# Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Box \Phi = \Delta \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Lösung durch Bestimmung der Greenschen Funktion $G(\vec{x}-\vec{x}', t-t')$ definiert durch

$$\Box\, G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = -4\pi\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t') \qquad (*)$$

Lösungsansatz durch Fouriertransformation

$$G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\,dk_2\,dk_3\,d\omega\; g(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}\, e^{-i\omega(t-t')}$$

F.T. du $\delta$-Fct:

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, d\omega\, 1\, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}\, e^{-i\omega(t-t')}$$

$\omega \neq \omega(k)$

Abkürzung $\hat{x} \equiv \vec{x}-\vec{x}'$, $\hat{t} \equiv t-t'$

$\downarrow$ $(*)$

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int d^3k\, d\omega \left\{ g(\vec{k},\omega)\, \underbrace{\left(\Box\, e^{i\vec{k}\hat{x}}\, e^{-i\omega\hat{t}}\right)}_{\left((i\vec{k})^2 - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2\right) e^{i\vec{k}\hat{x}}\, e^{-i\omega\hat{t}}} + \frac{4\pi}{(2\pi)^2}\, e^{i\vec{k}\hat{x}}\, e^{-i\omega\hat{t}} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4}\int d^3k\, d\omega \left\{ \underbrace{\left( g(\vec{k},\omega)\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) + \frac{1}{\pi} \right)}_{\stackrel{!}{=}0} e^{i\vec{k}\hat{x}}\, e^{-i\omega\hat{t}} \right\} = 0$$

$$\boxed{g(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{c^2}{c^2\vec{k}^2-\omega^2} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{c^2}{(\omega-ck)(\omega+ck)}}$$

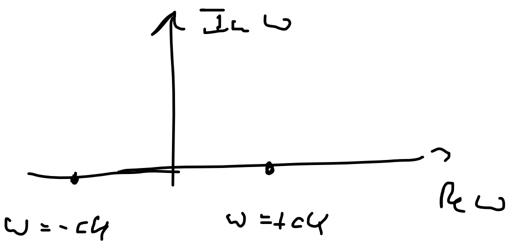
$k = |\vec{k}|$

$$\to G = \frac{-c^2}{4\pi^3} \int d^3k \, d\omega \, \frac{1}{(\omega - ck)(\omega + ck)} \, e^{i\vec{k}\vec{x}} \, e^{-i\omega t}$$

Integral nicht definiert bei $\omega = \pm ck$,

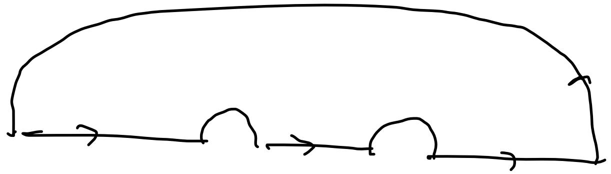
$\Rightarrow$ Braucht Vorschrift für Behandlung dieser beiden Punkte

Methode: analytische Fortsetzung in komplexe $\omega$-Ebene

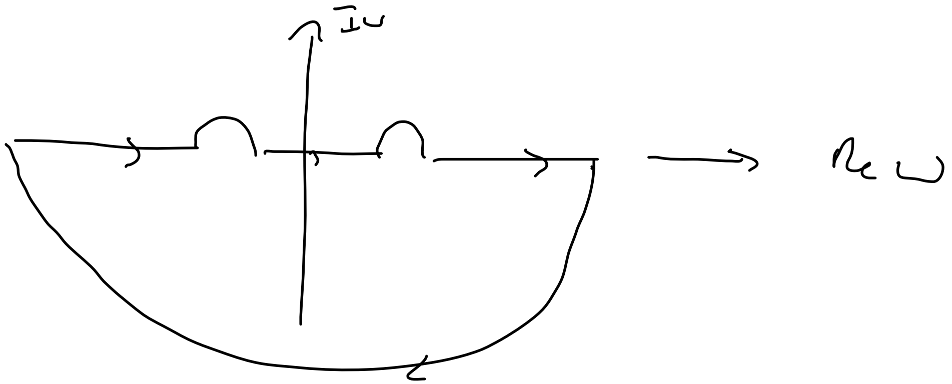



4 Möglichkeiten um die Singularitäten herum zu integrieren

① $t < t' \Rightarrow e^{-i\omega(t-t')} \to 0$ for $\omega = i\infty$

$\Rightarrow$ 

$t > t' \Rightarrow e^{-i\omega(t-t')} \to 0$ for $\omega = -i\infty$



Berechnung des Integrals durch Residuensatz

$$\oint f(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } f \text{ analytisch} \quad \text{(alle Ableitungen von } f \text{ existieren)} \\ 2\pi i \sum_{z_0} \mathrm{Res}_{z_0} f \end{cases}$$

