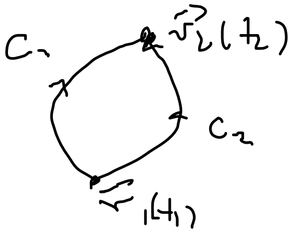
2. Vorlesung: Konservative Kraftfelder

Annahme: $\vec{F}(\vec{r}(t)) \neq \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Def: Arbeit $W_{12}(C)$

$$W_{12}(C) := \int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1, C}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt$$



Def 4: Ein Kraftfeld $\vec{F}$ heißt konservativ falls W_{12} nicht von Weg C abhängt.

Satz 2: Ein Kraftfeld ist konservativ genau dann wenn $W=0$ gilt entlang jedes geschlossenen Weges

Beweis. Ann: $\vec{F}$ ist konservativ, Beh: $W=0$

$$W_{12}(C_1) = W_{12}(C_2) = -W_{21}(C_2)$$

$$\int_{C_1 \cup (-C_2)} \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \qquad \blacksquare$$

Ann: $W=0$, Beh: $\vec{F}$ ist konservativ

$$\int_{C_1 \cup (C_2)} \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \qquad \blacksquare$$

Satz: $\vec{F}$ ist konservativ genau dann, wenn es eine skalare Funktion $U(\vec{r}(t))$ auf $\mathbb{R}^3$ existiert mit

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}\, U(\vec{r}(t))}$$

U heißt Potential, $\qquad \vec{\nabla} U := \vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}$

Beweis: i) U existiert $\Rightarrow$ Wegunabhängigkeit von W

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(\vec{\nabla} U) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = (\vec{\nabla} U) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}\, dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt}\, dt = -\left[U(\vec{r}_2(t_2)) - U(\vec{r}_1(t_1)) \right] \Rightarrow W \text{ wegunabhängig}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ konservativ □

ii) W sei wegunabhängig $\Rightarrow$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

Def 5: $$U(\vec{r}(t)) := -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}(t)} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = -\int_{t_1}^{t} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}\,dt'$$

$$\frac{dU}{dt} = \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \blacksquare$$

Bemerkungen

- U heißt Potential
- U ist nur bis auf eine Konstante c bestimmt

$$\vec{\nabla}(U + c) = \vec{\nabla} U + \underbrace{\vec{\nabla} c}_{=0} = \vec{\nabla} U = -\vec{F}$$

- Für konservative Kräfte gilt $\boxed{W_{12} = -U(\vec{r}_1(t_1)) + U(\vec{r}_2(t_2))}$

Satz 4: Falls $\vec{F}$ konservativ ist gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Beweis:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \overset{\text{def}}{=} \vec{e}_x \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}}_{\equiv \partial_y} F_z - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}}_{\equiv \partial_z} F_y \right) + \vec{e}_y \left(\partial_z F_x - \partial_x F_z \right)$$

$$+ \vec{e}_z \left(\partial_x F_y - \partial_y F_x \right)$$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$
$= -(\vec{e}_x \partial_x U + \vec{e}_y \partial_y U + \vec{e}_z \partial_z U)$

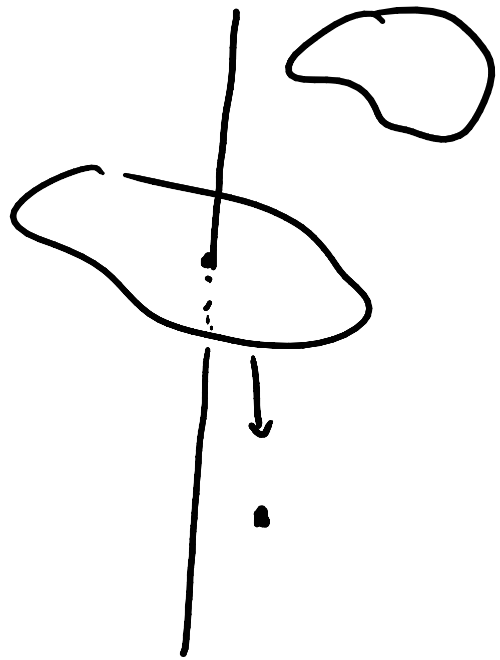
$$\longrightarrow = \vec{e}_x \underbrace{\left(\partial_y \partial_z U - \partial_z \partial_y U \right)}_{=0} + \vec{e}_y \underbrace{\left(\partial_z \partial_x U - \partial_x \partial_z U \right)}_{=0}$$

$$+ \vec{e}_z \underbrace{\left(\partial_x \partial_y U - \partial_y \partial_x U \right)}_{=0} = \vec{0} \quad \blacksquare$$

Satz 5: Falls $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}$ <u>nicht</u> konservativ

Satz 6: Falls $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet dann gilt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$



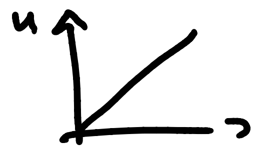
(weitere Diskussion → Übung Blatt Aufgabe 3)

Beispiele für konservative Kraftfelder

i) $\vec{F} = \vec{F}_0$ = konstant

$$= -\vec{\nabla} U \quad , \quad U = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r}$$

homogenes Gravitationsfeld : $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, $U = mgz$



ii) Zentralkraft $\vec{F} = f(|\vec{r}|) \cdot \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $\vec{F} \parallel \vec{r}$

sind immer konservativ (Beweis in Übungen Blatt 1 3c

Newtonsche Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \quad , \quad U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

iii) harmonischer Oszillator

$$\vec F = k\vec r \quad , \quad U = \frac{1}{2} k\, \vec r\cdot\vec r$$

Energie eines Teilchens

$$\vec F = \vec F(\vec r(t)) + \vec F(\dot{\vec r}(t), t)$$

$$m\ddot{\vec r} = \vec F(\vec r(t)) \qquad \text{(BG)}$$

$$m\underbrace{\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}) = \frac{1}{2}(\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r} + \dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r}) = \ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}} = \vec F\cdot\dot{\vec r}$$

$$\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r})\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\vec F\,\frac{d\vec r}{dt}\,dt = W \qquad (*)$$

Def 6: Kinetische Energie eines Teilchens

$$\boxed{T := \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{m}{2} \vec{v}^{\,2}}$$

~~Falls~~

$\Downarrow$ $(*)$: $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt}\, dt = W \iff \boxed{T(t_2) - T(t_1) = W}$$

Falls F konservativ $\Rightarrow$ $W = U(t_1) - U(t_2)$

$$\Downarrow \quad T(t_2) - T(t_1) = -U(t_2) + U(t_1)$$

$$\Rightarrow \quad T(t_2) + U(t_2) = T(t_1) + U(t_1) \, ,$$

Gesamtenergie $E = T + U$

$$\Rightarrow \quad E(t_1) = E(t_2)$$

<u>Energiesatz</u>: Für konservative Kraftfelder ist die Gesamtenergie $E = T + U$ zeitlich konstant entlang der Bahnkurve

<u>Beweis</u>: $$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\,\dot{\vec{r}}) + \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{2}{2} m\, \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - \vec{F}\,\dot{\vec{r}} = \underbrace{(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F})}_{=0\ (NG)} \cdot \dot{\vec{r}}$$