Letzte Vorlesung

Lagrange Formalismus

1) Wahl verallgemeinerter Koordinaten

$q_a, \quad a = 1, \ldots, f$

↳ Koordinaten des Konfigurationsraumes

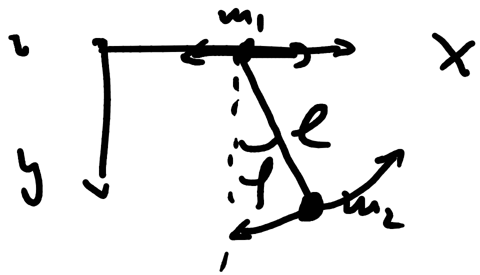
2) Aufstellen der Lagrangefkt $L(q_a, \dot{q}_a, t)$

3) Aufstellen der Euler Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0 \qquad f \text{ DGL 2. Ordnung}$$

4) Lösen der E-L Gleichung

Beispiel:



1) verallgemeinerte Koordinaten $x(t)$, $\varphi(t)$

2) $$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \cos\varphi\, \dot{x}\, \dot{\varphi} + m_2 g l \cos\varphi$$

3) E-L:

$$\left.\begin{aligned} l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\, \ddot{x} + g \sin\varphi &= 0 \\ (m_1+m_2)\,\ddot{x} + m_2 l\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{2 gek. DGL}$$

4) Lös för $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -(l\ddot{\varphi} + g\varphi) \quad (*)$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow (m_1+\cancel{m_2})(l\ddot{\varphi} + g\varphi) - \cancel{m_2 l\ddot{\varphi}} = 0$$

$$\Rightarrow m_1 l\ddot{\varphi} + (m_1+m_2)g\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l} \overset{m_1 \gg m_2}{\approx} g/l$$

$$\Rightarrow \varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

i (*): $\ddot{x} = -l\ddot{\varphi} + \frac{g}{\omega^2}\ddot{\varphi} = \frac{-l\omega^2 + g}{\omega^2}\ddot{\varphi} = \frac{1}{\omega^2}\left(-\frac{g(\cancel{m_1}+m_2)}{m_1} + \cancel{g}\right)\ddot{\varphi}$

$$= -\frac{g}{\omega^2}\frac{m_2}{m_1}\ddot{\varphi} = -\frac{\cancel{m_1} l \cancel{g}}{\cancel{g}(m_1+m_2)} \cdot \frac{m_2}{\cancel{m_1}}\ddot{\varphi} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} l\ddot{\varphi}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}\, l\varphi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\, l\varphi + \tilde{A} + \tilde{B}\,t}$$

4 Integrationskonstante $A, B, \tilde{A}, \tilde{B}$

Beispiel 3: N-Teilchen im Potential $U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N)$

ohne Zwangsbed.

1) verallgemeinerte Koordinaten: kartesische Koordinaten
(weil keine Zwangsbed.)

2) $$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - U(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N)$$

3) $$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial y_j} = -\frac{\partial U}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial z_j} = -\frac{\partial U}{\partial z_j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j \,, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} = m_j \dot{y}_j \,, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} = m_j \dot{z}_j$$

E-L: $$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} m_j \dot{x}_j = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Leftrightarrow m_j \ddot{x}_j + \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} = 0 \Leftrightarrow\ & m_j \ddot{y}_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} = 0 \Leftrightarrow\ & m_j \ddot{z}_j + \frac{\partial U}{\partial z_j} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} 3N \\ \text{DGL} \\ \text{2. Ordng} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow m_j \ddot{\vec{r}}_j + \underbrace{\vec{\nabla}_j U}_{-\vec{F}_j} = 0 \Leftrightarrow \boxed{m \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j}$$

Newton!

Falls als verallgemeinerte Koordinaten nicht die kartesischen Koordinaten gewählt werden können, kann L durch die Ausdrücke $\vec{r}_i(q_a)$, $\dot{\vec{r}}_i(\dot{q}_a, q_a)$ gefunden werden

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}(q,\dot{q}) - U(\vec{r}_i(q)) \qquad \dot{\vec{r}}_i = \sum_a \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\dot{q}_a$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{f}\sum_{b=1}^{f} g_{ab}(q)\,\dot{q}_a\dot{q}_b - U(q)}$$

mit $g_{ab} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_b}$

Zwischenrechnung

$$\vec{r}_i(q_a)\ , \quad \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}\vec{r}_i(q_a) = \sum_{a=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\underbrace{\frac{d}{dt}q_a}_{\dot{q}_a}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \sum_{a=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\dot{q}_a$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \sum_{a=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\dot{q}_a \cdot \sum_{b=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_b}\dot{q}_b$$

$$= \sum_a \sum_b \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\dot{q}_a \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_b}\dot{q}_b$$

$$= \sum_a \sum_b g_{ab}\dot{q}_a \dot{q}_b\ , \quad g_{ab} \equiv \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_a}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_b}$$

