{b^2} = 1 \; ,$$

und bestimmen Sie die Konstanten a, b. Welche 'Bahn' in der $z-p$–Ebene beschreibt der harmonische Oszillator?

c) Berechnen Sie die Energie E des harmonischen Oszillators, indem Sie E durch a und b ausdrücken. Zeigen Sie dann $\dot{E} = 0$.