12. Vorlesung: starre Körper

starre Körper = näherungsweise unverformbare K.

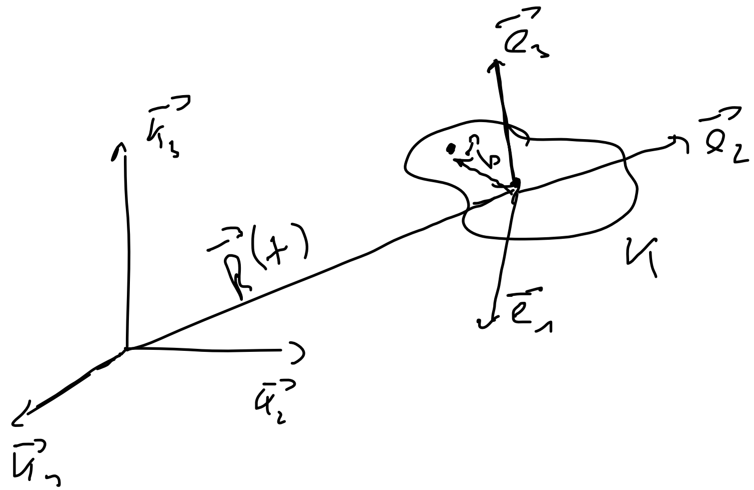
Newton: aufgebaut aus Massenpunkten (Atome) mit konstantem Abstand

2 Koordinatensysteme

i) Laborsystem

$\vec{K}_i$ mit $\vec{K}_i \cdot \vec{K}_j = \delta_{ij}$

$i = 1,2,3$ $\quad \dot{\vec{K}}_i = 0$



ii) körperfestes K.S.

$\vec{e}_i(t)$, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$\dot{\vec{e}}_i \neq 0$

Ortsvektor jedes Teilchens in K

$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{b}(t)$

Schwerpunkt

$$\vec{b}(t) = \sum_{i=1}^{3} b_i \, \vec{e}_i(t) \,, \qquad \dot{b}_i = 0 \quad \text{(Unverformbarkeit)}$$

ausgedrückt im I. S.:

$$\vec{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{3} \vec{K}_j \, D_{ji}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{K}_j = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \, D^{-1}_{kj}$$

$$\text{mit} \quad \sum_j D^{-1}_{kj} D_{ji} = \delta_{ik}$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l = \delta_{il} = \left(\sum_{j=1}^{3} \vec{K}_j D_{ji} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} \vec{K}_k D_{kl} \right) = \sum_j \sum_k \underbrace{\vec{K}_j \cdot \vec{K}_k}_{= \delta_{jk}} D_{ji} D_{kl}$$

$$= \sum_j D_{ji} D_{jl} = \sum_j D^T_{ij} D_{jl}$$

Matrixschreibweise: $\underline{\mathbb{1} = D^T D}$ $\Rightarrow$ K.S. sind durch zeitabhängige orthogonale Matrizen verbunden!

Es gilt: $\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_k D_{ki} D_{kj}}_{=\delta_{ij}} = \sum_k \left[\dot{D}_{ki} D_{kj} + D_{ki} \dot{D}_{kj} \right] = 0 \quad (**)$

<u>Def</u>: $\omega_{ij} := \sum_k D_{ki} \dot{D}_{kj} \quad \curvearrowright (**): \quad \omega_{ji} + \omega_{ij} = 0$

$\Rightarrow \omega_{ij} = -\omega_{ji}$, d.h. ω ist antisym. 3x3 Matrix

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: 16: Der Vektor $\vec{\Omega} = \sum_e \Omega_e^{(t)} \vec{e}_e(t)$

mit $\Omega_1 = -\omega_{23}$, $\Omega_2 = \omega_{13}$, $\Omega_3 = -\omega_{12}$

heisst momentane Winkelgeschwindigkeit

Satz 16: Es gilt $\dot{\vec{e}}_i = \vec{\Omega} \times \vec{e}_i$

Beweis: $\dot{\vec{e}}_i = \sum_j \vec{K}_j \dot{D}_{ji} = \sum_j \sum_k \vec{e}_k \underbrace{D^{-1}_{kj}}_{= D^T_{kj} = D_{jk}} \dot{D}_{ji} = \sum_j \sum_k \vec{e}_k D_{jk} \dot{D}_{ji}$

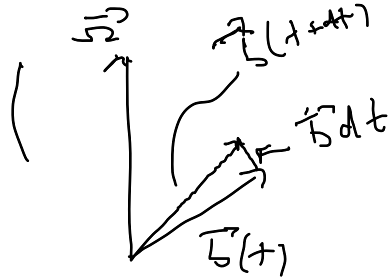
$= \sum_k \vec{e}_k \, \omega_{ki} =$

$\dot{\vec{e}}_1 = \vec{e}_2 \underbrace{\omega_{21}}_{\Omega_3} + \vec{e}_3 \underbrace{\omega_{31}}_{-\Omega_2} = \Omega_3 \vec{e}_2 - \Omega_2 \vec{e}_3 = \vec{\Omega} \times \vec{e}_1$

analog $\dot{\vec{e}}_2 = \vec{\Omega} \times \vec{e}_2$, $\dot{\vec{e}}_3 = \vec{\Omega} \times \vec{e}_3$ $\boxtimes$