E-L können als Variationsprinzip formuliert werden

<u>Theorem:</u> Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonsche Prinzip)

Ein physikalisches System wird durch die verallg. Koordinaten q_a, $a=1,\dots,f$ und die Lagrangefkt

$$L(q_a, \dot{q}_a, t) = T - U$$

beschrieben.

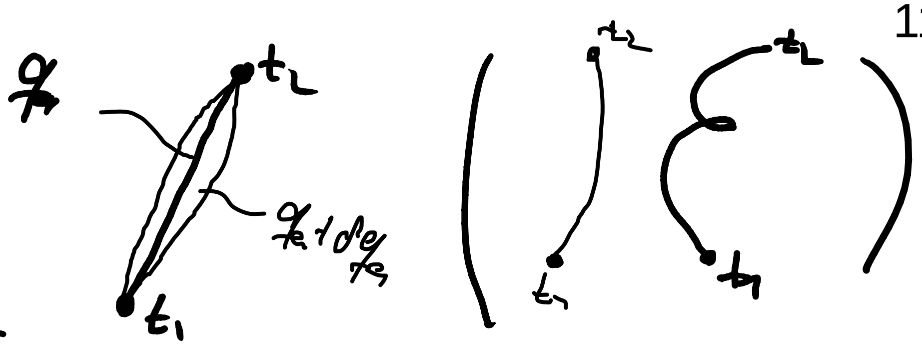
Die Bahn im Konfigurationsraum habe ein Anfangswert $q_a(t_1)$ und ein Endpunkt $q_a(t_2)$

Die Bewegung im Konfigurationsraum verläuft so, daß das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_a(t), \dot{q}_a(t), t)\, dt$$

extremal wird. S heißt die Wirkung des Systems.

<u>Beweis:</u>



Man betrachtet kleine Variation δq_a der Bahn im Konfigurations-raum um S_0

$$q_a \to q_a + \delta q_a \quad \text{mit RB: } \delta q_a(t_1) = 0 = \delta q_a(t_2)$$

$$S(q_a + \delta q_a) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_a + \delta q_a, \dot{q}_a + \delta \dot{q}_a, t)\, dt$$

$$S + \delta S \overset{\text{Taylor}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(\underbrace{L(q_a, \dot{q}_a, t)}_{S} + \sum_{a=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a + \sum_{a=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \Big)$$

$$\delta S = \sum_a \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \delta q_a \right) + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow \delta S = \sum_a \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \delta q_a \, dt$$

$$+ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\underbrace{\delta q_a(t_1)}_{=0} - \underbrace{\delta q_a(t_2)}_{=0} \right)$$

P.d.k.W.: $\delta S = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0}$$

Euler
Lagrange
Gleichung

Satz 11 L ist nicht eindeutig bestimmt!

Beh: $$L' = L + \frac{d f(q,t)}{dt} = L + \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial t} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

hat die gleichen E-L Gleichungen.

Beweis 1: $$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' \, dt = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} \, dt$$

$$= S + \underbrace{f(q(t_2)) - f(q(t_1))}_{\text{trägt bei Variation nicht bei}}$$

<u>Beweis</u>: Prüfe explizit, daß E-L unverändert

$$\frac{\partial L'}{\partial q_b} = \frac{\partial L}{\partial q_b} + \sum_a \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_a \partial q_b} \dot{q}_a \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial q_b \partial t}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} + \frac{\partial f(q,t)}{\partial q_b}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_b} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_b \partial t} + \sum_a \frac{\partial^2 f}{\partial q_a \partial q_b} \dot{q}_a$$

<u>EL</u>: $$\frac{\partial L'}{\partial q_b} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial L}{\partial q_b} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = 0 \quad \blacksquare$$

Noether-Theorem

Wenn L invariant ist unter einer

Koordinatentransformation $q_a \to q_a' = q_a + \delta q_a$

dann existiert immer eine zugehörige Erhaltungs-

größe $\quad \Theta = \sum_{b=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \delta q_b \quad$, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dt}\Theta = 0$$

L invariant bedeutet $\quad L(q_a', \dot{q}_a') = L(q_a, \dot{q}_a)$