Magnetostatik

Def: $\vec{E} = \vec{0} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\rho = 0$

Max. Gl: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \implies \Delta \vec{A} - \vec{\nabla}(\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}) = -\mu_0 \vec{J}$

Eichtransformationen: $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda(\vec{x})$

$\vec{B} \to \vec{B}' = \vec{B}$

Wahl einer Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{0}$ Coulomb-Eichung

$\implies$ Vereinfachung der Max Gleichung: $\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$ 3 Poisson Gl

$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{0}}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, d^3x' + \vec{A}_4$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \, d^3x' + \vec{B}_4$$

Beispiel 1: unendlich langer Draht in z-Richtung

$$\vec{j} = I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\vec{e}_z$$

$$\int dx\,dy\,\vec{j} = I\,\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \delta(x')\,\delta(y')\,\frac{\vec{e}_z \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \, dx'\,dy'\,dz'$$

$$\vec{e}_z \times (\vec{x}-\vec{x}') = \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}_{\vec{e}_y}(x-x') + \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_y}_{-\vec{e}_x}(y-y')$$

$$\rightsquigarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\vec{e}_y \frac{x}{(\underbrace{x^2+y^2}_{r_\perp^2}+(z-z')^2)^{3/2}} - \vec{e}_x \frac{y}{(\underbrace{x^2+y^2}_{r_\perp^2}+(z-z')^2)^{3/2}}\right) dz'$$

<u>Subst:</u> $z'-z = u$, $dz' = du$

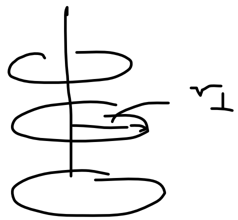
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\vec{e}_y\, x}{(r_\perp^2+u^2)^{3/2}} - \frac{\vec{e}_x\, y}{(r_\perp^2+u^2)^{3/2}}\right) du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{(r_\perp^2+u^2)^3}} \underset{\text{Tabel}}{=} \left.\frac{u}{r_\perp^2\sqrt{r_\perp^2+u^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{r_\perp^2}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r_\perp^2}(x\,\vec{e}_y - y\,\vec{e}_x)}$$

$$\frac{1}{r_\perp}(x\,\vec{e}_y - y\,\vec{e}_x) = \vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r_\perp}\vec{e}_\varphi}$$



Gaußsche + Stokesche Sätze in Magnetostatik

Stokes:
$$\int_F (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ $\rightsquigarrow$
$$\mu_0 \underbrace{\int_F \vec{j}\, d\vec{F}}_{\text{Strom } I \,=\, \text{Querschnittsfläche} \,\times\, \text{Stromdichte}} = \oint_{\partial F} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$I = \int_F \vec{j}\cdot d\vec{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\partial F} \vec{B}\, d\vec{l}}$$

Ampere Gesetz

(analog zu
$$Q_V = \epsilon_0 \int \vec{E}\cdot d\vec{F}$$
folgt aus
$$\int_V \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

Magnetischer Fluss :

$$\Phi_m := \underbrace{\oint_{\partial V}}_{\text{geschlossene Fläche}} \vec{B}\cdot d\vec{F} \underset{\text{Gauss}}{=} \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

=> Es gibt keine mag. Ladungen !

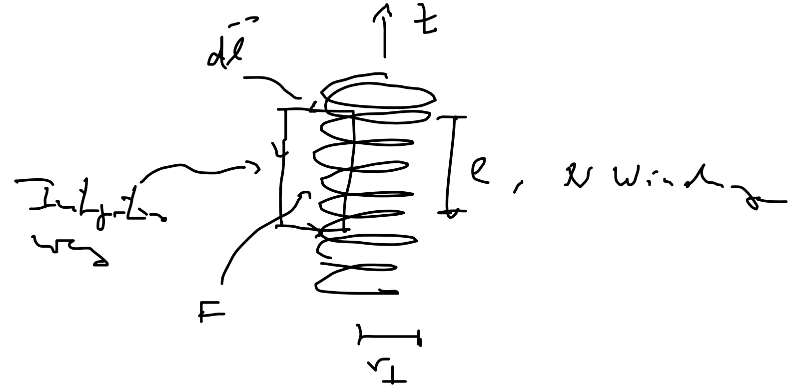
=> genauso viel Feldlinien gehen in ein Volumen ein und aus.