$\Rightarrow \dot{\vec{b}} = \sum_i b_i \dot{\vec{e}}_i = \sum_i b_i \vec{\Omega} \times \vec{e}_i = \vec{\Omega} \times \vec{b}$

phys. Bedeutung von $\vec{\Omega}$



$$\vec{b}(t+dt) = \vec{b}(t) + \dot{\vec{b}}\,dt$$

$$\vec{\Omega} = |\vec{\Omega}| \cdot \vec{n}(t)$$

momentane Drehachse

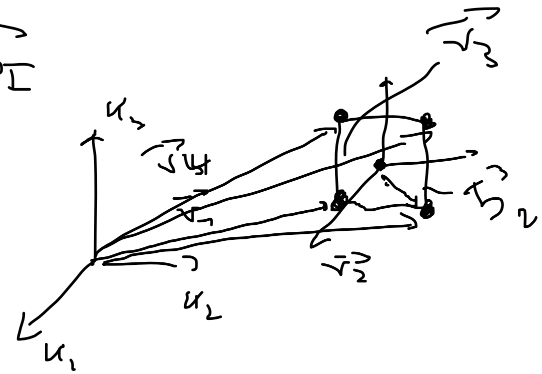
Betrag der Winkelgeschw.

Falls $\dot{\vec{\Omega}} = 0 \Rightarrow$ Rotation in Ebene

Körper aufgebaut aus N Teilchen (Atome)

Ortsvektor der I-te Teilchen $\vec{r}_I = \vec{R} + \vec{b}_I$

$I = 1, \dots, N$



Kin. Energie $\quad T = \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N} m_I \dot{\vec{r}}_I^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N} m_I \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{b}}_I\right)^2$

$$\dot{\vec{b}}_I = \vec{\Omega} \times \vec{b}_I$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_I m_I \left[\dot{\vec{R}}^2 + 2\,\dot{\vec{R}}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{b}_I) + (\vec{\Omega}\times\vec{b}_I)^2\right]$$

Es gilt

i) $\dot{\vec{R}}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{b}_I) = \vec{\Omega}\cdot(\vec{b}_I\times\dot{\vec{R}}) = \vec{b}_I\cdot(\dot{\vec{R}}\times\vec{\Omega})$

ii) $(\vec{\Omega}\times\vec{b}_I)^2 = \vec{\Omega}^2\,\vec{b}_I^{\,2} - (\vec{\Omega}\cdot\vec{b}_I)^2$

$$\hookrightarrow\; T = \frac{1}{2}\sum_I m_I \dot{\vec{R}}^2 + \Big(\underbrace{\sum_I m_I \vec{b}_I}_{=0}\Big)(\dot{\vec{R}}\times\vec{\Omega}) + \frac{1}{2}\sum_I m_I\left(\vec{\Omega}^2\,\vec{b}_I^{\,2} - (\vec{\Omega}\cdot\vec{b}_I)^2\right)$$

$$M = \sum_I m_I\,, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_I m_I \vec{r}_I = \frac{1}{M}\sum_I m_I\left(\vec{R}+\vec{b}_I\right) = \vec{R} + \frac{1}{M}\sum_I m_I \vec{b}_I$$

$$\Rightarrow \sum_I m_I \vec{b}_I = 0$$

$$\Rightarrow T = T_S + T_{rot} \,, \quad T_S = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_I m_I \left(\vec{\Omega}^2 \vec{b}_I^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_I)^2 \right)$$

andere Schreibweise für T_{rot}

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_I m_I \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} \right)}_{\sum_i \Omega_i \Omega_i = \vec{\Omega}^2} \vec{b}_I^2 - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \Omega_i b_{Ii} \right)}_{= \vec{\Omega} \cdot \vec{b}_I} \left(\sum_{k=1}^{3} \Omega_k b_{Ik} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \sum_I m_I \left(\vec{b}_I^2 \delta_{ik} - b_{Ii} b_{Ik} \right) \Omega_i \Omega_k$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} I_{ik} \Omega_i \Omega_k}$$

$$\boxed{I_{ik} = \sum_{I=1}^{N} m_I \left(\vec{b}_I^2 \delta_{ik} - b_{Ii} b_{Ik} \right) = I_{ki}}$$

I_{ik} ist symmetrische 3x3 Matrix und heißt

Trägheitstensor, $\dot{I}_{ik} = 0$

Bei kontin. Massenverteilung gilt

$$M = \int_K \rho(\vec{b})\, d^3b \quad , \quad \rho(\vec{b}) = \text{Massendichte}$$

$$\boxed{I_{ik} = \int_K \rho(\vec{b}) \left(\vec{b}^2 \delta_{ik} - b_i b_k \right) d^3b}$$

