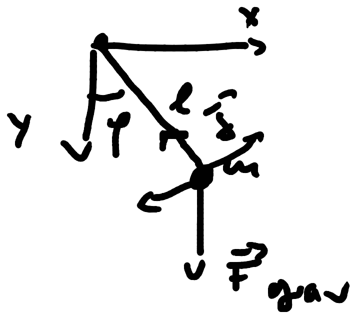
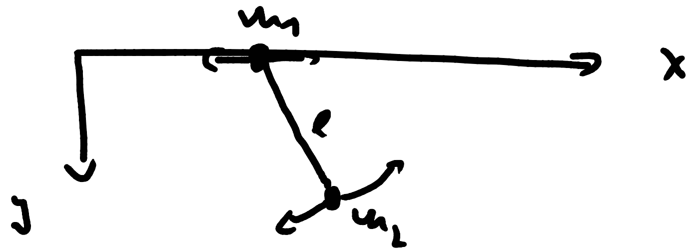
Lagrangesche Mechanik

- keine neue Mechanik, aber neuer Formalismus
- gut + nützlich bei Systeme mit Zwangskräfte

Beispiel 1



Beispiel 2



Zwangsbed.

$$x^2+y^2=\ell^2$$

Annahme: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$$U = U(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

Anwendung des L-Formalismus

1. Schritt: Wahl von geeigneten Koordinaten $\underbrace{q_1, \dots q_f}_{\text{verallgemeinerte Koordinaten}}$

f = Anzahl der Freiheitsgrade

$\{q_a,\ a = 1, \dots, f\}$ parametrisieren eine Fläche M in $\mathbb{R}^3$ auf der sich das System bewegen kann.
($\mathbb{R}^{3N}$ bei N Teilchen)

2. Schritt: Aufstellen der Lagrangefunktion $L(q_a, \dot{q}_a, t)$

($\dot{q}_a$ = verallgemeinerte Geschwindigkeiten)

$$L(\underbrace{q_a, \dot{q}_a, t}_{2f+1 \text{ unabhängige Variablen}}) := T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^{\,2}(q_a, \dot{q}_a) - U(\vec{r}_i(q_a))$$

3 Schritt: Berechnung der Euler-Lagrange Bewegungs-gleichungen

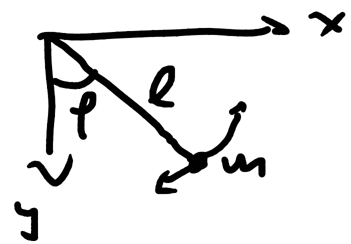
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0}$$

f DGL
2. Ordnung

(q_a, $\dot{q}_a$ sind unabhängig voneinander)

4 Schritt: Lösen E-L-Gleichungen

Beispiel 1:



$$x^2+y^2=l^2$$

1. Schritt: verallgemeinerte Koordinate φ: $\left.\begin{array}{l} x = l\sin\varphi \\ y = l\cos\varphi \end{array}\right\} x^2+y^2=l^2$ ✓

verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot\varphi$

2. Schritt: $L = T - U = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U, \quad U = -mgy$

$$= \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2) + mgy = \frac{m}{2}l^2\underbrace{(\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\,\dot\varphi^2)}_{\dot\varphi^2} + mgl\cos\varphi$$

$$\dot x = l\cos\varphi\,\dot\varphi, \quad \dot y = -l(\sin\varphi)\dot\varphi$$

$$\vec{v} = \dot x\,\vec{e}_x + \dot y\,\vec{e}_y, \quad \vec{v}^2 = (\dot x\,\vec{e}_x + \dot y\,\vec{e}_y)(\dot x\,\vec{e}_x + \dot y\,\vec{e}_y) = \dot x^2 + \dot y^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{L(\varphi, \dot\varphi) = \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi}$$

<u>3. Schritt</u>: $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = -\, mgl \sin\varphi$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \dot\varphi \,, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \ddot\varphi$$

$\downarrow$ E-L: $\quad -mgl\sin\varphi - m l^2 \ddot\varphi = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

<u>4. Schritt</u>: Lösung schwer, z.B. für kleine φ möglich

$\sin\varphi \approx \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0, \; \omega^2 = \frac{g}{l} \,, \; \varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

Beweis der Prozedur (1 Teilchen, N Teilchen $\to \left[\sum_{i,k}\right]$)

NG: $\quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zwangskraft}}}{\vec{f}} \quad \Big| \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} \quad , \quad \vec{r}(q_a, t)$

$$\Rightarrow \underbrace{m\ddot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a}} = -(\vec{\nabla} U) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} + \underbrace{\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a}}_{=0} \qquad (*)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a}\right) - m\dot{\vec{r}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} \qquad (**)$$

Es gilt $\quad \dot{\vec{r}} \equiv \dfrac{d}{dt}\vec{r} = \sum\limits_a \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} \cdot \dot{q}_a + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_b}} = \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_b}\left(\sum_a \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} \dot{q}_a\right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_b} \right)$$

