Letzte Vorlesung: Laplace Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

Lösung in Kugelkoordinaten:

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = F(r)\, Y(\theta,\varphi)$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \ell(\ell+1)\right] Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = 0$$

$\ell = 0,1,2,3,\ldots$

$\underbrace{-\ell \leq m \leq \ell}_{2\ell+1}$

Kugelflächenfkt

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\; P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

$\uparrow$ zugeordnete Legendre polynome

Radialanteil

$$\left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial}{\partial r} - l(l+1)\right] F_l(r) = 0$$

$$F_l(r) = b_l r^l + c_l r^{-(l+1)} \quad , \; b_l, c_l \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ allgemeinste Lösung von $\Delta\Phi = 0$

$$\boxed{\Phi_h(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(b_{lm} r^l + c_{lm} r^{-(l+1)}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

$\frac{b_{lm}, c_{lm}}{2(2l+1)} \in \mathbb{R}$, Integrationskonstanten der DGL.

Zusammen mit der inhomogen Lösung:

$$\boxed{\Phi = \Phi_p + \Phi_h = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\, d^3x'}_{\text{allgemeinste Lösung der Poisson Gleichung}} + \underbrace{\sum_l \sum_m \left(b_{lm} r^l + c_{lm} r^{-(l+1)}\right) Y_{lm}}_{\text{Randbed.}}}$$

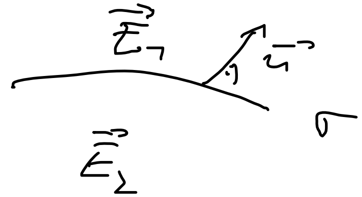
allgemeinste Lösung der Poisson Gleichung $\boxed{\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

→ Ladungsverteilung

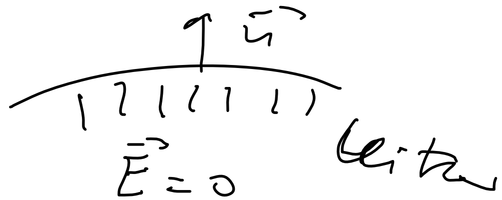
Randbed.

Für Oberflächenladungen gilt (wurde schon gezeigt)

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{n}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \\ \vec{l}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2) = 0 \end{array}\right.$$



In Leitern sind Ladungsträger frei beweglich



$$\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{E}_{\text{außen}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \vec{E}_{\text{innen}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_\perp \neq 0, \quad \vec{E}_\parallel = 0$$

Man unterscheidet

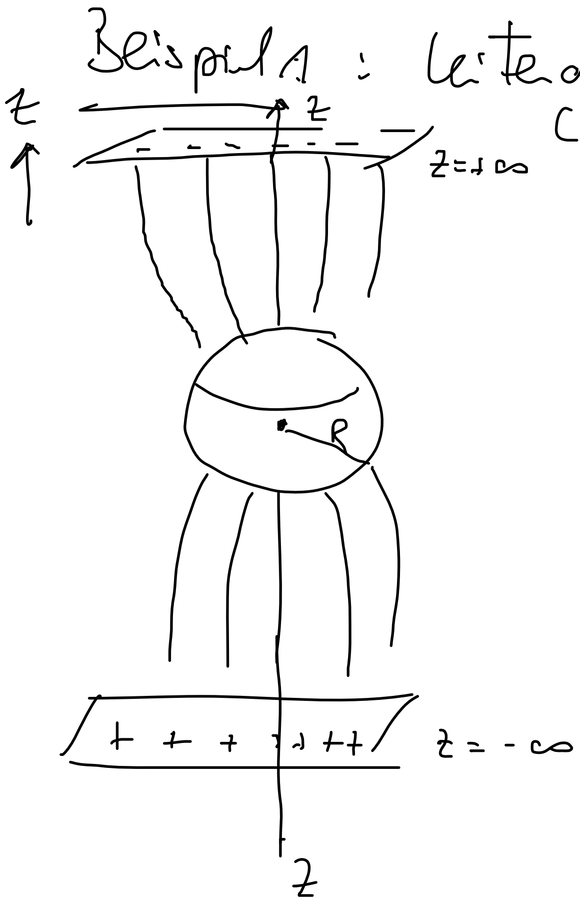
1) Dirichlet RB: $\Phi\big|_{\text{Rand}}$ = vorgegeben

2) von Neumann RB: $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\Phi\big|_{\text{Rand}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Bemerkung:
$\vec{\nabla}\Phi$ hat Sprung am Rand
Φ ist stetig!

Beispiel 1: leitende Kugel im homog. el. Feld $\vec{E} = \underbrace{E_0}_{\text{konstant}} \vec{e}_z$

(Radius R)



ohne Kugel: $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$

$$\Phi = -E_0 z + K_\infty$$

keine Ladung auf der Kugel $\quad \Phi_\rho = 0$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{(außerhalb Kugel)}$$

RB: 1) $\Phi\big|_{\text{Kugel}} = \text{konstant} \equiv K_R$

$$\Phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(b_{\ell m} r^{\ell} + c_{\ell m} r^{-(\ell+1)} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

1 Schritt: Rotationssymmetrie um z-Achse $\to \Phi(r,\theta)$

$$\Rightarrow \quad m=0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(b'_\ell r^\ell + c'_\ell r^{-(\ell+1)} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

2) $$\Phi(r=R,\theta) \stackrel{!}{=} K_R = \sum_\ell \left(b'_\ell R^\ell + c'_\ell \frac{1}{R^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = 1, \quad P_1 = \cos\theta, \quad P_2 = \tfrac{1}{2}(\cos^2\theta \quad \ldots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b'_\ell = c'_\ell = 0 \quad \text{für } \ell \neq 0 \\ K_R = \left(b'_0 + c'_0 \frac{1}{R} \right) \end{cases}$$

3) $$\lim_{r\to\infty} \Phi = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta = b'_0 + c'_0 \frac{1}{r}$$

~~unlös~~ unlösbar!

