

Universität Hamburg
Wintersemester 2007/08
Dozent: Jan Louis

Skript

zur Vorlesung

Quantenfeldtheorie II

Autoren:

Jasper Hasenkamp
Manuel Meyer
Björn Sarrazin
Michael Grefe
Jannes Heinze
Sebastian Jacobs
Christoph Piefke

Stand: 8. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Pfadintegral Quantisierung [P.S. 9.1]	2
2	Verallgemeinerung auf beliebige Quantensysteme	4
3	VL 3: Erzeugende Funktional	6
4	VL 4: Die effektive Wirkung	8
5	Vorlesung 6: Pfadintegral für Fermionen	11
6	Vorlesung 11: Callan-Symanzik-Gleichung	15
7	Eine kleine Gruppentheorie	19
8	Vorlesung 14: Feynmanregeln für SU(N)	25
9	1-Loop-Divergenzen in nichtabelschen Eichtheorien	27
10	VL 17: Quantenchromodynamik QCD	33
	10.1 Wie transformiert q ?	33
	10.2 Invarianten	34
	10.3 Lösung der RG-Gleichung	35
	10.4 Experimentelle Befunde	35
11	VL 18: deep-inelastic scattering (DIS)	36
12	Higgs-Mechanismus	39
	12.1 $U(1)$ Eichtheorie mit geladenem Skalarfeld	39
	12.2 $SU(N)$ Eichtheorie mit geladenen Skalarfeldern ϕ_i	41
	12.3 Beispiel: $SU(2)$ Eichtheorie mit Higgsdublett	42
13	Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem	43
	13.1 Motivation: Reelles Skalarfeld mit diskreter Symmetrie	43
	13.2 Verallgemeinerung 1: Komplexes Skalarfeld mit $U(1)$ -Symmetrie	44
	13.3 Verallgemeinerung 2: N komplexe Skalarfelder mit globaler $U(N)$ -Symmetrie	45
	13.4 Goldstone-Theorem	46
14	Glashow-Salam-Weinberg-Theorie	48
15	Anomalien in Quantenfeldtheorien	55

Autor: Christoph Piefke

1 Pfadintegral Quantisierung [P.S. 9.1]

Wir betrachten zunächst nicht relativistische Teilchen in einer Dimension. Der Hamiltonian lautet:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (1.1)$$

Uns interessiert die Amplitude für ein Teilchen, das sich im Ortstraum von x_a nach x_b in der Zeit T bewegt. Wir haben bereits in der Quantenmechanik eine Möglichkeit gefunden, diese zu berechnen, nämlich mit dem Zeitentwicklungsoperator im Schrödinger-Bild (hinter dem ersten Gleichheitszeichen in (1.2)). Feynman hat eine andere Technik vorgeschlagen, die der Pfadintegrale (nach dem zweiten Gleichheitszeichen in (1.2)). In dieser Vorlesung soll gezeigt werden, dass die in (1.2) angegebene Identität wahr ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x_a, x_b, T) &= \langle x_b | e^{-\frac{i\mathcal{H}T}{\hbar}} | x_a \rangle \\ &= \int Dx(t) e^{\frac{iS[x(t)]}{\hbar}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dabei ist S die Wirkung

$$S = \int_0^T dt L = \int_0^T dT \left(\frac{m}{2} v^2 - V(x) \right), \quad (1.3)$$

$x(t)$ der Pfad von x_a nach x_b und

$$\int Dx(t) = \text{Die Summe über alle Pfade von } x_a \text{ nach } x_b. \quad (1.4)$$

Die eckigen Klammern hinter S deuten an, dass es sich bei S um ein Funktional handelt. $F[x(t)]$ ist eine Abbildung von Funktionen in die reellen Zahlen. Wir definieren die Funktionalableitung $\frac{\delta F[x(t)]}{\delta x(t)}$ mit den gleichen Rechenregeln wie die Ableitung in \mathbb{R} . Betrachten wir die rechte Seite von (1.2) im klassischen Limes, also $\hbar \rightarrow 0$, beginnt die Exponentialfunktion heftig zu oszillieren und der dominante Anteil des Integrals ist der, bei dem S minimal wird, also die klassische Bahn eines Punkteilchens. Die klassisch verbotenen Wege sind also die Quantenkorrekturen. Wir werden die Pfadintegrale durch Diskretisierung berechnen.

$$S = \int_0^T dt \left(\frac{m}{2} v^2 - V(x) \right) = \sum_k \left(\frac{m}{2} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{\epsilon} - \epsilon V\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) \right) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \int Dx(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{c(\epsilon)} \int \frac{dx_1}{c(\epsilon)} \int \frac{dx_2}{c(\epsilon)} \dots \int \frac{dx_{N-1}}{c(\epsilon)} \\ &= \frac{1}{c(\epsilon)} \prod_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_k}{c(\epsilon)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die Normierungskonstante ist dabei $c(\epsilon) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon}{-im}}$, wie später noch deutlich werden wird.

Per Induktion wird nun (1.2) bewiesen, indem gezeigt wird, dass beide Seiten die gleiche DGL erfüllen. Letzter Schritt, $x_{N-1} \rightarrow x_b$:

$$\mathcal{U}(x_a, x_b, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{c(\epsilon)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \frac{(x_b - x')^2}{\epsilon} - \epsilon V\left(\frac{x_b - x'}{2}\right)\right)\right] \mathcal{U}(x_a, x', T - \epsilon) \quad (1.7)$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ ist $x_a \sim x_b$, wir entwickeln also Taylor um $x' = x_b$.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x_a, x_b, T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{c(\epsilon)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2\epsilon} (x_b - x')^2\right] \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_b) + o(\epsilon^2)\right) \times \\ &\quad \times \left(1 + (x' - x_b) \frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{1}{2} (x' - x_b)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_b^2} + \dots\right) \mathcal{U}(x_a, x_b, T - \epsilon) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Hier sind nur Gauß-Integrale auszuführen. Wir benötigen

$$\begin{aligned} \int d\xi e^{-b\xi^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \\ \int d\xi \xi e^{-b\xi^2} &= 0 \\ \int d\xi \xi^2 e^{-b\xi^2} &= \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

und berechnen dann:

$$\mathcal{U}(x_a, x_b, T) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon}{-im}} \left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_b) + \underbrace{\frac{i\epsilon\hbar}{2m}}_{=\frac{1}{4b}} + o(\epsilon^2)\right] \mathcal{U}(x_a, x_b, T - \epsilon) \quad (1.10)$$

Prüfe nun: für $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$ rechte Seite geht gegen $\mathcal{U}(x_a, x_b, T)$. Dies legt ausserdem $c(\epsilon)$ wie oben angeben fest.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\mathcal{U}(x_a, x_b, T) - \mathcal{U}(x_a, x_b, T - \epsilon)}{\epsilon} &= \left(V(x_b) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_b^2}\right) \mathcal{U}(x_a, x_b, T - \epsilon) \\ \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \quad i\hbar \frac{\partial \mathcal{U}(x_a, x_b, T)}{\partial T} &= \mathcal{H} \mathcal{U}(x_a, x_b, T) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Die Pfadintegraldarstellung erfüllt also die Schrödingergleichung. Erfüllen beide Darstellungen aus (1.2) auch die gleichen Randbedingungen?

$$T \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{i\mathcal{H}T}{\hbar}} \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \langle x_a | e^{-\frac{i\mathcal{H}T}{\hbar}} | x_b \rangle \rightarrow \delta(x_a - x_b) \quad (1.12)$$

und

$$\frac{1}{c} \exp\left[\frac{1}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{\epsilon} + o(\epsilon^2)\right)\right] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \delta(x_a - x_b) \quad (1.13)$$

Damit entspricht die linke Seite von (1.2) der rechten Seite bei $T = 0$ und die Formel ist bewiesen.

Vorteile der Pfadintegraldarstellung: sie ist kein störungstheoretischer Ansatz sondern exakt. Außerdem ist sie invariant unter Lorentztransformationen.

2 Verallgemeinerung auf beliebige Quantensysteme

Wir diskretisieren die Zeit, im folgenden gilt $\hbar = 1$.

$$\begin{aligned} q^i, p^i, \mathcal{H}(q^i, p^i), \quad i = 1, \dots, n \\ \mathcal{U}(q_a, q_b, T) = \langle q_b | e^{-i\mathcal{H}T} | q_a \rangle \quad ; \quad e^{-i\mathcal{H}T} = \underbrace{e^{-i\mathcal{H}\epsilon} \dots e^{-i\mathcal{H}\epsilon}}_{N \text{ Faktoren}} \\ 1 = \prod_i \int dq_k^i |q_k\rangle \langle q_k| \quad q_0 = q_a \quad q_N = q_b \end{aligned} \quad (2.1)$$

Wir lassen \mathcal{H} wirken und ϵ gegen Null gehen, dann gilt:

$$\langle q_{k+1} | e^{-i\hat{\mathcal{H}}\epsilon} | q_k \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \langle q_{k+1} | (1 - i\hat{\mathcal{H}}\epsilon + o(\epsilon^2)) | q_k \rangle \quad (2.2)$$

Ansatz für \mathcal{H} : $\hat{\mathcal{H}} = \hat{f}(q) + \hat{f}'(p) + \hat{f}''(p, q)$

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1} | \hat{f}(q) | q_k \rangle &= f(q) \prod_i \delta(q_k^i - q_{k+1}^i) \\ \langle q_{k+1} | \hat{f}'(q) | q_k \rangle &= \prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} \underbrace{\langle q_{k+1} | p_k \rangle}_{=\exp[i \sum_j p_k^j q_{k+1}^j]} \underbrace{\langle p_k | \hat{f}'(p) | q_k \rangle}_{=\exp[i \sum_j p_k^j q_k^j]} f'(p_k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hier finden wir die Ortsdarstellung der Impulseigenzustände und damit

$$\langle q_{k+1} | \hat{f}'(q) | q_k \rangle = \prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} f'(p_k) \exp\left[i \sum_j p_k^j (q_{k+1}^j - q_k^j)\right] \quad (2.4)$$

\hat{f}'' sei weylgeordnet, z.B. $f'' = \frac{1}{4}(p^2 q^2 + q^2 p^2 + 2qp^2q)$, dann gilt so etwas wie:

$$\langle q_{k+1} | \hat{f}''(p, q) | q_k \rangle = \left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}\right)^2 \langle q_{k+1} | p^2 | q_k \rangle \quad (2.5)$$

mit p^2 hier beispielsweise als $f'(p)$. \Rightarrow

$$\langle q_{k+1} | \hat{\mathcal{H}}_{WO} | q_k \rangle = \prod_i \int \frac{dp_k^i}{2\pi} \exp\left[-i\mathcal{H}\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{2}, p_k\right)\epsilon\right] \exp\left[i \sum_j p_k^j (q_{k+1}^j - q_k^j)\right] \quad (2.6)$$

Um \mathcal{U} zu bekommen, muss noch über alle Orte integriert werden.