=> magn Feldlinien sind immer geschlossen

<u>Beispiel 2</u>: ausgedehnter Draht mit Radius $R_\perp$ und Strom I

=> Üb.blatt 12

Beispiel 3: unendlich ausgedehnte Spule mit N Windungen pro Längeneinheit l



Stromdichte $\vec j = j_\phi(r_\perp)\,\vec e_\phi$

$$I = \int \vec j\, d\vec F$$

Ampere Gesetz: $I = \frac{1}{\mu_0}\oint \vec B\, d\vec l$, $\vec B \neq \vec B(z)$

$$N I = \frac{1}{\mu_0}\left(B_z^{\text{innen}}\, l - B_z^{\text{außen}}\, l\right)$$

$$\Rightarrow \quad B_z^i - B_z^a = \frac{\mu_0 I N}{l}$$

Was sind B_x, B_y? Wegen $\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec J(\vec x')}{|\vec x - \vec x'|}\, d^3x'$

$$\Rightarrow \quad A_z = 0 \, , \qquad A_{x,y} = A_{x,y}(r_\perp)$$

$$B_x = \underbrace{\partial_y A_z}_{=0} - \underbrace{\partial_z A_y}_{=0} = 0 \,, \quad B_y = \underbrace{\partial_z A_x}_{=0} - \underbrace{\partial_x A_z}_{=0} = 0$$

Wegen $B_z^a(r_\perp \to \infty) = 0$

$$\boxed{B_z^i = \frac{\mu_0 I N}{\ell}}$$

d.h. konstantes $\vec{B}$-Feld im Innern der Spule $\vec{B} = B_z^i \, \vec{e}_z$

($\vec{B} \sim I$

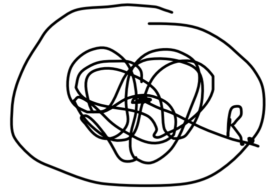
$$\Rightarrow \Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int_{\text{Spule}} B_z \, \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I N}{\ell} \underbrace{\pi R_\perp^2}_{F}$$

↑ Querschnitt der Spule

Selbstinduktivität: $L := \frac{\mu_0}{4\pi} N_s \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0^2}{4\pi} N^2 \frac{F}{\ell}$)

Multipolentwicklung in der Magnetostatik

$$\vec{j}(\vec{x}') = \begin{cases} \text{beliebig} & |\vec{x}'| = r' < R_0 \\ 0 & r' \geq R_0 \end{cases}$$



($\vec{\nabla}\vec{j} = 0$ Kontinuitätsgleichung)

Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i x_i'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{x}') \, d^3x'$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_i x_i \int x_i' \, \vec{j}(\vec{x}') \, d^3x' + \dots$$

NR: $\vec\nabla\cdot(x_j\vec j) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j j_i) = \sum_i \left(\delta_{ij} j_i + x_j \frac{\partial j_i}{\partial x_i}\right)$

$$= j_j + x_j \underbrace{\vec\nabla\vec j}_{=0}$$

Kontinuitätsgl. der Magnetostatik

$$\vec\nabla\vec j + \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec\nabla(x_j\vec j) = j_j}$$

$$\int_{r'>R} \left(\vec\nabla'\left(x'_j\,\vec j(\vec x')\right)\right) f(\vec x')\, d^3x' = \int j_j(\vec x')\, f(\vec x')\, d^3x'$$

$$\left(\vec\nabla' = \vec e_x \frac{\partial}{\partial x'} + \vec e_y \frac{\partial}{\partial y'} + \vec e_z \frac{\partial}{\partial z'}\right)$$

P.I (letzte Vorlesung)

$= -\int x'_j\, \vec j(\vec x')\cdot\vec\nabla' f(\vec x')$ + Oberflächenterm $= 0$ für $\vec j = 0$ für $r' > R$

$$\Rightarrow \quad -\int x_j' \, \vec{j} \cdot (\vec{\nabla}' f) \, d^3x' = \int j_j \, f \, d^3x'$$

$$f = 1 \quad \Rightarrow \quad \int j_j \, d^3x' = 0 \qquad \text{keine mag. Ladungen}$$

$$f = x_k' \quad \Rightarrow \quad -\int x_j' \, \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{\nabla}' x_k'}_{} \, d^3x' = \int j_j \, x_k \, d^3x'$$

$$\sum_i j_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i'} x_k'}_{\delta_{ik}} = j_k$$

$$\Rightarrow -\int x_j' \, j_k \, d^3x' = \int j_j \, x_k \, d^3x'$$

$$\curvearrowright \quad A_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_i x_i \int x_i' \, j_k \, d^3x' + \dots$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sum_i x_i \frac{1}{2} \int (x_i' \, j_k - x_k' \, j_i) \, d^3x' + \dots$$

$$A_k = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r^3}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{\left[(\vec{x}\cdot\vec{x}')\,j_k - (\vec{x}\cdot\vec{j})\,x'_k\right]}\,d^3x'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r^3}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{\left[(\vec{x}\cdot\vec{x}')\,\vec{j} - (\vec{x}\cdot\vec{j})\,\vec{x}'\right]}_{(\vec{x}'\times\vec{j})\times\vec{x}}\,d^3x'$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{r^3},}\qquad \vec{m} := \frac{1}{2}\int \vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\,d^3x'$$

mag. Moment

(analog Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{x}'\,\rho(\vec{x}')\,d^3x'$

$$\Phi \approx \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3}$$

$\vec{B}$ = Blatt 11

Lösung der homogenen Wellengleichung

Max Gl: $\Rightarrow \; \dots \; \Rightarrow$

~~in der Lorentzeichung~~ $\cancel{\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0}$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}}$$

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$ Lorentzeichung

Def: $$\boxed{\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$ d'Alembert Operator

Wellengleichung: $$\boxed{\begin{aligned} \Box \Phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}}$$