1. Schritt: Rotationssymmetrie um z-Achse $\rightarrow \Phi(r,\theta)$
$m=0$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(b_l^{1} r^l + \frac{c_l^{1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

2. Schritt:

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(r,\theta) = \underset{+k_\infty}{-E_0 z} = \underset{+k_\infty}{-E_0 r \overbrace{\cos\theta}^{P_1}} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l^{1} r^l P_l$$

$$\Rightarrow \underline{k_\infty} - \underline{E_0 r P_1} = \underline{b_0^{1} P_0} + \underline{b_1^{1} r P_1} + b_2^{1} r^2 P_2 + \ldots$$

$$\Rightarrow b_2^{1} = 0 = b_3^{1} = \cdots, \quad b_l^{1} = 0 \text{ für } l \neq 0,1$$

$$\underline{b_0^{1} = k_\infty}, \quad \underline{b_1^{1} = -E_0}$$

3. Schritt:

$$\Phi(r=R,\theta) = K_R = \sum_{l=0}^{\infty}\left(b_l' R^l + \frac{c_l'}{R^{l+1}}\right) P_l$$

$$= b_0' + b_1' R P_1 + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l'}{R^{l+1}} P_l}_{c_0' \frac{1}{R} \underbrace{P_0}_{1} + c_1' \frac{1}{R^2} P_1 + c_2' \frac{1}{R^3} P_2 + \dots}$$

$$K_R = b_0' + \frac{c_0'}{R}$$

$$0 = \left(b_1' R + \frac{c_1'}{R^2}\right) P_1 \qquad c_l' = 0 \quad l \neq 0,1$$

$$c_0' = R(K_R - b_0') = R(K_R - K_\infty)$$

$$c_1' = -b_1' R^3 = E_0 R^3$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = K_\infty + \frac{R}{r}(K_R - K_\infty) + \left(-E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2}\right)\cos\theta}$$

induzierte Oberflächenladung

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{K_\infty - K_R}{R} + 3E_0 \cos\theta$$

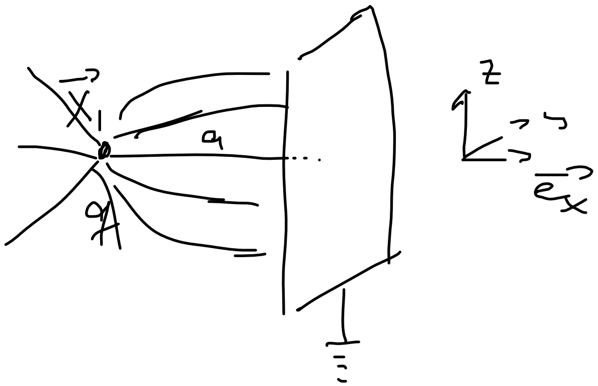
Gesamtladung

$$Q = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma \, R^2 \underbrace{\sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{d\Omega} = 4\pi\epsilon_0 R(K_\infty - K_R)$$

alternative Methode zur Lösung von $\Delta \Phi = 0$

Methode der Bildladung:

<u>Beispiel:</u> Punktladung q vor unendlich ausgedehnter geerdeter Metallplatte



$\vec{x}_1 = -a\,\vec{e}_x$

$-q$ $\qquad \vec{x}_2 = a\,\vec{e}_x$

<u>RB</u>: $\Phi(x=0, y, z) = 0$ (geerdete Platte)

Lös

$$\begin{cases} \Delta\Phi = -\frac{q}{\epsilon_0}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_1) & x \leq 0 \qquad (1) \\ \Phi(x=0,y,z) = 0 & \qquad (2) \end{cases}$$

Ansatz:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}+\vec{x}_1|}$$

<u>Prüfe</u> (1):

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big(\underbrace{\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}}_{-4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_1)}\Big) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\Delta\frac{1}{|\vec{x}+\vec{x}_1|}}_{-4\pi\,\delta(\vec{x}+\vec{x}_1)}$$

$$= -\frac{q}{\epsilon_0}\Big(\delta(\vec{x}-\vec{x}_1) - \underbrace{\delta(\vec{x}+\vec{x}_1)}_{=0 \text{ für } x<0}\Big) = -\frac{q}{\epsilon_0}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_1) \quad \checkmark$$

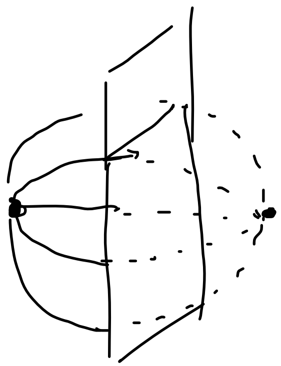
(2):

$$\Phi(x=0,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right)\Bigg|_{=0} = 0$$

Lösung:

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} - \frac{1}{|\vec{x}+\vec{x}_1|}\right) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3} - \frac{(\vec{x}+\vec{x}_1)}{|\vec{x}+\vec{x}_1|^3}\right) & \text{f. } x \leq 0 \end{cases}$$



Oberflächeladung auf der Platte

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E}\Big|_{x=0} \quad , \qquad \vec{n} = -\vec{e}_x$$

$$= -\epsilon_0 E_x(x=0, y, z)$$

$$= -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Gesamtladung auf der Platte

$$Q = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \sigma \, dy \, dz = -\frac{qa}{2\pi} \iint \frac{dy \, dz}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \underset{\text{Integraltafel}}{\uparrow} \qquad = -q$$