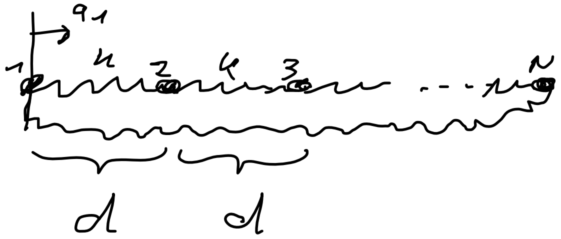
LINEARE KETTE



- gleiche Masse m
- gleiche Konstante k
- N gerade (einfacher!)

- betrachte periodische Randbedingungen:

$$q_{N+1} \equiv q_1 \qquad (q_0 \equiv q_N)$$

verallgemeinerte Koordinaten: $q_i = x_i - (i-1)d$

$$T = \frac{m}{2} \sum_{a=1}^{N} \dot{q}_a^2 \quad , \quad U = \frac{k}{2} \sum_{a=1}^{N} (q_{a+1} - q_a)^2$$

$$\hookrightarrow \quad L = \sum_a \left[\frac{m}{2} \dot{q}_a^2 - \frac{k}{2} (q_{a+1} - q_a)^2 \right]$$

$$= \sum_a \sum_b \left(\frac{1}{2} g_{ab} \dot{q}_a \dot{q}_b - \frac{1}{2} M_{ab} q_a q_b \right)$$

mit

$$g_{ab} = m\,\delta_{ab},$$

$$M_{ab} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & -1 \\ -1 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

E-L-Gl: $\quad m\ddot{q}_a + \sum_b M_{ab} q_b = 0$

Ansatz: $\quad q_a = q_a^0 e^{i\omega t} \rightarrow \left(-m\omega^2 + M_{ab}\right) q_b^0 = 0$

Eigenwerte als Lösungen von $\det(M - m\omega^2 \mathbb{1}) = 0$

Eigenvektoren erfüllen $\quad \sum_b \left(M_{ab} - m\omega_{(\alpha)}^2 \delta_{ab}\right) q_b^{0(\alpha)} = 0 \quad (*)$

Ansatz: $q_b^0 = e^{ibpd}$, mit $p = \text{konst}$

$$\Rightarrow \sum_b M_{ab} q_b^0 = k\left[-e^{i(a-1)pd} + 2e^{iapd} - e^{i(a+1)pd}\right]$$

$$= k e^{iapd}\left[2 \underbrace{- e^{-ipd} - e^{ipd}}_{-2\cos(pd)}\right]$$

$$\sum_b M_{ab}\, q_b^0 = k\, q_a^0 (2 - 2\cos pd) = 2k q_a^0 \underbrace{(1-\cos pd)}_{2\sin^2 \frac{pd}{2}}$$

$$= 4k\, q_a^0 \sin^2 \frac{pd}{2}$$

$$= \sum_b \left(4k \sin^2 \frac{pd}{2} \right) \delta_{ab}\, q_b^0$$

$\hookrightarrow$ (*) erfüllt, mit $\boxed{\omega_p^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{pd}{2}}$

Randbedingungen: $q_{N+1} = q_1 \rightarrow q^0_{N+1} = q^0_1 \rightarrow e^{i(N+1)pd} = e^{ipd}$

$$e^{iNpd} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{2\pi}{Nd} n, \; n \in \mathbb{Z}}$$

