Vorlesung 9: Symmetrien & Erhaltungssätze

Noether-Theorem:

Wenn L invariant ist unter de inf. Koordinaten transformation $q_a \to q_a' = q_a + \delta q_a$,

d.h. $L(q_a, \dot{q}_a, t) = L(q_a', \dot{q}_a', t)$,

dann existiert immer ein zugehörige Erhaltungsgröße

$$\Theta = \sum_{b=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \delta q_b \, ,$$

d.h. es gilt

$$\frac{d}{dt} \Theta = 0$$

<u>Beweis</u>

Invarianz: $L(q_a, \dot{q}_a) = L(q_a', \dot{q}_a')$

$$= L(q_a + \delta q_a,\ \dot{q}_a + \delta \dot{q}_a)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} L(q_a, \dot{q}_a) + \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a + O(\delta q^2)$$

$$\Rightarrow\ 0 = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d}{dt} \delta q_a}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a\right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) \delta q_a} \right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_a \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right)}_{=0 \text{ weg. E-L}} \delta q_a + \frac{d}{dt} \Theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0 \quad \blacksquare$$

Spezialfall: L hängt nicht von (festen) q_a ab

(solche q_a heißen zyklische Koordinaten)

dann gilt $$\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \stackrel{E-L}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0$$

Def 15: $p_a := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ heißen verallgemeinerte Impuls

Satz 12: Für jede zyklische Koordinate q_a ist der zugehörige verallgemeinerte Impuls p_a erhalten, d.h. $\frac{d}{dt} p_a \equiv \dot{p}_a = 0$

Was ist zugehörige Symmetrie im Noether T.?

Antwort: Raum Translation:

$$q_a \to q_a' = q_a + c_a \quad , \quad c_a \in \mathbb{R}$$

$$\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a = p_a c_a \sim p_a \, , \quad \dot{\theta} = \dot{p}_a = 0$$

Falls L invariant unter gleichzeitiger Transformation aller Koordinaten, also

$$q_a \to q_a' = q_a + c\,, \qquad \forall a$$

$$\Theta = \sum_b \frac{\partial L}{\partial \dot q_b}\, c = c \sum_b p_b \sim \underline{P}$$

$\uparrow$ Gesamtimpuls

(gilt immer, wenn keine äußeren Kräfte angreifen)

Beispiel 1 freies Teilchen, d.h. $U = 0$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

L ist invariant unter

$$x \to x' = x + c_x \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \to \dot{x}' = \dot{x}$$

$$c_x \in \mathbb{R}$$

$$y \to y' = y + c_y \quad \Rightarrow \quad \dot{y} \to \dot{y}' = \dot{y}$$

$$z \to z' = z + c_z \quad \Rightarrow \quad \dot{z} \to \dot{z}' = \dot{z}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

(x, y, z) sind zyklische Koordinaten $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} \underset{(NG)}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \quad \checkmark$$

Beispiel 2: Kepler

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} + \frac{k}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

invariant unter

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_1 \to \vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 + \vec{c} \\ \vec{r}_2 \to \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 + \vec{c} \end{array}\right\} \; |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \text{ ist invariant}$$

$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a$ ist erhalten $\quad \dot{\vec{P}} = 0$

Satz 13 Wenn L nicht explizit von der Zeit t abhängt, d.h. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, dann ist die Energie erhalten, d.h. $\frac{dE}{dt} = 0$

Beweis: $E = T + U \overset{L = T - U}{=} 2T - L$

T ist quadratisch in $\dot{q}_a$: $T = \sum_{a=1}^{f} \sum_{b=1}^{f} g_{ab}(q)\, \dot{q}_a \dot{q}_b$

$$\sum_c \dot{q}_c \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c} = \sum_c \dot{q}_c \sum_a \sum_b g_{ab} \left(\delta_{ac} \dot{q}_b + \dot{q}_a \delta_{bc} \right)$$