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(q_0, q_N, T) &= \prod_k \prod_i \int dq_k^i \int \frac{dp^i}{2\pi} \exp\left[i\left(\sum_{i'} p_k^{i'} (q_{k+1}^{i'} - q_k^{i'}) - \epsilon \mathcal{H}\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{2}, p_k\right)\right)\right] \\
&= \prod_i \int Dq^i(t) Dp^i(t) \exp\left[i \int_0^T dt \left(\sum_j p^j \dot{q}^j - \mathcal{H}(p, q)\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Autor: Jasper Hasenkamp

3 VL 3: Erzeugende Funktional

By: Jasper Hasenkamp

Wir führen die Funktionalableitung $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ durch

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta(x - y) \quad (3.1)$$

(vgl. $\frac{\partial}{\partial x_i} x^j = \delta_i^j$)

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4 y J(y) \Phi(y) = \int d^4 y \delta(x - y) \Phi(y) = \Phi(x) \quad (3.2)$$

(vgl. $\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j x_j k_j = k_i$) ein.

Die Ableitungsregeln werden erfüllt. Insbesondere

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left\{ \iota \int d^4 y J(y) \Phi(y) \right\} = \iota \Phi(x) \exp \left\{ \iota \int d^4 y J(y) \Phi(y) \right\} \quad (3.3)$$

und

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4 y V^\mu(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu} J(y) = - \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4 y \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} V^\mu(y) \right) J(y) = - (\partial_\mu V^\mu). \quad (3.4)$$

Wir definieren das Erzeugende Funktional $Z[J]$:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ \iota \int d^4 x (\mathcal{L} + J(x) \Phi(x)) \right\} \quad (3.5)$$

$$\langle \Omega | T \{ \Phi(x_1) \Phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \frac{1}{Z_0} \left(-\iota \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(-\iota \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0} \quad (3.6)$$

Dabei gilt $Z_0 \equiv Z[J=0]$. Wir überprüfen:

$$-\iota \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] = -\iota \int \mathcal{D}\Phi \iota \Phi(x_2) \exp \left\{ \iota \int d^4 x (\mathcal{L} + J\Phi) \right\} \quad (3.7)$$

Was analog für n-Punktfunktionen gilt.

Betrachten wir eine wechselwirkende Theorie mit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \Phi^4. \quad (3.8)$$

Sie ist nur störungstheoretisch berechenbar. Es ergibt sich

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{\iota S} = \int \mathcal{D}\Phi e^{\iota S_0} \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \Phi^4(x) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right) \quad (3.9)$$

Wir haben also gefunden:

$$\frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi_1 \dots \Phi_n e^{\iota S}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{\iota S}} = \langle \Omega | T \{ \Phi_1 \dots \Phi_n \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-\iota\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \Phi_1 \dots \Phi_n e^{-\iota \int_{-T}^T H_I} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-\iota \int_{-T}^T H_I} \} | 0 \rangle} \quad (3.10)$$

Also ergibt sich:

$$\frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1) \Phi(x_2) e^{\iota \int d^4x (\mathcal{L} + J\Phi)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{\int \mathcal{D}\Phi e^{\iota S}} \int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1) \Phi(x_2) e^{\iota S} \quad (3.11)$$

Für $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2)$ gilt

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{\iota \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\Phi)} = Z_0 e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y)} \quad (3.12)$$

Beweis:

$$\int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\Phi) = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2) + J\Phi = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} (\square + m^2) \Phi + J\Phi \right) \quad (3.13)$$

Die quadratische Ergänzung $\Phi(x) = \Phi'(x) + \iota \int d^4y G_F(x-y) J(y)$ und $(\square + m^2) G_F(x-y) = \iota \delta^{(4)}(x-y)$ führen auf

$$= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} (\Phi'(\square + m^2) \Phi') - \Phi' J \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \right) \right) + \frac{\iota}{2} \int d^4y J(y) G_F(x-y) J(x) \quad (3.14)$$

Damit überprüfe:

$$\langle 0 | T \{ \Phi(x_1) \Phi(x_2) \} | 0 \rangle \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{Z_0} \left(-\iota \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z_0 e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y)} \Big|_{J=0} \quad (3.16)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y)} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y) \right) \Big|_{J=0} \right) \quad (3.17)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) J(y)} \left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \delta(x-x_2) G_F(x-y) J(y) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) G_F(x-y) \delta(y-x_2) \right) \Big|_{J=0} \quad (3.18)$$

$$= -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(e^{-\frac{1}{2} \int \dots} \left(-\frac{1}{2} \int d^4y J(x) G_F(x-x_2) + \int d^4y G_F(x_2-y) J(y) \right) \Big|_{J=0} \right) \quad (3.19)$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(e^{-\frac{1}{2} \int \dots} \int d^4x J(x) G_F(x-x_2) \right) \Big|_{J=0} \quad (3.20)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \int \dots} \int d^4x \delta(x-x_1) G_F(x-x_2) \Big|_{J=0} = G_F(x_1-x_2) \quad (3.21)$$

Dabei wurde benutzt, dass der Ausdruck für $J = 0$ ausgewertet wird. Terme, die dabei verschwinden wurden nicht aufgeführt.

Autor: Jasper Hasenkamp

4 VL 4: Die effektive Wirkung

By: Jasper Hasenkamp

Definition:

$$E[J] = \ln Z[J] \quad (4.1)$$

Achtung: Hier ist der Sprachgebrauch oft uneindeutig. Berechne:

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J(x)} = \frac{\iota}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = - \frac{\int \mathcal{D}\Phi e^{\iota \int d^4x \mathcal{L} + J\Phi} \Phi(x)}{\int \mathcal{D}\Phi e^{\iota \int d^4x \mathcal{L} + J\Phi}} \equiv -\langle \Phi(x) \rangle_J \quad (4.2)$$

Wobei im letzten Schritt eine abkürzende Schreibweise eingeführt wurde, die von jetzt an oft verwendet wird.

$$\frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} = \frac{\iota}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} - \frac{\iota}{Z[J]^2} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \quad (4.3)$$

$$= -\iota (\langle \Phi(x) \Phi(y) \rangle_J - \langle \Phi(x) \rangle_J \langle \Phi(y) \rangle_J) \quad (4.4)$$

So dass

$$\left. \frac{\delta^2 E}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0} = -\iota (\langle \Phi(x) \Phi(y) \rangle - \langle \Phi(x) \rangle \langle \Phi(y) \rangle) \quad (4.5)$$

Für drei Ableitungen ergibt sich ($J_i \equiv J(x_i)$)

$$\frac{\delta^3 E[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} = \frac{\delta}{\delta J_3} \left(\frac{\iota}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_1} \right) - \frac{\iota}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J_1} \frac{\delta Z}{\delta J_2} \quad (4.6)$$

$$= \frac{\iota}{Z} \frac{\delta^3 Z}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} - \frac{\iota}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J_3} \frac{\delta^2 Z}{\delta J_1 \delta J_2} - \frac{\iota}{Z^2} \left(\frac{\delta^2 Z}{\delta J_1 \delta J_3} \frac{\delta Z}{\delta J_2} + \frac{\delta Z}{\delta J_1} \frac{\delta^2 Z}{\delta J_2 \delta J_3} \right) + \frac{2\iota}{Z^3} \frac{\delta Z}{\delta J_3} \frac{\delta Z}{\delta J_2} \frac{\delta Z}{\delta J_1} \quad (4.7)$$

$$= \langle \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle - \langle \Phi_3 \rangle \langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle - \langle \Phi_2 \rangle \langle \Phi_1 \Phi_3 \rangle - \langle \Phi_1 \rangle \langle \Phi_2 \Phi_3 \rangle + 2 \langle \Phi_1 \rangle \langle \Phi_2 \rangle \langle \Phi_3 \rangle \quad (4.8)$$

$$= \langle \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle_{connected} \quad (4.9)$$

Man kann sagen, die unverbundenen Diagramme werden "genau richtig abgezogen".

