Universität Hamburg, Department Physik

Klausur 1 Theoretische Physik I WS 09/10

Lösen Sie 4 der folgenden 5 Aufgaben. Termin: 18.2.2010

Aufgabe 1

Zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 wechselwirken in einem Potenzial

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -k_0 \ln |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \ , \qquad k_0 \in \mathbb{R} \ .$$

a) Berechnen Sie die Kraft, die zwischen den Teilchen wirkt.

b) Wie lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die beiden Teilchen?

c) Berechnen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Relativ- und Schwerpunktkoordinaten $\vec{r}, \vec{R}$.

Hinweis:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \ , \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ .$$

d) Zeigen Sie (durch eine Rechnung), dass die Energie der Schwerpunktsbewegung sowie die Energie der Relativbewegung beide erhalten sind.

e) Zeigen Sie (ebenfalls durch eine Rechnung), dass der Drehimpuls der Relativbewegung erhalten ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \tfrac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha mxy \ , \qquad \omega_0, \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

a) Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen.

b) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen aus a) durch den Ansatz

$$x = Ae^{i\omega t} \ , \qquad y = Be^{i\omega t}$$

und bestimmen Sie die erlaubten Eigenfrequenzen ω. Was sind die zugehörigen Eigenvektoren bzw. welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen A und B?

c) Wie lautet die allgemeinste Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen?

d) Finden Sie die Normalkoordinaten Q_1, Q_2 des Systems und geben Sie $L(\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, Q_1, Q_2)$ an.

Aufgabe 3

Auf zwei konzentrische Metallkugeln mit Radien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) liegen die Potenziale $\Phi(r = R_1) = \Phi_1$ und $\Phi(r = R_2) = \Phi_2$ an, wobei $\Phi_{1,2}$ beide konstant sind. Es gelte außerdem $\Phi(r \to \infty) = 0$.

a) Bestimmen Sie Φ im ganzen Raum.

   Hinweis: Nutzen Sie die Kugelsymmetrie des Problems, um

   $\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ zu vereinfachen.

b) Berechnen Sie die induzierte Gesamtladung Q_1, Q_2 auf beiden Kugeln.

   Hinweis: $\sigma = \epsilon_0 (\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial r})$.

c) Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ in Abhängigkeit von Q_1 und Q_2 im ganzen Raum an.

Aufgabe 4

Gegeben sei das Vektorpotenzial einer elektromagnetischen Welle

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \, \frac{1}{r} \, e^{i(kr - \omega t)} \; , \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \; , \quad \omega = ck \, , \quad k, \in \mathbb{R} \; ,$$

wobei $\vec{A}_0$ konstant ist.

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ in kartesischen Koordinaten.

b) Berechnen Sie zur führenden Ordnung in $\frac{1}{r}$ das zugehörige skalare Potential Φ in der Lorentzeichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$.

c) Berechnen Sie ebenfalls zur führenden Ordnung in $\frac{1}{r}$ das elektrische Feld $\vec{E}$.

Aufgabe 5

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewege sich in der $x - y$-Ebene in einem homogenen $\vec{B}$-Feld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\vec{x}_0(t) = \vec{e}_x A \sin \omega t + \vec{e}_y A \cos \omega t \; , \qquad A \in \mathbb{R} \; ,$$

   die Bewegungsgleichungen erfüllt und bestimmen Sie ω. Um was für eine Bahnkurve handelt es sich?

b) Wie lauten Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\vec{j}$ dieses Systems?

c) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Dipolmoment $\vec{p}$ sowie das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ und zeigen Sie $\dot{\vec{m}} = 0$.