

Aufgabe 1

- a) Gegeben sein ein stromdurchflossener unendlich langer Draht mit Querschnittsfläche πR_{\perp}^2 und Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi R_{\perp}^2} \Theta(R_{\perp} - r_{\perp}) \vec{e}_z, \quad r_{\perp}^2 = x^2 + y^2.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Stokeschen Satzes das magnetische Feld \vec{B} innerhalb und außerhalb des Drahtes.

- b) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment \vec{m} für eine stromdurchflossene Drahtschleife mit der Stromdichte

$$\vec{j} = I \delta(z) \delta(r_{\perp} - R_{\perp}) \vec{e}_{\varphi}.$$

Wie lautet das zugehörige \vec{B} -Feld? (Siehe Übungsblatt 11, Aufgabe 4.)

Aufgabe 2

Gegeben sei die Stromdichte

$$\vec{j} = C r \sin \theta \Theta(R - r) \vec{e}_{\varphi}, \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad C \in \mathbb{R},$$

wobei Θ die Stufenfunktion ist.

- a) Drücken Sie $j_x + i j_y$ durch Kugelfunktionen aus.
 b) Berechnen Sie das resultierende Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{x})$ für $|\vec{x}| > R$.

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung hergeleitete Entwicklung von $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ in Kugelfunktionen und benutzen Sie dann

$$\int Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{l'l} \delta_{m'm}.$$

- c) Berechnen Sie das magnetische Moment m_z von \vec{j} und vergleichen Sie das Resultat aus b) mit dem Vektorpotenzial vom m_z .

Aufgabe 3

Gegeben sei eine elektromagnetische Welle der Form

$$\vec{E} = \vec{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk, \quad \text{mit } \omega = ck, \quad A(k) = a e^{-\gamma^2(k-k_0)^2}, \quad a, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

- a) Wo liegt das Maximum von $A(k)$? Berechnen Sie die Halbwertsbreite Δk_0 durch die Vorschrift

$$A(k_0 + \frac{1}{2}\Delta k_0) = \frac{1}{e} A(k_0)$$

- b) Führen Sie explizit die k -Integration in $(*)$ durch, indem Sie den Exponenten geeignet quadratisch ergänzen (siehe Aufg. 4, Blatt 9).
- c) Bestimmen Sie das Maximum z_0 von $|\vec{E}|$ und berechnen Sie die Halbwertsbreite Δz_0 . Was stellt \vec{E} physikalisch dar?

Aufgabe 4

Gegeben sei ein in z -Richtung unendlich ausgedehnter, hohler, geerdeter Metallquader. Die Ausdehnung in x - und y -Richtung sei

$$0 \leq x \leq L_1, \quad 0 \leq y \leq L_2, \quad L_1 > L_2.$$

- a) Wie lauten die Randbedingungen für das elektrische Feld \vec{E} im Innern des Quaders.
- b) Wie lautet \vec{E} für eine im Innern des Quaders propagierende elektromagnetische Welle in z -Richtung?
- c) Zeigen Sie $\omega \geq \omega_0$ und bestimmen Sie ω_0 .
- d) Berechnen Sie \vec{E} und B_z für eine Welle mit minimalen $\omega \approx \omega_0$.