$$\mathrm{Res}_{z_0} f := \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$ falls $f$ einen einfachen Pol bei $z = z_0$ hat (d.h. $f \sim \frac{c_1}{z - z_0} + \dots$)

(bei höheren Polen: komplizierter ...)

Beweis: Mathematik

$\Rightarrow \quad t < t'$: $\quad G = 0$

$t > t'$: $\quad G = \frac{-c^2}{4\pi^3} \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{x}} (-2\pi i) \left( \frac{e^{-i\omega\hat{t}}}{(\omega + ck)}\Big|_{\omega = ck} + \frac{e^{-i\omega\hat{t}}}{(\omega - ck)}\Big|_{\omega = -ck} \right)$

$$= \frac{i c^2}{4\pi^2} \int d^3k\, \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{2ck} \left( e^{-ick\hat{t}} - e^{ick\hat{t}} \right)$$

$$= \frac{c}{2\pi^2} \int d^3k \, \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{k} \sin(ck\hat{t})$$

Berechne $d^3k$ - Integral:

Wähle $\vec{x}$ entlang z-Achse im $\vec{k}$-Raum, also gilt

$$\vec{k}\,\vec{x} = \vec{k}\,(\vec{x}-\vec{x}') = k\,|\vec{x}-\vec{x}'| \cdot \cos\theta_k$$

$$d^3k = k^2 \sin\theta_k \, dk \, d\theta_k \, d\varphi_k$$

$$\leadsto \quad G = \frac{c}{2\pi^2} \int dk \, d\theta_k \, d\varphi_k \, \frac{k^2}{k} \sin\theta_k \, e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta_k} \sin(ck\hat{t})$$

$$= \frac{c}{\pi} \int_0^\infty dk \, k \sin(ck\hat{t}) \int_0^\pi \underbrace{d\theta_k \sin\theta_k}_{-d(\cos\theta_k)} \, e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta_k}$$

$$\Rightarrow G = -\frac{c}{\pi}\int_0^\infty dk\, k\, \sin(ck\hat{t})\, \underbrace{\frac{1}{ik|x-\vec{x}'|}\, e^{ik|\cancel{\vec{x}-\vec{x}'}|\cos\Theta_k}\Big|_0^{\pi}}_{-\frac{2}{k|\vec{x}-\vec{x}'|}\sin(k|\vec{x}-\vec{x}'|)}$$

$$= \frac{2c}{\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\int_0^\infty dk\, \sin ck(\hat{t})\, \sin(k|\vec{x}-\vec{x}'|)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} - e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}\right)$$

$$\curvearrowright \quad G = \frac{c}{2\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\int_0^\infty dk \Big\{ e^{ik(c\hat{t}-|\vec{x}-\vec{x}'|)} + e^{-ik(c\hat{t}-|\vec{x}-\vec{x}'|)} - e^{ik(c\hat{t}+|\vec{x}-\vec{x}'|)}$$

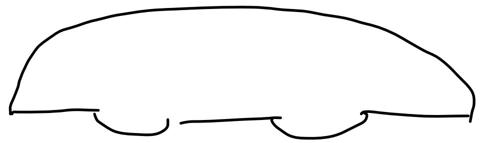
$$- e^{-ik(c\hat{t}+|\vec{x}-\vec{x}'|)}\Big\}$$

$$= \frac{c}{4\pi |\vec{x}-\vec{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ e^{ik(ct - |\vec{x}-\vec{x}'|)} - e^{ik(ct + |\vec{x}-\vec{x}'|)} \right\}$$

$$= \frac{c}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \cdot \left\{ \delta\left(c(t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|\right) - \underbrace{\delta\left(c\underbrace{(t-t')}_{>0} + |\vec{x}-\vec{x}'|\right)}_{\neq 0} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{ret} = \frac{c}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(c(t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|\right)}$$

retardierte Green'sche Funktion

analog Weg ②  für $t < t'$

$$\boxed{G_{av} = \frac{c}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(c(t-t') + |\vec{x}-\vec{x}'|\right)}$$