Es gilt also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}(q,t)}{\partial q_a} = \sum_b \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_a \partial q_b} \cdot \dot{q}_b + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_a \partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_a}\Big(\underbrace{\sum_b \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}}_{=\dot{\vec{r}}}\Big) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_a}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\Big(m\dot{\vec{r}}\,\underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a}}_{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_a}}\Big) = \frac{d}{dt}\, m\dot{\vec{r}}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_a}$$

$$-m\dot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_a} = -m\dot{\vec{r}}\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_a}$$

$$\rightsquigarrow (**): \quad \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_a}\right) - m\dot{\vec{r}}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_a}$$

$$= \frac{d}{dt}\,\underbrace{m\dot{\vec{r}}\,\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_a}}_{\frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial\dot{q}_a}\dot{\vec{r}}^{\,2}} - \underbrace{m\dot{\vec{r}}\,\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_a}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_a}\dot{\vec{r}}^{\,2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_a}\dot{\vec{r}}^{\,2}\right) - \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial q_a}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$$= \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a}\,, \qquad T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$$\rightsquigarrow (*) \quad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = -\frac{\partial U(\vec{r}(q))}{\partial q_a}$$

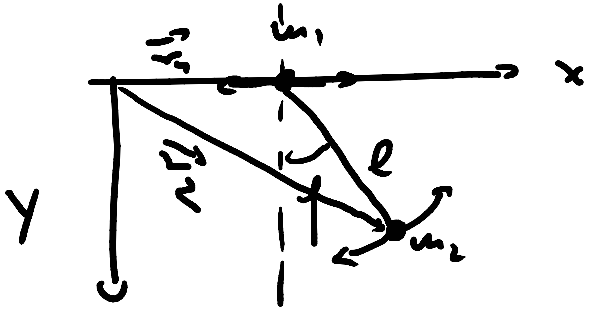
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_a} - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_a}}_{=0}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_a} - \frac{\partial U}{\partial q_a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0, \qquad L = T - U} \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ E-L ist äquivalent zu NG für 1 Teilchen

gilt auch für N-Teilchen (Beweis [H,R])

Beispiel 2: Pendel mit beweg. Aufhängpunkt



System mit 2 Freiheitsgrad

<u>1. Schritt</u>: verallgemeinerte Koordinaten $\underset{q_1}{x(t)}, \underset{q_2}{\varphi(t)}$

" Geschwindigkeit $\dot{x}, \dot{\varphi}$

$\dot{q}_1, \dot{q}_2$

2. Schritt: Aufstellen von $L(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$

$$L = T - U, \qquad T = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{\,2}$$

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1, \quad \vec{r}_1 = x(t)\, \vec{e}_x, \quad \dot{\vec{r}}_1 = \dot{x}\, \vec{e}_x$$

$$\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + l \sin\varphi\, \vec{e}_x + l \cos\varphi\, \vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{x}\, \vec{e}_x + l \cos\varphi\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_x - l \sin\varphi\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_y$$

$$= (\dot{x} + l \cos\varphi\, \dot{\varphi})\, \vec{e}_x - l \sin\varphi\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left((\dot{x} + l \cos\varphi\, \dot{\varphi})^2 + l^2 \sin^2\varphi\, \dot{\varphi}^2 \right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^2 + l^2 \cos^2\varphi \, \dot{\varphi}^2 + 2 l \cos\varphi \, \dot{x} \dot{\varphi} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \, l^2 \sin^2\varphi \, \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \, l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 \, l \cos\varphi \, \dot{x} \dot{\varphi}$$

$$U = - m_2 \, g \, l \cos\varphi$$

$$\boxed{L(\cancel{x}, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \, l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 \, l \cos\varphi \, \dot{x} \dot{\varphi} + m_2 \, g \, l \cos\varphi}$$

3. Schritt E-L : $\dfrac{\partial L}{\partial q_a} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_a} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = - m_2 l \sin\varphi \, \dot x \dot\varphi - m_2 g l \sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = (m_1 + m_2)\,\dot x + m_2 l \cos\varphi \,\dot\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m_2 l^2 \dot\varphi + m_2 l \cos\varphi \,\dot x$$

E-L : $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot x} = + (m_1 + m_2)\,\ddot x + m_2 l \cos\varphi \,\ddot\varphi - m_2 l \sin\varphi \,\dot\varphi^2 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = - m_2 l \cancel{\sin\varphi} \,\dot x \dot\varphi - m_2 g l \sin\varphi$$

$$- \left(m_2 l^2 \ddot\varphi + m_2 l \cos\varphi \,\ddot x - m_2 l \cancel{\sin\varphi} \,\dot\varphi \dot x \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\left[\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right] = 0 \\ l^2\ddot{\varphi} + l\cos\varphi\, \ddot{x} + g l \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$\widehat{=}$ 2 gekoppelte DGL

<u>4. Schritt</u>: lösen schwierig $\Rightarrow$ φ klein

$\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi = \varphi$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\left[\ddot{\varphi} - \cancel{\dot{\varphi}^2\varphi}\right] = 0 \qquad (1)$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0 \qquad (2)$$

(2): $\ddot{x} = -l\ddot{\varphi} - g\varphi \quad \rightsquigarrow \quad (1): (m_1+m_2)(-l\ddot{\varphi} - g\varphi) + m_2 \cancel{l\ddot{\varphi}} = 0$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ Ersetzung ~~[illegible]~~

$$\Rightarrow -\ell m_1 \ddot{\varphi} - g(m_1+m_2)\,\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{g(m_1+m_2)}{\ell m_1} \overset{m_1 \gg m_2}{=} \frac{g}{\ell}$$

$$\Rightarrow \varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\cancel{B\ \ddot{X} = \varphi}$$

$$(m_1+m_2)\,\ddot{x} = -m_2 \ell \underbrace{\ddot{\varphi}}_{-\omega^2\varphi} = + m_2\omega^2\ell\varphi$$

$$\boxed{X(t) = \underbrace{\hat{A} + \hat{B}t}_{\text{geradlinig gleichförmige Bewegung des Aufhängpunkt}} + m_2\omega^2\varphi^2}$$