Über eine Legendre-Transformation von $E[J]$ ist Γ definiert. Definition:

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -E[J] - \int d^4y J(y) \Phi_{cl}(y) \quad (4.10)$$

Hierbei steht cl für klassisch. Φ_{cl} ist die konjugierte Variable von J , i.e. $\Phi_{cl} = -\frac{\delta E[J]}{\delta J(x)}$. Welche Diagramme erzeugt Γ ?

$$\frac{\delta \Gamma[\Phi_{cl}]}{\delta \Phi_{cl}} = -J(x) \quad (4.11)$$

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi_{cl}} = -\delta(x-y) = \int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma[\Phi_{cl}]}{\delta \Phi_{cl}(x) \delta \Phi_{cl}(z)} \frac{\delta \Phi_{cl}(z)}{\delta J(y)} \quad (4.12)$$

$$= - \int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma[\Phi_{cl}]}{\delta \Phi_{cl}(x) \delta \Phi_{cl}(z)} \frac{\delta^2 E}{\delta J(z) \delta J(y)} \quad (4.13)$$

Hierbei wurde die Kettenregel für Funktionalableitungen benutzt. Es gilt:

$$\frac{\delta}{\delta J} f[\Phi(J)] = \int dy \frac{\delta f}{\delta \Phi(y)} \frac{\delta \Phi(y)}{\delta J(x)} \quad (4.14)$$

Wir schließen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 E}{\delta J(x) \delta J(y)} &= \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\Phi_{cl}]}{\delta \Phi_{cl}(x) \delta \Phi_{cl}(y)} \right)^{-1} = -\iota \langle \Phi(x) \Phi(y) \rangle_{connected} \\ &= -\iota G(x-y) = \quad x \bullet \text{---} \bullet y \end{aligned} \quad (4.15)$$

Betrachten wir die dritte Ableitung:

$$\frac{\delta^2 E[J]}{\delta J_x \delta J_y \delta J_z} = \frac{\delta}{\delta J_z} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi_x \delta \Phi_y} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

$$= \int d^4 w \frac{\delta}{\delta \Phi_w} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi_x \delta \Phi_y} \right)^{-1} \frac{\delta \Phi_w}{\delta J(z)} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} &= -\iota \int d^4 w d^4 v d^4 u \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi_x \delta \Phi_u} \right)^{-1} \left(\frac{\delta}{\delta \Phi_w} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi_u \delta \Phi_v} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi_v \delta \Phi_y} \right)^{-1} G(w-z) \\ &= \iota \int d^4 w d^4 v d^4 u G(x-u) \left(\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \Phi_w \delta \Phi_u \delta \Phi_v} \right) G(v-y) G(w-z) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$= \iota \int d^4 w d^4 v d^4 u G_F(w-z) G_F(x-u) G_F(v-y) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \Phi_w \delta \Phi_u \delta \Phi_v} \quad (4.19)$$

Hierbei wurde von Zeile 2 zu Zeile 3 benutzt, dass wegen $\partial(MM^{-1}) = 0 = (\partial M)M^{-1} + M\partial M^{-1}$ gilt:

$$\partial M^{-1} = MM^{-1}\partial M^{-1} = M^{-1}(\partial M)M^{-1} \quad (4.20)$$

Somit ist das Ergebnis also:

$$\iota \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \Phi_{cl}(x) \delta \Phi_{cl}(y) \delta \Phi_{cl}(z)} = \langle \Phi(x) \Phi(y) \Phi(z) \rangle_{1PI} \quad (4.21)$$

Wobei 1PI für one-particle-irreducible steht, also alle nicht-reduzierbaren Ein-Teilchen-Diagramme bezeichnet. Das Ergebnis lässt sich durch vollständige Induktion direkt auf n externe Punkte verallgemeinern. Diagrammatisch kann das Ergebnis für drei externe Punkte verdeutlicht werden durch:

Diagrammatic equation (4.22) showing the decomposition of a connected vertex into a 1PI vertex with external legs.

The left side of the equation shows a central circle labeled "conn." with three external legs: a vertical line labeled "x" extending upwards, and two diagonal lines labeled "y" (left) and "z" (right).

The right side of the equation shows a central circle labeled "1PI" with four external legs: a vertical line labeled "x" extending upwards, and three diagonal lines labeled "y" (left), "z" (right), and "u" (downwards). The legs "y" and "z" are terminated by small open circles. The legs "u" and "v" (labeled on the left) are terminated by small solid black dots. The leg "w" (labeled on the right) is terminated by a small solid black dot.

The equation is labeled (4.22) on the right.

Autor: Manuel Meyer

5 Vorlesung 6: Pfadintegral für Fermionen

Vorlesung vom 13.11.2007, Author: Manuel Meyer, mmeyer@physnet.uni-hamburg.de

Das "Problem": Fermionen erfüllen Antikommutationsrelationen. Dies wird dadurch gelöst, dass man die klassischen Fermionenfelder als *Grassman Variablen* definiert. Grassman Variablen sind antikommutierende Zahlen und erfüllen die folgenden Eigenschaften:

1. Aus ihrer Definition:

$$\theta\eta = -\eta\theta \Rightarrow \theta^2 = 0$$

2. Das Produkt aus zwei Grassman Variablen hingegen ist kommutativ:

$$(\theta\eta)\chi = -\theta\chi\eta = \chi(\theta\eta)$$

Das Produkt $\theta\eta$ wird als *Grassman gerade* bezeichnet, d.h. es vertauscht mit jeder anderen Grassman Variablen.

3. Grassman Variablen sind additiv: $\theta + \eta = \chi$
4. Es gelten die normalen Regeln für die Multiplikation und Addition mit c -Zahlen: $c\theta = \theta c$.
5. **Funktionen:** Jede Funktion von Grassman Variablen kann wegen Eigenschaft 1 nur linear in den Grassman Variablen sein:

$$f(\theta, c) = A(c) + B(c)\theta$$

6. **Differentiation:** Wir definieren die Leibnizregel für Grassman Variablen:

$$\frac{d}{d\eta}(\theta\eta) = \frac{d\theta}{d\eta}\eta - \theta\frac{d\eta}{d\eta} = -\theta$$

7. **Integration:** Für unsere Zwecke sind Integrale der Form $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x+c) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)$ wichtig. Aus diesem Grunde verwendet man bei der Integration von Grassman Variablen die *Berezin Integration*:

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta\theta = 1$$

Wir verwenden die Konvention, dass die Integrationsvariable $d\theta$ immer zur Rechten steht. Diese Definition hat außerdem zufolge, dass

$$\int d\theta(\theta + \eta) = \int d\theta\theta - \eta \int d\theta = \int d\theta\theta = 1$$

gilt. Des Weiteren verwenden wir zusätzlich die Konvention, dass das innere Integral stets zuerst ausgeführt wird:

$$\int d\theta \int d\eta\eta\theta = 1$$

Die Integrationsvariablen antikommutieren also auch.

8. Zusätzlich lassen sich noch komplexe Grassmanns definieren: $\theta := \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2)$ und $\theta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2)$, mit der komplexen Konjugation $(\theta\eta)^* := \eta^*\theta^* = -\theta^*\eta^*$. Die Konventionen für die Integration sollen auch für komplexe Grassmanns gelten.

Wie berechnen zwei Beispiele:

Beispiel 1

Wir berechnen das Äquivalent zum GaußIntegral:

$$\begin{aligned} & \int d\theta^* d\theta e^{-\theta^* b \theta} \quad c \in \mathbf{C} \\ &= \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* b \theta) \\ &= b \int d\theta^* d\theta \theta \theta^* = b \cdot 1 \end{aligned}$$

Zum Vergleich: das GaußIntegral in c -Variablen lieferte $\frac{2\pi}{b}$.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} & \int d\theta^* d\theta \theta \theta^* e^{-\theta^* b \theta} \\ &= \int d\theta^* d\theta \theta \theta^* (1 - \theta^* b \theta) \\ &= \int d\theta^* d\theta \theta \theta^* = 1 = \frac{b}{b} \end{aligned}$$

Die Hinzunahme von $\theta\theta^*$ Faktoren ergeben also Faktoren der Form $\frac{1}{b}$.

Wir betrachten nun welche Auswirkungen eine unitäre Transformation auf das Maß eines Pfadintegrals von Grassman Variablen hat:

$$\mathcal{D}\theta = \prod_{i=1}^N \theta_i = \frac{1}{N!} \epsilon^{i_1 \dots i_N} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_N} \quad (5.1)$$

Mit einer unitären Transformation $\theta_i \rightarrow \theta'_i = \sum_j U_{ij} \theta_j$ mit $UU^\dagger = 1$ ergibt sich dann in (5.1):

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N \theta'_i &= \frac{1}{N!} \underbrace{\epsilon^{i_1 \dots i_N} U_{i_1 i'_1} \dots U_{i_N i'_N}}_{=\det U} \theta_{i'_1} \dots \theta_{i'_N} \\ &\Rightarrow \prod_{i=1}^N \theta_i = \det U \prod_{i=1}^N \theta_i \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde verwendet, dass $\theta_{i'_1} \dots \theta_{i'_N} = \epsilon^{i'_1 \dots i'_N} \cdot X$ ist und dies in (5.1) eingesetzt. Dies liefert $X = \prod_{i=1}^N \theta_i$. Das Maß ist also invariant unter unitären Transformationen. Damit

lässt sich nun das folgende Integral berechnen:

$$\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \exp \left(- \sum_{k,j} \theta_k^* B_{kj} \theta_j \right)$$

Mit der hermiteschen Matrix B , so dass der Exponent reell ist. B lässt sich durch eine unitäre Transformation diagonalisieren: $B = U^{-1} D U$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i \exp \left(- \sum_{k,r,j,l} \theta_k^* U_{kr}^{-1} D_{rj} U_{jl} \theta_l \right) \\ &= \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i' \det U^{-1} \det U \exp \left(- \sum_{r,j} \theta_r^* D_{rj} \theta_j' \right) \\ &= \prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i' \exp \left(- \sum_j \theta_j^* b_j \theta_j' \right) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass D diagonal ist, also $D_{rj} = b_j \delta_{rj}$. Als Endergebnis erhält man die Formel

$$\boxed{\left(\int \prod_i d\theta_i^* d\theta_i \right) \exp \left[- \sum_{k,j} \theta_k^* B_{kj} \theta_j \right] = \prod_i b_i = \det B} \quad (5.2)$$

Auf dem Übungsblatt 4 leiten wir daraus außerdem die Formel

$$\boxed{\left(\int \prod_i d\theta_i^* d\theta_i \right) \theta_n \theta_l^* \exp \left[- \sum_{k,j} \theta_k^* B_{kj} \theta_j \right] = B_{nl}^{-1} \det B} \quad (5.3)$$

her. Die Ergebnisse lassen sich nun ohne Probleme auf Fermionfelder erweitern: die Dirac Spinoren $\psi_a(x)$, $a = 1, \dots, 4$ seien nun grassmanwertige Variablen. Damit ergibt sich das Pfadintegral nach (5.2) und mit $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_a (i\gamma_{ab}^\mu \partial_\mu - m) \psi_b$ zu

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0[\psi, \bar{\psi}]} = c \cdot \det(i\bar{\not{\partial}} - m)$$

Der Propagator (die Zweipunktfunktion) ist nach (5.3)

$$\langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0[\psi, \bar{\psi}]} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0[\psi, \bar{\psi}]}} = \frac{c \cdot \det(i\bar{\not{\partial}} - m)}{c \cdot \det(i\bar{\not{\partial}} - m)} S_F(x_1 - x_2)$$

