Übungsblatt 6 Quantenfeldtheorie II WS 07/08

Aufgabe 1

Gegeben sei die DGL

$$\left[\partial_t + v(x)\partial_x - \rho(x)\right] D(t,x) = 0 \ .$$

Zeigen Sie, daß der folgende Ausdruck diese DGL löst

$$D(t,x) = \hat{D}(\bar{x}(t,x)) \exp\left[\int_0^t dt' \rho(\bar{x}(t',x))\right] \ ,$$

wobei gilt

$$\frac{d\bar{x}(t',x)}{dt'} = -v(\bar{x}) \ , \qquad \bar{x}(0,x) = x \ . \tag{1}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß gilt $(\partial_t + v(x)\partial_x)\,\bar{x} = 0$. Integrieren Sie hierzu (1) zwischen x und $\bar{x}$ und differenzieren anschließend nach x

Aufgabe 2

Diskutieren Sie qualitativ die physikalischen Eigenschaften folgender β-Funktionen. Was ist die Bedeutung von λ_*?

Aufgabe 3

Gegeben sei eine $SU(n)$ Eichtheorie mit der Wirkung

$$\mathcal{L} = \sum_i \left(\bar{\psi}_i i\gamma^\mu D_\mu \psi_i - m\bar{\psi}_i\psi_i\right) - \frac{1}{4}\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu\, a} \ ,$$

mit

$$D_\mu\psi_i = \partial_\mu\psi_i - ig\sum_{a,j} A^a_\mu T^a_{ij}\psi_j \ , \qquad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \ .$$

a) Zeigen Sie

$$\sum_{j=1}^{n} [D_\mu, D_\nu]_{ij}\,\psi_j \ = \ -ig\sum_{j=1}^{n} (F_{\mu\nu})_{ij}\,\psi_j \ .$$

b) Berechnen Sie den Noether-Strom

$$j^a_\mu = \bar{\psi}_i T^a_{ij}\psi_j \ .$$

c) Zeigen Sie, daß

$$D_\rho F_{\mu\nu} := \partial_\rho F_{\mu\nu} - ig[A_\rho, F_{\mu\nu}]$$

eine kovariante Ableitung ist. Wie lautet $D_\rho F^a_{\mu\nu}$?

d) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen

$$i\gamma^\mu(D_\mu\psi)_i - m\psi_i = 0 \ , \qquad D^\mu F^a_{\mu\nu} = j^a_\mu \ .$$

e) Zeigen Sie

$$D_\rho F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0$$

f) Zeigen Sie

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} tr(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) = \partial_\mu\omega^\mu \ ,$$

und berechnen Sie ω^μ.