19. Eichtransformationen

Maxwell Gleichungen

(1) $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$

(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

(3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

(4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$

(3) wird gelöst $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

Vektorpotential

$\Downarrow$ (1): $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \Big| \quad \text{wegen } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

lös (1) — skalares Potential

$\Rightarrow$ 4 homog. Max. Gl. sind gelöst

$\Downarrow$ in inhomog. Max Gl.

(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\Delta\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$(4): \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{-\underbrace{\Delta \vec{A}}_{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = -\mu_0 \vec{J}}$$

$$\boxed{\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (*)$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$\Phi, \vec{A}$ sind nicht eindeutig festgelegt:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}, t)$$

↑ beliebige skalare Funktion von $\vec{x}, t$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{B} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda}_{=0}$$
$$= \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) \stackrel{!}{=} \vec{E}$$

falls $\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$

d.h. $\vec{E}, \vec{B}$ bleiben invariant (d.h. $\vec{B}' = \vec{B}$, $\vec{E}' = \vec{E}$)

für die Eichtransformation

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t) \\ \Phi &\to \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

$\Lambda(\vec{x}, t)$ heißt

Eichparameter

Eichfunktion

Wahl einer Eichung: Wahl einer Funktion $\Lambda(\vec{x},t)$

zur Vereinfachung von (*)

z.B. Lorentzeichung: Wähle Λ so dass gilt

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0}$$

Ist das möglich?

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \underbrace{\vec{\nabla}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi'}{\partial t}}_{f(\vec{x},t)} - \Delta\Lambda + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0$$

$\Rightarrow$ zu lösen ist $\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = f(\vec{x},t)$

Wir werden zeigen, dass Lösung "immer" existiert

$\curvearrowleft (*)$:
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}}$$

4 inhomogene Wellengleichungen

In der Lorentzeichung sind 8 gekoppelte MaxGl für $\vec{E}$ & $\vec{B}$

auf 4 entkoppelte Wellengleichungen für $\vec{A}, \Phi$ zurückgeführt!

Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla}\cdot(4)\quad : \quad \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{=\vec{0}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0}) = \mu_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

integrale Version

$$-\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\, d^3x = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_V \rho\, d^3x}_{\equiv Q_V}$$

" Gauß

$$\underbrace{\int_{\partial V}\vec{j}\cdot d\vec{F}}_{\text{Fluß von } \vec{j} \text{ durch } F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial Q_V}{\partial t} = -\int_{\partial V}\vec{j}\, d\vec{F}}$$

Magnetostatik

Definiert durch $\vec{E} = \vec{0}$, $\quad \rho = 0$, $\quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ Maxwell $\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (1)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (2)$$

Lösung von (1): $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \wedge$ (2): $\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{-\Delta \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A})} = \mu_0 \vec{J}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{J}} \qquad (**)$$

Eichtransformation: $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x})$

$$\vec{B} \to \vec{B}' = \vec{B}$$

Vereinfachung durch Wahl einer Eichung

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$ Coulomb-Eichung

ist das möglich? $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \underbrace{\vec{\nabla}\vec{A}'}_{f(x)} - \Delta\Lambda(x) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\Lambda(x) = f(x)}$$ Poisson Gl.

$$\Rightarrow \Lambda \sim \int \frac{f(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'$$

$\curvearrowright$ (**) $$\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}}$$ 3 Poisson Gleichung

schon gelöst

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Magnetostatik} \\ \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}\,, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0\end{array}}$

<u>Lösung:</u> $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x' + \vec{A}_h}$, mit $\Delta \vec{A}_h = 0$

Prüfe: $$\Delta \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{x}') \underbrace{\left(\Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{= -4\pi\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')} d^3x' + \underbrace{\Delta \vec{A}_h}_{= 0}$$

$$= -\mu_0 \int \vec{j}(\vec{x}')\, \delta(\vec{x}-\vec{x}')\, d^3x' = -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad ✓$$

Es bleibt $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ zu prüfen!

Beachte: $\frac{d}{dx} f(x-x') = -\frac{d}{dx'} f(x-x')$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(\vec{x}-\vec{x}\,') = -\vec{\nabla}' f(\vec{x}-\vec{x}\,'), \quad \vec{\nabla}' = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{x}\,')\cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right)}_{-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}} d^3x' + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_h}_{=0 \text{ muss geprüft werden!}}$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\left(f(x)\vec{a}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\cdot\vec{a} \quad (\text{Blatt } 7) \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{x}\,')\cdot\left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right) d^3x'$$

NR: $\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{j}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right) d^3x' = \int \left\{ \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{j}}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} + \vec{j}\cdot\left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right) \right\} d^3x'$

Gauß $\Downarrow$ $\oint_{\partial V} \frac{\vec{j}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\cdot d\vec{F} = 0$ falls $\vec{j}\,\big|_{\text{Rand}} = 0$

$$\Rightarrow \int \frac{\vec{\nabla}' \vec{j}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' = - \int \vec{j} \cdot \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) d^3x'$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \vec{j}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$$

Kontinuitätsgleichung : $0 = \vec{\nabla} \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \vec{A} = 0$ ✓

Berechne $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, d^3x' + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}_h}_{=\vec{B}_h}$$

Blatt 1: $\vec{\nabla} \times (f(x)\,\vec{a}) = (\vec{\nabla} f(x)) \times \vec{a} + f \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{a}}_{=\vec{0} \text{ wenn } \vec{a} \text{ konstant}}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underbrace{\left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{-\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}} \times \vec{J} \, d^3x' + \vec{B}_h$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\vec{J} \times \frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right) d^3x' + \vec{B}_h}$$

Biot-Savart Gesetz