Analog zu den skalaren Bosonen lässt sich nun auch das erzeugende Funktional für Fermionen definieren:

$$Z[\bar{\eta}, \eta] := \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0[\psi, \bar{\psi}] + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x))}$$

Hier sind $\bar{\eta}(x)$ und $\eta(x)$ sog. Grassman Quellen, analog zu $J(x)$ bei Bosonen. Auch hier lässt sich durch die Variablentransformation $\psi = \psi' + S_F \eta'$ zeigen (siehe Übungsblatt 4), dass

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \underbrace{Z[\bar{\eta} = 0, \eta = 0]}_{:= Z_0} \cdot e^{- \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)}$$

gilt, so dass sich der Zweipunktfunktion auch schreiben lässt als Funktionalableitung von Z :

$$\langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle = Z_0^{-1} \left(-i \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \right) \left(+i \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \right) Z[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

Was sich leicht durch einfaches Nachrechnen nachprüfen lässt:

$$\begin{aligned} & Z_0^{-1} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \cdot Z \cdot \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \left(- \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) \right) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= Z_0^{-1} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \cdot Z \cdot \left(\int d^4x \bar{\eta}(x) S_F(x-x_2) \right) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= \frac{Z}{Z_0} \cdot \int d^4x \frac{\delta\bar{\eta}(x)}{\delta\bar{\eta}(x_2)} S_F(x-x_2) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = S_F(x_1-x_2) \end{aligned}$$

Mit den Definitionen $\beta := \frac{M}{\delta M} \delta \lambda$ und $\gamma = -\frac{M}{\delta M} \delta \zeta$ wird daraus die Callan-Symanzik-Gleichung:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, \lambda, M) = 0$$

analog: masselose QED

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n\gamma_2 + m\gamma_3 \right] G^{(n,m)}(x_1, \dots, M, e) = 0$$

Dabei ist n die Zahl der Elektronenfelder Ψ und m die Zahl der Photonenfelder A_μ .

Lösung der C.S.G. für $G^{(2)}(p)$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(p) &= \frac{i}{p^2} g \left(-\frac{p^2}{M^2} \right) \\ \Rightarrow M \partial_M G^{(2)} &= \frac{i}{p^2} g \frac{2p^2}{M^3} M \\ p \partial_p G^{(2)} &= -2 \frac{i}{p^3} p g \left(-\frac{p^2}{M^2} \right) + \frac{ip}{p^2} g \frac{-2p}{M^2} \\ &= -2G^{(2)} - \frac{i}{p^2} g \frac{2p^2}{M^2} \\ \Rightarrow M \partial_M G^{(2)} &= (-p \partial_p - 2) G^{(2)} \end{aligned}$$

Die C.S.G. wird damit zu:

$$\left[p \partial_p - \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2 - 2\gamma \right] G^{(2)}(p, \lambda, M) = 0$$

Dies ist eine Differentialgleichung vom Typ

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + V(x) \frac{\partial}{\partial x} - \varrho(x) \right] D(x, t) = 0.$$

Sie hat die Lösung

$$\begin{aligned} D(t, x) &= \tilde{D}(\bar{x}(t, x)) \exp \left(\int_0^t dt' \varrho(\bar{x}(t', x)) \right) \\ \text{mit } \frac{\partial \bar{x}(t, x)}{\partial t} &= -V(\bar{x}), \quad \bar{x}(0, x) = x. \end{aligned}$$

In unserem Fall ist

$$\begin{aligned} t &= \ln \frac{p}{M} & \varrho(x) &= 2\gamma(\lambda) - 2 \\ x &= \lambda & V(x) &= -\beta(\lambda) \end{aligned}$$

und damit

$$G^{(2)}(p, \lambda, M) = \tilde{G}(\bar{\lambda}(p, \lambda)) \exp \left\{ - \int_{p'=M}^{p'=p} d \left(\ln \frac{p'}{M} \right) 2 [1 - \gamma(\bar{\lambda}(p', \lambda))] \right\}$$

mit

$$\frac{d}{d \left(\ln \frac{p}{M} \right)} \bar{\lambda}(p, \lambda) = \beta(\bar{\lambda}) \quad \bar{\lambda}(M, \lambda) = \lambda.$$

$\bar{\lambda}$ wird „laufende Kopplungskonstante“ genannt.

Störungstheoretische Berechnung von β, γ für masselose ϕ^4 :

$$G^{(2)}(p) = \text{---} + \text{---} \circlearrowleft + \text{---} \ominus + \dots + \text{---} \times \propto \int d^4 k \frac{1}{k^2}$$

$$G^{(4)}(p) = \text{---} \times \text{---} + \text{---} \circlearrowright + \dots + \text{---} \times \text{---} \times \text{---}$$

$$= \{-i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] + (-i\lambda)^2 (-i\delta\lambda)\} \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2}$$

mit

$$V(p^2) = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\left[\underbrace{m^2}_{=0} - x(1-x)p^2 \right]^{2-d/2}}.$$

Aus der Renormierungsbedingung $G^{(4)}|_{s=t=u=-M^2} = -i\lambda$ folgt

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= (-i\lambda)^2 3V(-M^2) \\ &= \frac{3\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{[x(1-x)M^2]^{2-d/2}} \\ &\stackrel{d \rightarrow 4}{=} \frac{3\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2-d/2} - \ln M^2 + \text{endlich} \right] \\ \Rightarrow M \frac{\partial}{\partial M} G^{(4)} &= \frac{3i\lambda^2}{16\pi^2} \prod_{i=1}^4 \frac{i}{p_i^2} \end{aligned}$$

Für die Zwei-Punkt-Funktion gilt

$$M \frac{\partial}{\partial M} G^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} G^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \gamma = 0 + O(\lambda^2).$$

Die C.S.G. wird damit zu

$$-\beta \frac{\partial}{\partial \lambda} G^{(4)} = \frac{3i\lambda^2}{16\pi^2} \prod_1^4 \frac{i}{p_i^2}.$$

Unter Benutzung von $G^{(4)} = \frac{-i\lambda}{\prod_i p_i^2} + O(\lambda^2)$ folgt daraus

$$\beta = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3).$$

Die verbleibende Gleichung

$$\frac{d}{d \ln \frac{p}{M}} \bar{\lambda}(p, \lambda) = \beta(\bar{\lambda}) = \frac{3\bar{\lambda}^2}{16\pi^2} + O(\bar{\lambda}^3)$$

wird gelöst von

$$\bar{\lambda}(p) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \ln \frac{p}{M}}.$$

Eigenschaften:

- $p = M$: $\bar{\lambda} = \lambda$
- $p \rightarrow 0$: $\bar{\lambda} \rightarrow 0$
- $p \rightarrow \infty$: $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$
- $p = M \exp(\frac{16\pi^2}{3\lambda})$: Landau-Pol, keine Störungstheorie

Allgemein:

$$\frac{d}{d(\ln \frac{p}{M})} \bar{\lambda}(p, \lambda) = \beta(\bar{\lambda})$$

hat folgende qualitative Lösungen:

- $\beta(\bar{\lambda}) > 0$: IR-frei, $\bar{\lambda} \downarrow$ für $p \downarrow$
- $\beta(\bar{\lambda}) < 0$: UV-frei, $\bar{\lambda} \downarrow$ für $p \uparrow$

Autor: Michael Grefe

7 Eine kleine Gruppentheorie

(AUTOR: MICHAEL GREFE)

[PS 15.4]

Bereits in der QFTI haben wir gelernt, dass Symmetrietransformationen Elemente mathematischer Gruppen sind.

Gruppe Eine Gruppe G ist eine Menge von Elementen $g_1, \dots, g_n \in G$ mit Definition einer Multiplikation „ \cdot “.

- (1) $g_i \cdot g_j \in G$ (Abgeschlossenheit)
- (2) $g_i \cdot (g_j \cdot g_k) = (g_i \cdot g_j) \cdot g_k$ (Assoziativität)
- (3) $g_i \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot g_i = g_i$ (Existenz der Identität)
- (4) $g_i \cdot g_i^{-1} = \mathbb{1}$ (Existenz des Inversen)
- (\star) $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$ (Bedingung für abelsche Gruppe)

Lie-Gruppe Eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe, deren Elemente von kontinuierlichen Parametern abhängen.

- $g = g(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ die Parameter der Transformation sind.
- $g(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \cdot g(\beta_1, \dots, \beta_d) = g(\gamma_1, \dots, \gamma_d)$
- $\gamma_a = \gamma_a(\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d)$ ist eine differenzierbare Funktion.

Das infinitesimale Element einer Lie-Gruppe lässt sich in der folgenden Weise schreiben. Globale Aspekte einer Gruppe treten dabei im infinitesimalen Gruppenelement nicht zum Vorschein.

$$g(\alpha) = \mathbb{1} + i \sum_{a=1}^d \alpha_a T^a - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^d \alpha_a \alpha_b T^{ab} + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (7.1)$$

Dabei sind die T^a die Generatoren der Lie-Algebra und d ist die Dimension der Lie-Algebra, d.h. die Anzahl der Generatoren (Matrizen) der Lie-Algebra.

Bereits in der QFTI haben wir die Konsistenzbedingung der Gruppenmultiplikation für eine Lie-Gruppe hergeleitet. Dies ist die so genannte Lie-Algebra:

$$[T^a, T^b] = i \sum_{c=1}^d f_c^{ab} T^c. \quad (7.2)$$

Dabei sind die f_c^{ab} die so genannten Strukturkonstanten. Sie sind antisymmetrisch ($f_c^{ab} = -f_c^{ba}$) und charakterisieren die Gruppenmultiplikation.

Herleitung der Lie-Algebra Es gilt $\gamma_a(\alpha_1, \dots, \alpha_d, 0, \dots, 0) = \alpha_a$ und $\gamma_a(0, \dots, 0, \beta_1, \dots, \beta_d) = \beta_a$.

$$\Rightarrow \gamma_a(\alpha, \beta) = \alpha_a + \beta_a + \sum_{b,c=1}^d C_a^{bc} \alpha_b \beta_c + \mathcal{O}(\text{Parameter}^3) \quad (7.3)$$

Quadratische Terme in α oder β können nicht auftreten, da sonst die Randbedingungen bei $\beta = 0$ bzw. $\alpha = 0$ nicht erfüllt würden.