Für $p = \frac{2\pi}{Nd} n$ und $p' = \frac{2\pi}{Nd}(n \pm N)$ gilt

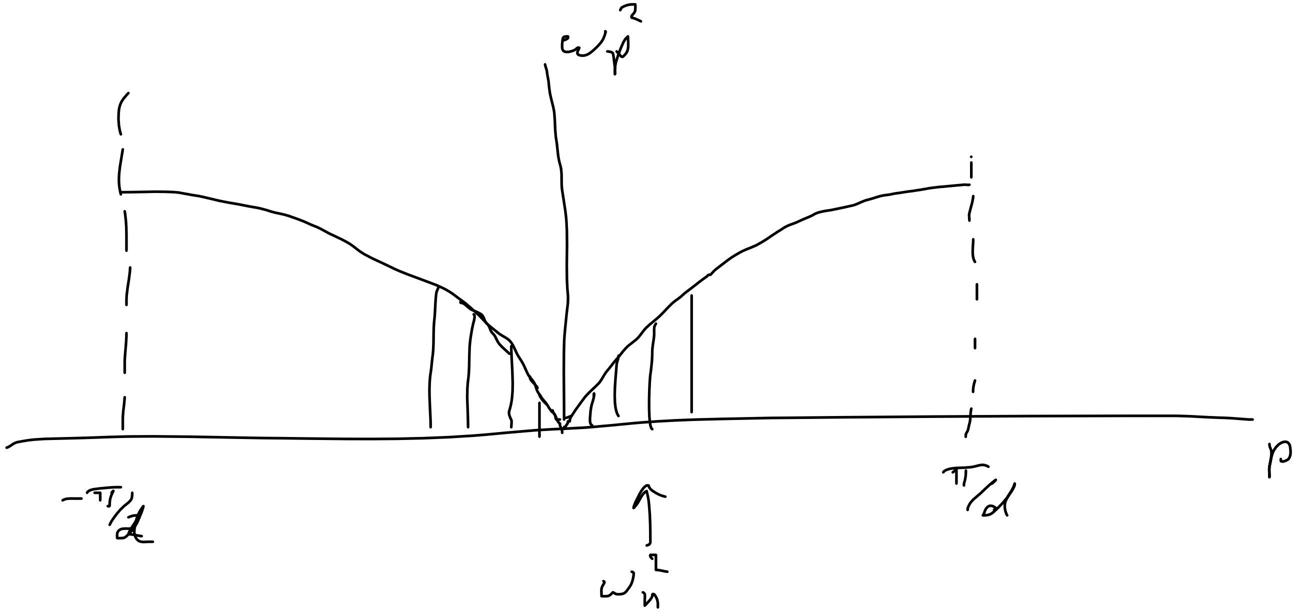
$$e^{ibp'd} = e^{ibpd} \underbrace{e^{\pm i 2\pi b}}_{1} = e^{ibpd}$$

$\Rightarrow$ Nur N verschiedene Eigenvektoren, wähle

$$-N/2 \leq n < N/2$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\omega_n^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\pi n}{N}}$$

'Dispersionsrelation der linearen Kette'



Normalkoordinaten $Q_n(t)$

Eigenschwingungen: $\quad q_a^{(n)}(t) = \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{N}an}}_{q_a^{(n)0}} e^{i\omega_n t}, \quad -\frac{N}{2} \le n < \frac{N}{2}$

$n = 0: \quad \omega_n = 0 \rightarrow$

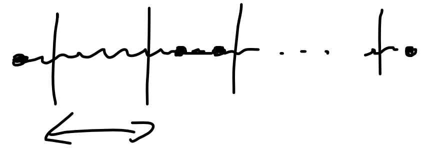
1 Lösung $\quad q^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \text{konst}$

$1 \le |n| \le N/2 - 1$: $\quad 0 < \omega_n < \sqrt{\frac{4k}{m}}$

2 Lösungen: $\quad q^{(n)0}, \quad \left(q^{(n)0}\right)^*$

$|n| = N/2$: $\quad \omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m}}$

1 Lösung: $\quad q^{(-N/2)0} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ \vdots \\ +1 \end{pmatrix}$



Insgesamt:

$$1 + 2\left(N/2 - 1\right) + 1 = N \quad \text{komplexe Eigenschwingungen}$$

Die tatsächlichen Auslenkungen $q_a(t)$ sind reell und können geschrieben werden als

$$q_a(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-N/2}^{N/2} Q_n(t)\, e^{i \frac{2\pi}{N} a n}$$

mit $\quad Q_{-n} = Q_n^*, \quad \underbrace{Q_{-N/2} = Q_{N/2}^* = Q_{N/2}}_{\text{Q_n periodisch mit Periode N}}$