Weg ③, ④
$\Rightarrow$ kausale, akausale
G-Funktion

Lösung der Wellengleichung:

$$\Phi_{ret} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x'\, dt'\, \rho(\vec{x}', t')\, G_{ret}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$$

Prüfung:

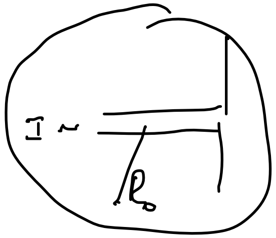
$$\Box \Phi_{ret} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x'\, dt'\, \rho(\vec{x}', t')\, \underbrace{\Box G}_{-4\pi\, \delta(\vec{x} - \vec{x}')\, \delta(t - t')}$$

$$= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \checkmark$$

$$\leadsto \boxed{\Phi_{ret} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

$$\boxed{\vec{A}_{ret} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

## Anwendung: Dipolstrahlung




$$\vec{j}(\vec{x}', t') = \mathrm{Re}\left(\vec{J}(\vec{x}')\, e^{-i\omega t'}\right)$$

$$\rho(\vec{x}', t') = \mathrm{Re}\left(\hat{\rho}(\vec{x}')\, e^{-i\omega t'}\right)$$

periodische Quelle

$$|\vec{x}'| < R_0$$

Berechnung der ret. Potentiale für $r \gg \lambda \gg R_0$ (Strahlungszone)

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \mathrm{Re} \int d^3x' \left( \vec{J}(\vec{x}')\, \frac{e^{-i\omega\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right)$$

Entwickle $|\vec{x}-\vec{x}'| = r\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}'}{r}\right) + O\left(r\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right) \approx r$

$$|\vec{x}-\vec{x}'|^{-1} = \frac{1}{r} + \dots$$

$$\curvearrowright \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathrm{Re}\left( e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \right)$$

In der Magnetostatik haben wir gezeigt:

$$J_i = \vec{\nabla} \cdot (x_i \vec{J}) - x_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{J})$$

$$\int d^3x' \, J_i(\vec{x}') = \int d^3x' \Big( \underbrace{\vec{\nabla}' (\vec{x}_i' \vec{J}(\vec{x}'))}_{=0 \text{ wenn } \vec{J}|_{\text{Rand}}=0} - x_i' \underbrace{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J})}_{\substack{=0 \text{ in M. S.} \\ \neq 0 \text{ EDyn}}} \Big)$$

wegen Kontinuitätsgl.: $\vec{\nabla} \vec{J} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) e^{-i\omega t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega \hat{\rho}(\vec{x}') e^{-i\omega t}$

$\left( \vec{\nabla} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = i\omega \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-i\omega\vec{p}) \qquad \text{mit } \vec{p} = \int d^3x' \, \vec{x}' \, \rho(\vec{x}')}$$

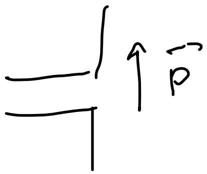
$\Phi$ wird berechnet durch Lorentzeichung

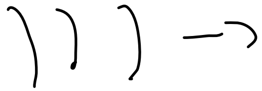
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

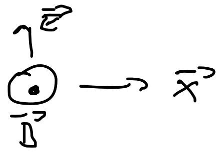
$$\ldots \quad \Phi = \operatorname{Re}\left(\frac{-i\omega}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r^2}\,\vec{x}\cdot\vec{p}\right)$$ Rechg.: Hausaufg.

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \cdots = \frac{\mu_0}{4\pi} k\omega \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r^2}\,\vec{x}\times\vec{p}\right)$$

$$\vec{E} \ldots = c\,\frac{\vec{B}\times\vec{x}}{r}, \qquad \vec{E}\perp\vec{B},\ \vec{x}$$


$\vec{p}$




$\vec{z}$
$\vec{x}$
$\vec{B}$