Aus der Gruppenmultiplikation $g(\alpha) \cdot g(\beta) = g(\gamma)$ folgt mit dem infinitesimalen Gruppenelement (7.1) bei $\mathcal{O}(\alpha\beta)$ dann die *Lie-Algebra* (7.2) als Konsistenzbedingung (vgl. Übung 7.1 a)). Auch in höheren Ordnungen tritt keine weitere Bedingung auf, was an dieser Stelle jedoch nicht bewiesen wird.

Jacobi-Identität Die Generatoren der Algebra erfüllen die Identität:

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0.$$

Zusammen mit der Lie-Algebra (7.2) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^d (if_e^{bc} [T^a, T^e] + if_e^{ca} [T^b, T^e] + if_e^{ab} [T^c, T^e]) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{e=1}^d (f_e^{bc} f_f^{ae} + f_e^{ca} f_f^{be} + f_e^{ab} f_f^{ce}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die Strukturkonstanten erfüllen also die *Jacobi-Identität*.

Darstellung Als *Darstellung* einer Gruppe bezeichnet man die Abbildung der abstrakten Gruppenelemente auf Matrizen oder lineare Operatoren. Die Abbildung ist derart, dass die Gruppenmultiplikation erhalten ist.

- $g_i \rightarrow M_i(g_i)$ mit $M_i(g_i) \cdot M_j(g_j) = M_k(g_k)$ für $g_i \cdot g_j = g_k$.
- $g(\alpha) \rightarrow M(\alpha)$ mit $M(\alpha) \cdot M(\beta) = M(\gamma)$ für $g(\alpha) \cdot g(\beta) = g(\gamma)$.

M agiert auf einem n -dimensionalen Vektorraum. Dabei ist n die Dimension der Darstellung, d.h. die Größe der $n \times n$ -Matrizen.

Definition *Halb-einfache Lie-Gruppen* besitzen keine abelsche Untergruppe, d.h.

$$\nexists T^{\hat{a}} \text{ mit } [T^{\hat{a}}, T^b] = 0 \quad \forall b \neq \hat{a}.$$

Definition *Einfache Lie-Gruppen* besitzen keine invariante Unteralgebra, d.h.

$$\nexists T^{\alpha}_{a=1, \dots, d} = (T^{\alpha}, T^{\beta})_{\alpha=1, \dots, n; \beta=n+1, \dots, d} \text{ mit } [T^{\alpha}, T^{\beta}] = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

1. Beispiel Die $U(n)$ ist die Gruppe der komplexen, unitären $n \times n$ -Matrizen U_{ij} . Unitartät bedeutet dabei, dass $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$. Sie erfüllt die Gruppenaxiome. Die Matrizen agieren auf dem \mathbb{C}^n .

Für die Transformation von Parametern $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{C}^n, i = 1, \dots, n$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\eta_i &\rightarrow \eta'_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} \eta_j, \\ \xi_i &\rightarrow \xi'_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} \xi_j.\end{aligned}$$

Dann ist $\sum_{i=1}^n \eta_i^* \xi_i$ eine Invariante unter der Transformation. Die physikalische Anwendung hiervon ist, dass $\sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \psi_i$ eine Invariante unter der $U(n)$ -Transformation ist.

Das infinitesimale Element der $SU(n)$ lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$U = \mathbb{1} + i \sum_{a=1}^d \alpha_a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (7.5)$$

Aus der Unitarität folgt, dass die Generatoren hermitesche Matrizen sind ($T^a = T^{a\dagger}$). Die Dimension der fundamentalen Darstellung ist n , d.h. $i, j = 1, \dots, n$. Die Dimension der Lie-Algebra ist $d = n^2$.

Die Phasentransformation $U = e^{i\alpha}$ ist eine $U(1)$ -Transformation. Da die $U(n)$ immer die Phasentransformation beinhaltet, ist sie keine halb-einfache Lie-Gruppe.

Die $SU(n)$ enthält nicht die Phasentransformation und ist daher halb-einfach. Tatsächlich ist sie sogar eine einfache Lie-Gruppe.

2. Beispiel Die $O(n)$ ist die Gruppe der orthogonalen $n \times n$ -Matrizen. Orthogonalität bedeutet dabei, dass $OO^T = O^T O = \mathbb{1}$. Dies fordert, dass die Generatoren antisymmetrisch sind ($T^a = -T^{aT}$). Die Dimension der Lie-Algebra ist dann $d = \frac{n(n-1)}{2}$. Eine $O(n)$ -Transformation entspricht einer Rotation und/oder Spiegelung im \mathbb{R}^n . Die Gruppe der Rotationen ist die $SO(n)$, die die zusätzliche Bedingung $\det O = 1$ enthält.

3. Beispiel Die $SU(n)$ ist die Gruppe der unitären $n \times n$ -Matrizen mit $\det U = 1$. Letztere Bedingung fordert, dass die Generatoren spurlos sind ($\text{Tr } T^a = 0$). Eine $SU(n)$ -Transformation entspricht einer Rotation im \mathbb{C}^n .

$$U = e^{i \sum_a \alpha_a T^a} = \mathbb{1} + i \sum_{a=1}^d \alpha_a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (7.6)$$

Die Dimension der Lie-Algebra der $SU(n)$ ist $d = n^2 - 1$, da durch die Einschränkung $\text{Tr } T^a = 0$ ein Generator herausgenommen wird.

Zum Beispiel ist die $SU(2)$ die Gruppe der unitären 2×2 -Matrizen mit $\det U = 1$. Dies bedeutet, dass es $n^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ hermitesche Generatoren $T^a = T^{a\dagger}$ gibt. In der fundamentalen – also 2-dimensionalen – Darstellung der $SU(2)$ sind die Generatoren durch $T^a = \frac{1}{2} \sigma^a$ gegeben, wobei σ^a die Pauli-Matrizen sind.

Die fundamentale oder auch definierende Darstellung ist die Darstellung mit der kleinstmöglichen Dimension.

Die Möglichkeit verschiedener Darstellungen einer Gruppe sieht man am Beispiel des Drehimpulses. Die Drehimpulsalgebra wird sowohl von den komplexen 2×2 -Pauli-Matrizen σ^a als auch von den reellen 3×3 -Drehimpulsgeneratoren L^a erfüllt:

$$\begin{aligned} [\sigma^a, \sigma^b] &= i\epsilon^{abc}\sigma^c, \\ [L^a, L^b] &= i\epsilon^{abc}L^c. \end{aligned}$$

Eigenschaften der $SU(n)$

1)

$$D^{ab}(\mathcal{r}) := \text{Tr} T_{\mathcal{r}}^a T_{\mathcal{r}}^b = \sum_{i,j=1}^{d(\mathcal{r})} T_{ij}^a T_{ji}^b \quad \text{mit } a = 1, \dots, n^2 - 1 \quad (7.7)$$

$$(D^{ab}(\mathcal{r}))^\dagger = \text{Tr} (T_{\mathcal{r}}^{b\dagger} T_{\mathcal{r}}^{a\dagger}) = \text{Tr} T_{\mathcal{r}}^b T_{\mathcal{r}}^a = \text{Tr} T_{\mathcal{r}}^a T_{\mathcal{r}}^b = D^{ab}(\mathcal{r}) = D^{ba}(\mathcal{r})$$

$D^{ab}(\mathcal{r})$ ist also eine hermitesche und symmetrische Matrix, sie ist daher reell. Die Basis der Generatoren kann nun derart gewählt werden, dass $D^{ab}(\mathcal{r})$ proportional zur Einheitsmatrix ist:

$$\Rightarrow \text{Tr} (T_{\mathcal{r}}^a T_{\mathcal{r}}^b) = C(\mathcal{r})\delta^{ab}. \quad (7.8)$$

Dann nennt man $C(\mathcal{r})$ den Index der Darstellung \mathcal{r} . Für die fundamentale Darstellung \mathcal{n} der $SU(n)$ wählt man die Konvention $C(\mathcal{n}) = \frac{1}{2}$.

2)

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\left[T_{\mathcal{r}}^a, T_{\mathcal{r}}^b \right] T_{\mathcal{r}}^c \right) &= i f_d^{ab} \text{Tr} (T_{\mathcal{r}}^d T_{\mathcal{r}}^c) = i f_c^{ab} C(\mathcal{r}) \\ &= \text{Tr} (T_{\mathcal{r}}^a T_{\mathcal{r}}^b T_{\mathcal{r}}^c - T_{\mathcal{r}}^b T_{\mathcal{r}}^a T_{\mathcal{r}}^c) = \text{Tr} (T_{\mathcal{r}}^a \underbrace{[T_{\mathcal{r}}^b, T_{\mathcal{r}}^c]}_{T_{\mathcal{r}}^c T_{\mathcal{r}}^b - T_{\mathcal{r}}^b T_{\mathcal{r}}^c}) \\ &= i f_d^{bc} \text{Tr} (T_{\mathcal{r}}^a T_{\mathcal{r}}^d) = i f_a^{bc} C(\mathcal{r}) \end{aligned}$$

Dabei wurde in der zweiten Zeile die Zyklizität der Spur ausgenutzt.

$$\Rightarrow f_c^{ab} = f_a^{bc} = -f_c^{ba} \quad \Rightarrow f^{bca} = -f^{bac} \quad (7.9)$$

Die Strukturfunktionen der $SU(n)$ sind also total antisymmetrisch.