Bemerkungen

i) Rotation um feste Achse $\vec{n}$ mit $\vec{\Omega} = \Omega(t)\,\vec{n}$, $\dot{\vec{n}} = 0$

$$\curvearrowright \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k I_{ik}\, n_i n_k\, \Omega^2 = \frac{1}{2} I_{\vec{n}}\, \Omega^2$$

und $I_{\vec{n}} := \sum_i \sum_k I_{ik}\, n_i n_k$ heißt Trägheitsmoment bzgl $\vec{n}$

ii) Jede symm. Matrix lässt sich durch eine orth. Matrix diagonalisieren

$$\vec{e}_i^{\,\prime} = \sum_j R_{ij}\, \vec{e}_j \,, \qquad \text{aus} \quad \vec{e}_i^{\,\prime} \cdot \vec{e}_k^{\,\prime} = \delta_{ik}$$

$$\Longrightarrow \quad R^T R = \mathbb{1}$$

$\Longrightarrow$ R ist orthogonale Drehmatrix

$$\vec{e}_j = \sum_k R^{-1}_{jk}\, \vec{e}_k^{\,\prime} = \sum_k R^T_{jk}\, \vec{e}_k^{\,\prime}$$

$$\vec{\Omega} = \sum_i \Omega_i \vec{e}_i = \sum_i \sum_k \Omega_i R^T_{ik} \vec{e}\,'_k = \sum_k \Omega'_k \vec{e}\,'_k$$

mit $\Omega'_k = \sum_i \Omega_i R^T_{ik}$, $\Omega_i = \sum_k \Omega'_k R_{ki}$

$$\rightsquigarrow T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} I_{lm} \Omega_l \Omega_m$$

$$= \frac{1}{2} \sum_l \sum_m I_{lm} \left(\sum_k \Omega'_k R_{kl} \right) \left(\sum_i \Omega'_i R_{im} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \sum_i I'_{ki} \Omega'_k \Omega'_i$$

mit $I'_{ki} = \sum_l \sum_m R_{kl} I_{lm} \underbrace{R_{im}}_{R^T_{mi}}$

Matrixnot.: $I' = R \underline{I} R^T$

Satz aus Math.: Jede sym. Matrix lässt sich durch orth. Matrix auf Diagonalform transf., d.h. es existiert ein R mit

$$I' = \begin{pmatrix} I_1' & 0 & 0 \\ 0 & I_2' & 0 \\ 0 & 0 & I_3' \end{pmatrix} , \qquad I'_{ik} = I_i' \, \delta_{ik}$$

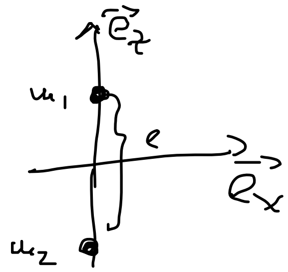
I_1', I_2', I_3' heißen Hauptträgheitsmomente

Sind gerade die Eigenwerte der Matrix I

R ist aufgebaut aus den Eigenvektoren von I

$$Sp(I') = \sum_k I'_{kk} = Sp(R I R^T) = Sp(I \underbrace{R^T R}_{1}) = Sp(I)$$

Beispiel: Hantelmolekül



Schwerpunkt $\vec R = \frac{m_1 \vec b_1 + m_2 \vec b_2}{M} = \vec 0$

$$\left.\begin{aligned} &\vec b_1 = z_1 \vec e_z, \quad \vec b_2 = z_2 \vec e_z, \quad l = z_1 - z_2 \\ &\vec R = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2)\vec e_z = \vec 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} z_1 &= \frac{m_2}{M} l \\ z_2 &= -\frac{m_1}{M} l \end{aligned}$$

$$I_{ik} = \sum_{I=1}^{N} m_I \left(\vec b_I^{\,2} \delta_{ik} - b_{Ii} b_{Ik} \right)$$

$$I_{11} = \sum_{I=1}^{2} m_I \left(\cancel{b_{I1}^2} + b_{I2}^2 + b_{I3}^2 - \cancel{b_{I1} b_{I1}} \right) = \sum_{I=1}^{2} m_I \left(\underbrace{b_{I2}^2}_{=0} + b_{I3}^2 \right)$$

$$= m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 = \frac{m_1 m_2}{M} l^2 = \mu l^2$$

$$I_{22} = \cdots = I_{11} \,, \qquad I_{33} = 0$$

$$I_{12} = -\sum_I m_I \, b_{I1} \, b_{I2} = 0$$

$$I_{13} = -\sum_I m_I \, b_{I1} \, b_{I3} = 0$$

$$I_{23} = -\sum_I m_I \, b_{I2} \, b_{I3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \mu \ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$