$\left(\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)\right)$

Um $L(Q,\dot{Q})$ zu berechnen, brauchen wir:

$$\sum_{a=0}^{N-1} x^a = \frac{1-x^N}{1-x} \qquad (\rightsquigarrow \text{geom. Reihe})$$

Für $x = e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)}$

$$\hookrightarrow \quad \sum_{a=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)a} = \frac{1-e^{i2\pi(n-m)}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)}} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ N, & n = m \end{cases}$$

$$= N\delta_{nm}$$

$$= \sum_{a=1}^{N} e^{i\frac{2\pi}{N}(a-1)(n-m)}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\sum_{a=1}^{N} e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)a} = N\delta_{nm}} = \left(\sum_{a=1}^{N} e^{i\frac{2\pi}{N}a(n-m)}\right)\underbrace{e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-m)}}_{=1 \text{ für } n=m}$$

$$T = \frac{m}{2} \sum_a \dot{q}_a^{\,2} = \frac{m}{2N} \sum_a \sum_{n=-N/2}^{N/2} \sum_{l=-N/2}^{N/2} \dot{Q}_n \dot{Q}_l \, e^{i\frac{2\pi}{N} a n} e^{i\frac{2\pi}{N} a l}$$

$$= \frac{m}{2N} \sum_n \sum_l \dot{Q}_n \dot{Q}_l \underbrace{\left(\sum_a e^{i\frac{2\pi}{N} a (n-(-l))} \right)}_{N \delta_{n,-l}}$$

$$= \frac{m}{2} \sum_n \dot{Q}_n \underbrace{\dot{Q}_{-n}}_{\dot{Q}_n^*} = \frac{m}{2} \sum_n |\dot{Q}_n|^2$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \sum_{b=1}^{N} M_{ab} q_a q_b = \frac{1}{2N} \sum_a \sum_b \sum_n \sum_l M_{ab} Q_n Q_l \, e^{i\frac{2\pi}{N} a n} e^{i\frac{2\pi}{N} b l}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_n \sum_l Q_n Q_l \sum_a \underbrace{\left(\sum_b M_{ab} e^{i\frac{2\pi}{N} b l} \right)}_{\sum_b \omega_l^2 \delta_{ab} e^{i\frac{2\pi}{N} b l}} e^{i\frac{2\pi}{N} a n}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_n \sum_l Q_n Q_l \omega_l^2 \underbrace{\left(\sum_a e^{i\frac{2\pi}{N} a (n+l)} \right)}_{N \delta_{n,-l}} = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n^2 |Q_n|^2$$

$$L(Q,\dot{Q}) = \frac{1}{2}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\left(m|\dot{Q}_n|^2 - \omega_n^2|Q_n|^2\right)$$

⚠ Hier $Q_{-N/2} = Q_{N/2}$

Jetzt: $Q_n = \mathrm{Re}\, Q_n + i\, \mathrm{Im}\, Q_n$ ersetzen.

(N Freiheitsgrade)

$$\tilde{Q}_{2n-1} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\, Q_n$$
$$\tilde{Q}_{2n} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\, Q_n$$

$\to L(\tilde{Q},\dot{\tilde{Q}})$

Übergang zum Kontinuum

Limes $d \to 0$, $N \to \infty$, mit

$$L = d \cdot N \quad \text{fest (Länge)}$$

$$\frac{m}{d} \quad \text{fest (Dichte)}$$

$$d \cdot k \quad \text{fest}$$

Def: $x = a \cdot d$ = Ort des Massepunkts

$q_a \to q(x)$ = Auslenkung des Massepunkts am Ort x aus seiner Ruhelage

vorhin:

$$\ddot{q}_a = \frac{k}{m}\left(q_{a+1} + q_{a-1} - 2q_a\right)$$

$$= \frac{k}{m}\left(q(x+d) + q(x-d) - 2q(x)\right)$$

$$= \frac{d^2 k}{m}\left\{ \frac{\frac{q(x+d)-q(x)}{d} - \frac{q(x)-q(x-d)}{d}}{d} \right\}$$

$$\overset{d \to 0}{=} v^2 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right), \quad \text{mit } v^2 = \frac{d^2 k}{m} = \text{konst}$$

$\Rightarrow$ Im Kontinuum:

$$\boxed{\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} = 0}$$

* Wellengleichung in 1 + 1 Dimension

Ort   Zeit

* Gleichung der schwingenden Saite!