Fundamentale Darstellung In der *fundamentalen* oder *definierenden Darstellung* \mathcal{n} entspricht die Dimension der Darstellung der Dimension der Gruppe. Für die $SU(n)$ -Transformation eines Parameters $\rho_i \in \mathbb{C}^n$ erhält man:

$$\rho_i \rightarrow \rho'_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} \rho_j.$$

Das infinitesimale Gruppenelement ist dann:

$$U = \mathbb{1} + i \sum_a^{n^2-1} \alpha_a T_n^a. \quad (7.10)$$

Komplex-konjugierte Darstellung Das Komplex-Konjugierte eines Parameters $\rho_i \in \mathbb{C}^n$ transformiert in der *komplex-konjugierten Darstellung*.

$$\begin{aligned} \rho_i &\rightarrow \rho'_i = U_{ij} \rho_j \\ \rho_i^* &\rightarrow \rho_i^{*'} = U_{ij}^* \rho_j = \rho_j U_{ji}^\dagger \end{aligned}$$

Das infinitesimale Gruppenelement kann man dann folgendermaßen schreiben:

$$U^* = \mathbb{1} - i \sum_{a=1}^{d(\mathcal{G})} \alpha_a T_{\bar{r}}^{a*} = \mathbb{1} + i \sum_{a=1}^{d(\mathcal{G})} \alpha_a T_{\bar{r}}^a. \quad (7.11)$$

Für die Generatoren der komplex-konjugierten Darstellung gilt dann also:

$$T_{\bar{r}}^a = -T_r^{a*} = -T_r^{aT}. \quad (7.12)$$

Adjungierte Darstellung In der *adjungierten Darstellung* \mathcal{G} werden die Strukturkonstanten als Generatoren gewählt. Die Dimension der adjungierten Darstellung entspricht dann der Dimension der Lie-Algebra.

$$\left(T_{\mathcal{G}}^a \right)_{bc} := i f^{bac} = -i f^{abc} \quad (7.13)$$

Die Lie-Algebra wird in diesem Fall trivial durch die Jacobi-Identität für die Strukturkonstanten (7.4) erfüllt (vgl. Übung 7.1 b)):

$$\left[T_{\mathcal{G}}^a, T_{\mathcal{G}}^b \right] = i f^{abc} T_{\mathcal{G}}^c. \quad (7.14)$$

Quadratischer Casimiroperator Der *quadratische Casimiroperator* ist definiert als:

$$T_{r\ ij}^2 := \sum_{a=1}^{d(\mathcal{G})} \sum_{k=1}^{d(r)} T_{r\ ik}^a T_{r\ kj}^a. \quad (7.15)$$

Dabei ist $d(r)$ die Dimension der Darstellung r und $d(\mathcal{G})$ die Dimension der Algebra bzw. der adjungierten Darstellung \mathcal{G} .

Für den Kommutator des quadratischen Casimiroperators mit einem der Generatoren erhält man:

$$[T^b, T^2] = \underbrace{[T^b, T^a]}_{i f^{bac} T^c} T^a + T^a \underbrace{[T^b, T^a]}_{i f^{bac} T^c} = \underbrace{i f^{bac}}_{\text{antisymmetrisch}} \underbrace{(T^c T^a + T^a T^c)}_{\text{symmetrisch}} = 0.$$

Da der Kommutator verschwindet, ist der quadratische Casimiroperator proportional zur Einheitsmatrix:

$$T_{r\ ij}^2 = C_2(r) \delta_{ij}. \quad (7.16)$$

Bildet man die Spur dieses Ausdrucks, so erhält man:

$$\text{Tr } T_r^2 = \delta_{ij} T_{r\ ij}^2 = C_2(r) \cdot d(r).$$

Wendet man δ_{ab} auf (7.8) an, so erhält man:

$$\text{Tr } T_{\underline{r}}^2 = \delta_{ab} \underbrace{\text{Tr} \left(T_{\underline{r}}^a T_{\underline{r}}^b \right)}_{C(\underline{r})\delta^{ab}} = C(\underline{r}) \cdot d(\underline{G}).$$

Es gilt also die Beziehung:

$$C(\underline{r}) \cdot d(\underline{G}) = C_2(\underline{r}) \cdot d(\underline{r}). \quad (7.17)$$

So gilt z.B. für die fundamentale Darstellung \underline{n} der $SU(n)$:

$$C(\underline{n}) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_2(\underline{n}) = \frac{C(\underline{n})d(\underline{G})}{d(\underline{n})} = \frac{1}{2} \frac{n^2 - 1}{n}.$$

Für die adjungierte Darstellung \underline{G} der $SU(n)$ erhält man:

$$C(\underline{G}) = n = C_2(\underline{G}).$$

Autor: Manuel Meyer

8 Vorlesung 14: Feynmanregeln für SU(N)

Vorlesung vom 13.12.2007, Author: Manuel Meyer, mmeyer@physnet.uni-hamburg.de

Nach der gruppentheoretischen Betrachtung von $SU(N)$ sollen nun die Feynmanregeln für eine solche Eichtheorie entwickelt werden. Wir gehen aus von N Fermionfeldern ψ_i , $i = 1, \dots, N$ in der fundamentalen Darstellung \mathbf{N} und N Feldern $\bar{\psi}_i$ in der anti-fundamentalen Darstellung $\bar{\mathbf{N}}$ von $SU(N)$. Die Transformationen der Felder haben dann die Form

$$\begin{aligned}\psi_i &\rightarrow \psi'_i = \sum_j U_{ij} \psi_j, & \delta\psi_i &= i \sum_{a=1}^{N^2-1} \alpha^a T_{ij}^a \psi_j \\ \bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}'_i = \sum_j U_{ij}^* \bar{\psi}_j, & \delta\bar{\psi}_i &= -i \sum_{a=1}^{N^2-1} \alpha^a T_{ij}^{*a} \bar{\psi}_j\end{aligned}$$

Die Transformation des Eichbosonenfeldes $A_{\mu ij}$ lässt sich nun auch durch die Generatoren T^a der Algebra ausdrücken:

$$\begin{aligned}A_{\mu ij} &\rightarrow A'_{\mu ij} = U_{ik} A_{\mu kl} U_{lj}^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U_{ik}) U_{kj}^\dagger \\ &= A_{\mu ij} + i\alpha^a T_{ik}^a A_{\mu kj} - iA_{\mu ik} \alpha^a T_{kj}^a - \frac{i}{g} (\partial_\mu \alpha^a) T_{ij}^a + \mathcal{O}((\partial_\mu \alpha)\alpha)\end{aligned}$$

wobei über doppelte Indizes summiert wird. Diese Rechnung zeigt, dass das Eichbosonenfeld $A_\mu \propto T^a$ ist, also selbst Teil der Algebra ist. Wir können A_μ also in der Basis der Generatoren schreiben,

$$A_{\mu ij} = \sum_a A_\mu^a T_{ij}^a. \quad (8.1)$$

Und die infinitesimale Transformation kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\delta A_{\mu ij} &= A_{\mu ij} - A'_{\mu ij} = (\delta A_\mu^a) T_{ij}^a \\ &= i\alpha^a \underbrace{(T_{ik}^a A_\mu^b T_{kj}^b - A_\mu^b T_{ik}^b T_{kj}^a)}_{A_\mu^b [T^a, T^b]} + \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^a) T_{ij}^a \\ &= -i\alpha^a A_\mu^b (if^{abc} T^c) + \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^a) T_{ij}^a\end{aligned}$$

Nach Umbenennung der Summationsindizes und Benutzung der Antisymmetrie der Strukturkonstante erhalten wir

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c = \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a$$

Wieder wird über b und c summiert. Mit (8.1) lässt sich auch die kovariante Ableitung mit Hilfe der Generatoren schreiben:

$$D_\mu \psi_i = \partial_\mu \psi_i - ig \sum_j A_{\mu ij} \psi_j = \partial_\mu \psi_i - \sum_j \sum_a A_\mu^a T_{ij}^a \psi_j$$

Der Feldstärketensor ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu ij} &= \partial_\mu A_{\nu ij} - \partial_\nu A_{\mu ij} - ig[a_\mu, A_\nu]_{ij} \\
 &= \sum_a F_{\mu\nu}^a T_{ij}^a = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) T_{ij}^a - ig A_\mu^b A_\nu^c [T^b, T^c]_{ij} \\
 &\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c}
 \end{aligned}$$

Im abelschen Grenzfall (QED) erhalten wir die gewohnten Größen $F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}$ und $A_\mu^a \rightarrow A_\mu$ zurück. Für die Lagrangefunktion fehlt noch eine Invariante für den kinetischen Term der Eichbosonen. Hierzu eignet sich die Spur über das Quadrat des Feldstärketensors:

$$\text{tr}(F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}) = F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{tr}(T^a T^b) = F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} C(r) \delta^{ab}$$

Damit haben wir nun alle Bestandteile des $SU(N)$ Lagrangian zusammen, er lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i i\gamma^\mu D_\mu \psi_i - m \bar{\psi}_i \psi_i - \underbrace{\frac{1}{4C(r)} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}_{= \frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}}$$

Um die Feynmanregeln aufzuschreiben multiplizieren wir den kinetischen Term der Eichbosonen und die kovariante Ableitung aus und erhalten

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + g A_\mu^a j^{a\mu} - g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{1}{4} g^2 f^{cab} A_\mu^a A_\nu^b f^{cde} A^{d\mu} A^{e\nu}$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_i (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i + \frac{1}{2} A_\mu^a (g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^a$$

Also entspricht \mathcal{L}_0 dem abelschen Limes. Die Feynmanregeln lauten:¹

$$\begin{aligned}
 &= ig\gamma^\mu T^a \\
 &= g f^{abc} [g^{\mu\mu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\nu} (q-k)^\nu] \\
 &= -ig [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 &\quad + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 &\quad + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]
 \end{aligned}$$

Im zweiten Diagramm sind alle Impulse einlaufend gewählt.

