Aufgabe 1

a) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}ax^2+Jx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\; e^{\frac{J^2}{2a}} \; .$$

b) Zeigen Sie

$$Z(J) := \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots dx_N\, e^{-\frac{1}{2}x\cdot A\cdot x+J\cdot x} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(A)}}\; e^{\frac{1}{2}J^T\cdot A^{-1}\cdot J} \; ,$$

mit $x \cdot A \cdot x \equiv \sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j, \quad J \cdot x \equiv \sum_{i=1}^{N} J_i x_i.$

Hinweis: Diagonalisieren Sie A und führen sie dann eine entsprechende Koordinatentransformation durch.

c) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots dx_N\, x_i x_j x_k x_l\, e^{-\frac{1}{2}x\cdot A\cdot x}$$

durch geeignetes differenzieren von $Z(J)$.

d) Zeigen Sie

$$\int \frac{dp}{2\pi}\, e^{i\left[p(q_{k+1}-q_k)-\epsilon\frac{p^2}{2m}\right]} = \frac{1}{C}\, e^{\frac{im}{2\epsilon}(q_{k+1}-q_k)^2}$$

und berechnen Sie C.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft $J(t)$ und Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + Jx$.

a) Schreiben Sie die Wirkung in der Form

$$S = \int dt\, [\tfrac{1}{2}\, xAx + Jx]$$

und bestimmen Sie den Differentialoperator A.

b) Die Greensche Funktion $G(t-t')$ von A erfüllt

$$A(t)\, G(t-t') = \delta(t-t')$$

Zeigen Sie

$$S = \int dt\, x' A x' - \tfrac{1}{2} \int dt dt'\, J(t) G(t-t') J(t')$$

für $x'(t) = x(t) + \int dt' G(t-t') J(t')$.

c) Wie lautet die Fourier-Darstellung von $G(t-t')$?