Lösungen

1. d'Alembert'sche Lösung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) q = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) q = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{q(x,t) = q_R(x - vt) + q_L(x + vt)}$$

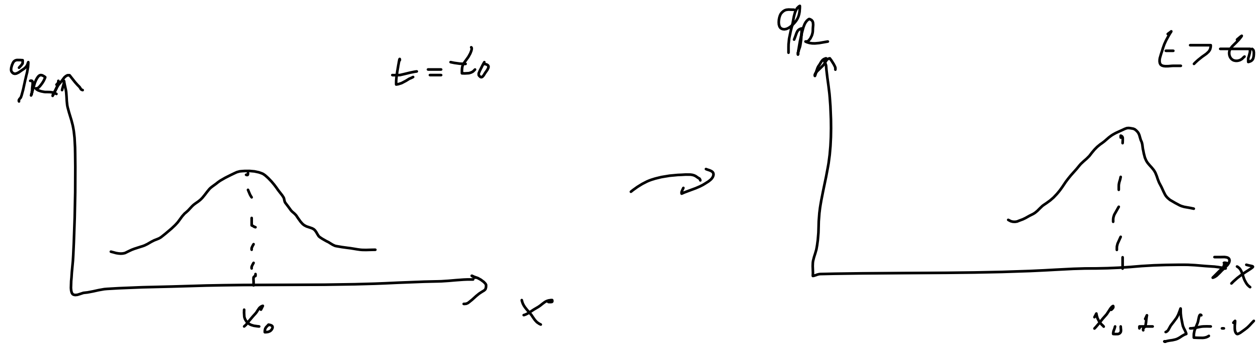
mit beliebigen Funktionen q_R, q_L

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) q_R(x-vt) = q_R' \cdot (-v) + v\, q_R' = 0 \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) q_L(x+vt) = 0 \quad \checkmark$$

↳ Die Wellengleichung ist erfüllt.

physikalische Intuition:



$\Rightarrow$ q_R ist rechtslaufende Welle

analog: q_L " linkslaufende "

② Bernoulli Lösung:

Ansatz: $q(x,t) = f(t)\, h(x)$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) h - v^2 f \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\hookrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) \frac{1}{f}}_{\overset{!}{=} -k^2 v^2 \text{ konst!}} = v^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) \frac{1}{h}}_{\overset{!}{=} -k^2 \text{ konst!}}$$

hängt nur von t ab

hängt nur von x ab

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dt^2} + k^2 v^2 f = 0} \qquad \boxed{\frac{d^2 h}{dx^2} + k^2 h = 0}$$

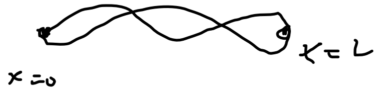
↳ Lösung:

$$f = f_1 \cos(kvt) + f_2 \sin(kvt)$$

$$h = h_1 \cos(kx) + h_2 \sin(kx)$$

Randbedingungen: z.B. $h(x=0) = h(x=L) = 0$

$\Rightarrow h_1 = 0, \quad \underbrace{\sin(kL) = 0}$



$k = \pi \frac{n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}$

↖ jetzt ∞ viele Lösungen

$$\Rightarrow \quad q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[f_1 \cos(\omega_n t) + f_2 \sin(\omega_n t)\right]$$

mit $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$

stehende Welle!

(f_1, f_2 durch Anfangsbed. festgelegt)