Übungsblatt 11 Theoretische Physik I WS 09/10

Abgabe: 14.1

Aufgabe 1

Berechnen Sie Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupolmoment für folgende Ladungsdichten:

a) $\rho = q\,\delta(y)\delta(z)\big(2\delta(x) - \delta(x+a) - \delta(x-a)\big)$,

b) homogen geladener Kreiszylinder mit Radius R und Länge L.

Hinweis: Legen Sie den Ursprung in den Mittelpunkt des Zylinders, nutzen Sie die Zylindersymmetrie und die Spurlosigkeit von Q_{ij} aus.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ eines Dipols $\vec{p}$ aus dem Potenzial

$$\Phi \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3}\;,$$

für $r \neq 0$. Welcher zusätzliche Term beschreibt das elektrische Feld am Ursprung? (Der numerische Koeffizient dieses Terms muss nicht berechnet werden.)

b) Gegeben sei ein Dipol $\vec{p}$ am Ursprung und ein zweiter Dipol mit entgegengesetztem Dipolmoment $-\vec{p}$ am Ort $\vec{x} = \vec{a}$. Berechnen Sie das führende Multipolmoment dieser Konfiguration durch Taylorentwicklung des Potenzials Φ in $\frac{\vec{a}}{|\vec{x}|} \ll 1$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in der Vorlesung berechneten Quadrupolmoment.

Aufgabe 3

Gegeben seien die elektromagnetischen Potenziale Φ und $\vec{A}$.

a) Zeigen Sie, dass immer eine Eichung existiert mit $\Phi = 0$ und geben Sie explizit den zugehörigen Parameter der Eichtransformation $\Lambda(\vec{x}, t)$ an.

b) Wie lautet $\vec{A}$ in dieser Eichung und welche Differenzialgleichungen erfüllt es?

c) Gegeben sei

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \qquad \text{mit} \qquad \vec{A}_0 \cdot \vec{k} = 0 \ , \quad \omega^2 = c\vec{k}^2 \quad \text{und} \quad \vec{A}_0, \vec{k} = \text{konstant} \ .$$

Für welche Φ erfüllt $\vec{A}$ die Lorentzeichung? Für welche ρ und $\vec{j}$ erfüllen Φ und $\vec{A}$ auch die Wellengleichungen?

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie die Identität

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \ ,$$

wobei $\vec{A}, \vec{B}$ beliebige Vektoren sind.

Hinweis: Zeigen Sie die Identität zunächst für die x-Komponente und vertauschen Sie dann zyklisch.

b) Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ für die Vektorpotenziale

$$\vec{A} = \tfrac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{x} \ , \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3} \ , \quad r \neq 0 \ ,$$

wobei $\vec{B}_0$ und $\vec{m}$ konstante Vektoren sind. Welcher zusätzliche Term ergibt sich (qualitativ) für $r = 0$?