¹Siehe auch Peskin und Schroeder: "An Introduction to Quantum Field Theory" Kapitel 16.1 S. 507, Abb. 16.1

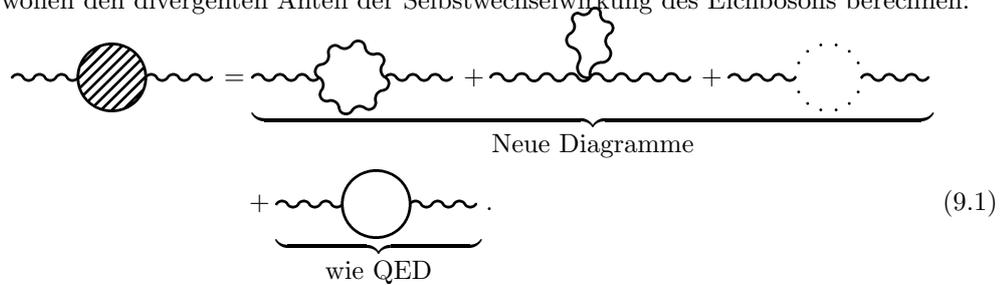
Autor: Michael Grefe

9 1-Loop-Divergenzen in nichtabelschen Eichtheorien

(AUTOR: MICHAEL GREFE)

[PS 16.5]

1) Wir wollen den divergenten Anteil der Selbstwechselwirkung des Eichbosons berechnen:

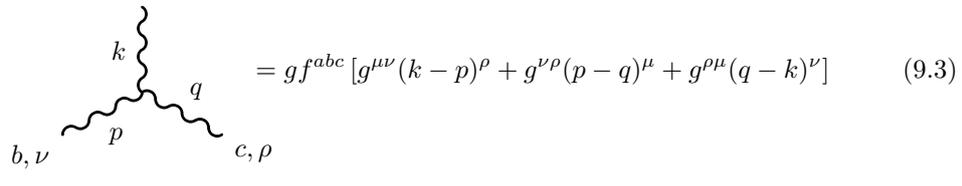


$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = \underbrace{\text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram}}_{\text{Neue Diagramme}} \\
 & + \underbrace{\text{Diagram}}_{\text{wie QED}}. \tag{9.1}
 \end{aligned}$$

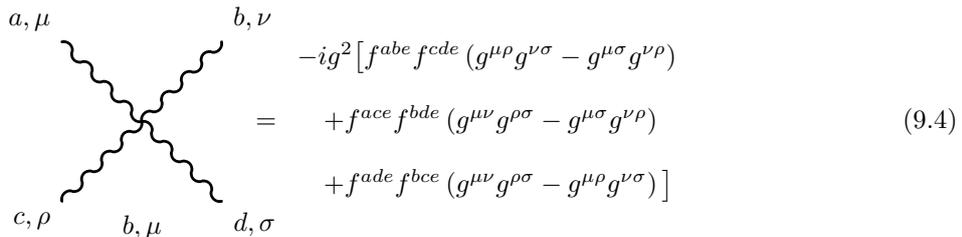
Die Feynman-Regeln für Wechselwirkungen mit Bosonen in nichtabelschen Eichtheorien lauten:



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = ig \gamma^\mu T_{ij}^a \tag{9.2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = g f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \tag{9.3}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 & + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
 & + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})] \tag{9.4}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = -g f^{abc} p^\mu. \tag{9.5}
 \end{aligned}$$

Die Berechnung des Fermion-Loop-Diagramms ist analog zur Berechnung in der QED. Es enthält lediglich eine zusätzliche Spur über die Generatoren der Eichgruppe, die an den

Vertizes auftauchen. Das Ergebnis ist:

$$\text{Diagramm} = \underbrace{\text{tr } T_r^a T_r^b}_{C(r)\delta^{ab}} i (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \left(-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right) + \text{endlich.} \quad (9.6)$$

ln-divergent

Bei einer Theorie mit n_f verschiedenen Fermionen ist dieses Diagramm entsprechend oft vorhanden und es tritt ein zusätzlicher Faktor n_f auf.

Die in nichtabelschen Theorien zusätzlich auftretenden Diagramme liefern den Beitrag:

$$\begin{aligned} \text{Neue Diagramme} = \dots &= i (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left(-\frac{g^2}{(4\pi)^2} \underbrace{\left(\frac{\xi}{2} - \frac{13}{6} \right)}_{-\frac{5}{3} \text{ für } \xi=1} \right) \\ &\cdot C_2(G) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \text{endlich.} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Übung 8.2

2) Die Fermion-Selbstenergie ist in der Feynman-'t Hooft-Eichung ($\xi = 1$) gegeben durch:

$$\text{Diagramm} = \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \not{k} C_2(r) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \text{endlich.} \quad (9.8)$$

3) Für die Vertex-Korrektur tritt ein zusätzliches Diagramm auf. Mit $\xi = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} &= \frac{ig^3}{(4\pi)^2} T^a \gamma^\mu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left[\underbrace{C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)}_{\text{wie QED}} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{3}{2} C_2(G)}_{\text{neu}} \right] + \text{endlich.} \end{aligned} \quad (9.9)$$

wie QED neu

Counterterme Die Lagrangedichte für nichtabelsche Eichtheorien mit der Faddeev-Popov-Eichfixierung lautet für die nackten Felder:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{0\mu\nu}^a F_0^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_{0\mu}^a) (\partial^\nu A_{0\nu}^a) + \bar{\psi}_0 (i\not{D} - m_0) \psi_0 + \bar{c}_0^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c_0^a \\ &\stackrel{\xi \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_{0\nu}^a - \partial_\nu A_{0\mu}^a)^2 + \bar{\psi}_0 (i\not{\partial} - m_0) \psi_0 - \bar{c}_0^a \square c_0^a \\ &\quad + g_0 A_{0\mu}^a j_0^{a\mu} - g_0 f^{abc} (\partial_\mu A_{0\nu}^a) A_0^{b\mu} A_0^{c\nu} - g_0 \bar{c}_0^a f^{abc} \partial^\mu A_{0\mu}^b c_0^c \\ &\quad - \frac{1}{4} g_0^2 (f^{eab} A_{0\mu}^a A_{0\nu}^b) (f^{ecd} A_{0\mu}^c A_{0\nu}^d) \quad \text{mit } j_0^{a\mu} = \bar{\psi}_0 \gamma^\mu T^a \psi_0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Wir führen jetzt eine Feldreskalierung für die Fermionen, die Eichbosonen und die Geistfelder durch. Zudem werden die Fermionmasse und die Kopplungskonstante in der Form eines physi-

Bei Störungstheorie in g ist der Term mit ∂_g um eine Ordnung unterdrückt. Somit erhalten wir in führender Ordnung das Ergebnis:

$$\gamma = \frac{1}{2}M \frac{\partial}{\partial M} \delta_Z. \quad (9.33)$$

Führt man eine analoge Berechnung für Yang-Mills-Theorien durch, so erhält man für die Fermion- bzw. Eichbosonfelder:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}M \partial_M \delta_2, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2}M \partial_M \delta_3. \quad (9.34)$$

Analog kann man auch Ausdrücke für die β -Funktion einer allgemeinen, dimensionslosen Kopplungskonstante g , die zu einem n -Punkt-Vertex gehört, bestimmen. Die n -Punkt-Funktion ist an 1-Loop-Ordnung:

$$G^{(n)} = \left(\prod_i \frac{i}{p_i^2} \right) \left[-ig - iB \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} - i\delta_g - ig \sum_i \left(A_i \ln \frac{\Lambda^2}{-p_i^2} - \delta_{Z_i} \right) \right]. \quad (9.35)$$

Die M -Abhängigkeit dieses Ausdrucks steckt in den Countertermen δ_g und δ_{Z_i} . Einsetzen in die Callan-Symanzik-Gleichung liefert:

$$M \frac{\partial}{\partial M} \left(\delta_g - g \sum_i \delta_{Z_i} \right) + \beta(g) + g \sum_i \frac{1}{2}M \frac{\partial}{\partial M} \delta_{Z_i} = 0.$$

Damit ergibt sich für die β -Funktion in niedrigster Ordnung:

$$\beta(g) = M \frac{\partial}{\partial M} \left(-\delta_g + \frac{1}{2}g \sum_i \delta_{Z_i} \right). \quad (9.36)$$

Die β -Funktion für Yang-Mills-Theorien Die Herleitung der β -Funktion für Yang-Mills-Theorien verläuft analog zur Herleitung in der QED. Sie hängt von den Countertermen aus dem Fermion-Boson-Vertex (δ_1), aus der Fermion-Selbstenergie (δ_2) und aus der Eichboson-Selbstenergie (δ_3) ab.

$$\beta(g) = M \frac{\partial}{\partial M} \left(-g\delta_1 + \frac{2}{2}g\delta_2 + \frac{1}{2}g\delta_3 \right) = gM \frac{\partial}{\partial M} \left(-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \right) \quad (9.37)$$

Setzen wir die berechneten Werte der Counterterme aus (9.28) bis (9.30) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \beta(g) &= gM \frac{\partial}{\partial M} \left(-\frac{g^2}{(4\pi)^2} (-\ln M^2) \left(\underbrace{-C_2(r) - C_2(G)}_{\text{aus } -\delta_1} + \underbrace{C_2(r)}_{\text{aus } \delta_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r) \right) \right) \\ &= \frac{2g^3}{(4\pi)^2} \left(C_2(G) \left(-1 - \frac{5}{6} \right) + \frac{2}{3}n_f C(r) \right) \\ \beta(g) &= -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r) \right) + \text{Spin 0-Anteil.} \end{aligned} \quad (9.38)$$

Spin 1 Spin $\frac{1}{2}$

Für die $SU(n)$ gilt $C_2(n) = \frac{1}{2} = \text{const.}$ und $C_2(G) = n \propto n$. Für kleine n_f und/oder großes n ist eine $SU(n)$ -Theorie demnach asymptotisch frei. Dies findet z.B. in der im Folgenden besprochenen Quantenchromodynamik (QCD) Anwendung.

Autor: Christoph Piefke

10 VL 17: Quantenchromodynamik QCD

Idee: die starke Wechselwirkung wird durch eine $SU(3)$ Eichtheorie beschrieben. Sprachgebrauch: $SU(3) + 6$ Eichbosonen = QCD.