$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Kronecker Delta $\boxed{\frac{\partial \dot{q}_a}{\partial \dot{q}_c} = \delta_{ac}}$

$$\Rightarrow \sum_c \dot{q}_c \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c} = \sum_c \dot{q}_c \left(\sum_b g_{cb} \, \dot{q}_b + \sum_b \dot{q}_b \, g_{bc} \right)$$

$$= \sum_c \sum_b \left(\dot{q}_c \, g_{cb} \, \dot{q}_b + \dot{q}_c \, \dot{q}_b \, \underbrace{g_{bc}}_{g_{cb}} \right)$$

$$= 2 \underbrace{\sum_c \sum_b g_{cb} \, \dot{q}_c \, \dot{q}_b}_{T} = 2T$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(2T) - \frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt}\left(\sum_c \dot{q}_c \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c} \right)$$

$$- \sum_c \frac{\partial L}{\partial q_c} \dot{q}_c - \sum_c \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c}}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c}} \ddot{q}_c - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0}$$

$$= \sum_i \left(\cancel{\ddot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\cancel{- \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i}$$

$$= \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)}_{= 0 \text{ E-L}}$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$$

Drehungen

Koordinatentrasf. die $|\vec{r}|$ invariant lassen.

$$r_a \to r_a' = \sum_{b=1}^{3} R_{ab} r_b \quad , \quad \vec{r} = \sum_{a=1}^{3} r_a \vec{e}_a$$

mit $\sum_{b=1}^{3} r_b r_b = \sum_{a=1}^{3} r_a' r_a' = \sum_a \sum_b \sum_c R_{ab} r_b R_{ac} r_c$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_a R_{ab} R_{ac} = \delta_{bc}} \quad (*)$$

denn dann gilt $\sum_a \sum_b \sum_c R_{ab} r_b R_{ac} r_c = \sum_b \sum_c r_b r_c \delta_{bc} = \sum_b r_b r_b$

bzw. in Matrixnotation $R^T R = E$, besser $\mathbb{1}$

$$R^T R = \mathbb{1}$$

und $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & \ldots & \\ & & \end{pmatrix}$

d.h. R ist eine orthogonale Matrix

R hat 9 Komponenten (Matrixelemente)

und erfüllt 6 Gleichungen (*)

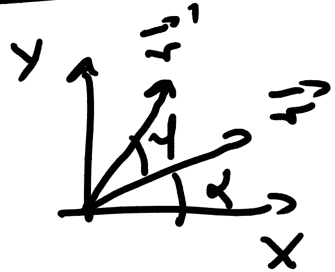
weil $(R^T R)^T = R^T R \Rightarrow R^T R$ ist symmetrisch

$= R^T (R^T)^T$

$\Rightarrow$ R hat 3 linear unabhängige Matrixelemente

$\hat{=}$ 3 Drehwinkel

Drehung um z-Achse



$$z' = z$$

Polarkoordinaten:

$$x + iy = r\cos\alpha + i r\sin\alpha$$
$$= r e^{i\alpha}$$

$$x' + iy' = r e^{i(\alpha+\varphi)} = (x+iy)\, e^{i\varphi}$$
$$= (x+iy)\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$
$$z' = z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Prüf: $\quad R_z^T R_z = \mathbb{1}$

Analog

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi_y & 0 & -\sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{pmatrix}, \quad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{pmatrix}$$

infl. Drehung: $\cos\varphi \approx 1, \quad \sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow \quad R_z = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + \varphi \underbrace{\left(-y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y\right)}_{\vec{e}_z \times \vec{r}} = \vec{r} + \delta\vec{r}$$

$$\delta\vec{r} = \varphi\, \vec{e}_z \times \vec{r}$$

Drehung um beliebige Achse $\vec{n}$: $\delta\vec{r} = \varphi\, \vec{n} \times \vec{r}$

$$\Theta = \sum_{a=1}^{3} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a}}_{m\dot{r}_a} \delta r_a = \varphi \sum_a m \dot{r}_a (\vec{n} \times \vec{r})_a$$

$$= \varphi m \; \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) = \varphi m \; \vec{n} \cdot \underbrace{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}_{\frac{\vec{L}}{m}}$$

$$= \varphi \, \vec{n} \cdot \vec{L} \sim \vec{n} \, \vec{L}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \vec{n} \cdot \vec{L} = 0$$