- Es gibt acht Eichbosonen: A_μ^a , $a = 1, \dots, 8 = 3^2 - 1$. Man nennt sie Gluonen.
- Baryonen und Mesonen sind aufgebaut aus 6 Quarks q .
- Die q transformieren in der fundamentalen $N = 3$ -dimensionalen Darstellung der $SU(3)$.
- Manche Bücher schreiben q , manche Ψ .
- Die Quarks sind Fermionen, der Fermionenindex ist A, d.h. γ s wirken auf A.
- i ist der Color-Index ($i = 1, 2, 3$ Color-Triplet).

$$q_{A,i}^I(x) = \Psi_{A,i}^I(x) \quad i = 1, 2, 3 \quad I = 1, \dots, 6 \quad (10.1)$$

10.1 Wie transformiert q ?

$$\delta q_i = i \sum_{a=1}^8 \sum_{j=1}^3 \alpha^a(x) T_{ij}^a q_j \quad (\tilde{3}) \quad (10.2)$$

$$\delta \bar{q}_i = -i \sum_{a=1}^8 \sum_{j=1}^3 \alpha^a(x) (T_{ij}^a)^t \bar{q}_j \quad (\bar{\tilde{3}}) \quad (10.3)$$

Generatoren:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (10.4)$$

Lagrangefunktion hinschreiben:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \sum_{I=1}^6 \sum_{i=1}^3 (i \bar{q}_i^I \not{D} q_i^I - m^I \bar{q}_i^I q_i^I) \quad (10.5)$$

mit der kovarianten Ableitung:

$$D_\mu q_i = \partial_\mu q_i - i g_s \sum_a \sum_j A_\mu^a T_{ij}^a q_j \quad (10.6)$$

... der starken Kopplungskonstante g_s und der Feldstärke:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (10.7)$$

Abbildung 1: Übersicht über die 6 Quarks

<i>Familie</i>		
1	$u(\text{up})$	$d(\text{down})$
2	$c(\text{charm})$	$s(\text{strange})$
3	$t(\text{top})$	$b(\text{bottom})$
<i>Ladung(elek.)</i>	$Q_{el} = +\frac{2}{3}e$	$Q_{el} = -\frac{1}{3}e$

Z.B.: $p \sim uud$, $Q_{el} = 1$ oder $n \sim udd$, $Q_{el} = 0$.

10.2 Invarianten

Die $SU(3)$ hat zwei Invarianten (Singulets):

1)

$$\bar{q}_i q_i = \bar{q}^i q_i \quad \rightarrow \quad \bar{q}^i q'_i = \bar{q}^j \underbrace{U_j^{\dagger i} U_i^l}_{\delta_{ij}} q_l = \bar{q}^i q_i \quad (10.8)$$

$$q_i \quad \rightarrow \quad q'_i = U_i^k q_k \quad (10.9)$$

$$\bar{q}_i \quad \rightarrow \quad \bar{q}^i = \bar{q}_k U_k^{\dagger i} \quad (10.10)$$

2)

$$\epsilon_{ijk} q_i q_j q_k \quad (\text{in } SU(N) : \epsilon_{i_1 \dots i_N} q_{i_1} \dots q_{i_N}) \quad (10.11)$$

$$\epsilon_{ijk} q'_i q'_j q'_k = \underbrace{\epsilon_{ijk} U_i^{\prime i'} U_j^{\prime j'} U_k^{\prime k'}}_{\det(U) \epsilon_{i' j' k'}} q_{i'} q_{j'} q_{k'} \quad (10.12)$$

$$= \epsilon_{ijk} q_i q_j q_k \quad (10.13)$$

$$(10.14)$$

- 1) sind Mesonen
- 2) sind Baryonen

Betrachte β -Funktion:

$$\beta(g_s) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2} g_s^3 + o(g^5) \quad (10.15)$$

$$b_0 = \frac{11}{3} * C_2(G) - \frac{4}{3} * n_{f_a} * c(r) \quad (10.16)$$

$$SU(3) : \quad C_2(G) = 3 \quad (N \text{ für } SU(N)) \quad (10.17)$$

$$C(\bar{3}) = \frac{1}{2} = c(\bar{3}) \quad (\text{durch Normierung}) \quad (10.18)$$

$$n_{f_a} = 6 \quad (10.19)$$

$$\curvearrowright b_0 = \frac{11}{3} * 3 - \frac{4}{3} * 6 * \frac{1}{2} = 7 > 0 \quad (10.20)$$

$$(10.21)$$

Die QCD ist asymptotisch frei, das bedeutet, g_s ist klein für hohe Energien und groß für kleine Energien. Im Bereich der hohen Energien kann man also Störungstheorie anwenden, im Bereich

kleiner Energien kann man keine Störungstheorie anwenden. Bei kleinen Energien bilden Quarks gebundene Zustände, also Mesonen und Baryonen. Bei hohen Energien ist die Bindung schwach, die Partonenstruktur wird sichtbar (deep inelastic scattering).

Man macht folgende Annahme: farbige Zustände können nicht als asymptotische (also freie) Zustände existieren. Dies nennt man confinement.

Experimentell hat man noch keine freien, farbigen Zustände beobachtet. Theoretisch: keine Störungstheorie \Rightarrow keine Ahnung.

10.3 Lösung der RG-Gleichung

$$\frac{dg(\frac{Q}{M})}{d\ln(\frac{Q}{M})} = \beta(g) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2}g^3 \quad (10.22)$$

$$\frac{dg}{g^3} = -\frac{b_0}{(4\pi)^2}d\ln(\frac{Q}{M}) \quad (10.23)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(g^{-2}(M) - g^{-2}(Q)) = -\frac{b_0}{(4\pi)^2}\ln(\frac{Q}{M}) \quad (10.24)$$

$$\Rightarrow g^{-2}(Q) = g^{-2}(M) + \frac{b_0}{(8\pi)^2}\ln(\frac{Q}{M}) \quad (10.25)$$

Auflösen nach $g^2(Q)$ und mit $\alpha_s := \frac{g_s^2}{4\pi}$ folgt:

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s(M)}{1 + \frac{b_0}{(2\pi)}\alpha_s(M)\ln(\frac{Q}{M})} \quad (10.26)$$

Definition: Λ_{QCD} ist die Energie, so dass

$$\alpha_s^{-1}(M = \Lambda_{QCD}) = 0 \quad (10.27)$$

Daraus folgt durch einsetzen und auflösen (Übung 9):

$$\Lambda_{QCD} = Q \exp(-\frac{2\pi}{b_0}\alpha_s^{-1}(Q)) \quad (10.28)$$

$$\frac{d\Lambda_{QCD}}{dQ} = 0 \quad (10.29)$$

$$(10.30)$$

10.4 Experimentelle Befunde

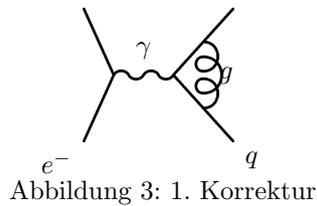
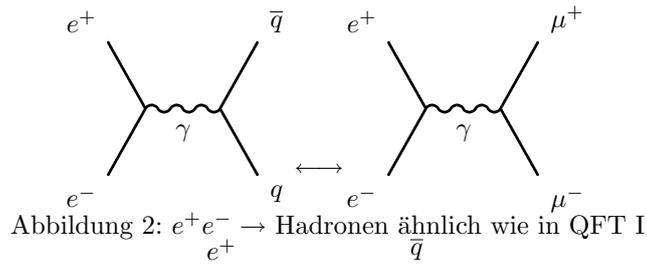
Experimentelle Werte für

$$\Lambda_{QCD} = 200MeV \quad (10.31)$$

$$\alpha_s(1GeV) = 0.4 \quad (10.32)$$

$$\alpha_s(10GeV) = 0.2 \quad (10.33)$$

$$(10.34)$$



q_i, \bar{q}_i haben unterschiedliche elektrische Ladungen und man muss die drei Farben berücksichtigen. Deswegen gilt für den Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma_0 \left(\sum_f Q_f^2 \right) * 3 \quad (10.35)$$

Aus der ersten Korrektur folgt:

$$\sigma_{tot} = \sigma_0 \left(\sum_f Q_f^2 \right) * 3 * \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + o(\alpha_s^2) \right] \quad (10.36)$$

Gluon-Emission: mit em-WW kann man nur geradzahlige Jet-Ereignisse erklären. In den 70er Jahren sind am DESY bei PETRA 3-Jet-Ereignisse beobachtet worden, vgl. Abb. (4).

11 VL 18: deep-inelastic scattering (DIS)

SLAC-MIT: 1968, bei $20 GeV$ werden Elektronen auf Wasserstofftargets geschossen, vgl. Abb (5).

Beteiligte Impulse:

- k e in
- k' e out
- q γ
- p q_i in

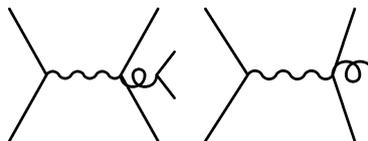


Abbildung 4: 2- und 3-Jet-Ereignisse

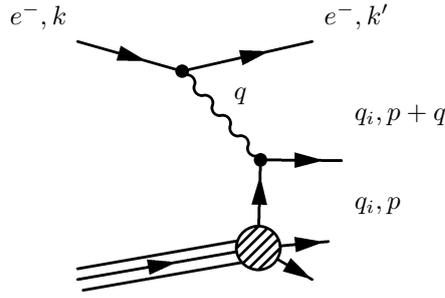


Abbildung 5: deep-inelastic scattering

- $p + q$ out

$$q^2 = (k - k')^2 = \underbrace{k_0^2 + k_0'^2}_{=0=m_e \text{ bei } 20 \text{ GeV}} - 2|k||k'|\cos\Theta \leq 0 \quad (11.1)$$

Konvention: $q^2 = -Q^2$, $Q^2 > 0$. Q^2 groß: DIS. Ist das Modell richtig, lässt sich der Streuquerschnitt des DIS-Diagramms wie in QFTI berechnen, vgl Diagramm Abb. (2), welches im DIS-Diagramm enthalten ist. Benutze dafür die Mandelstam-Variablen $s = (p + p')^2$, $t = (k - p)^2$, $u = (k' - p)^2$, $s + t + u = 0$:

$$\frac{1}{4} \sum_s |M|^2 = \frac{8e^4}{t^2} \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right] \quad (11.2)$$

Berücksichtige Quarkladungen:

$$\frac{1}{4} \sum_s |M|^2 = \frac{8e^4 Q_i^2}{t^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{4} \right] \quad (11.3)$$

Benutze Formel aus QFTI:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\Theta_{CM}} = \frac{\pi\alpha^2 Q_i^2}{s} \left(\frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} \right) \quad (11.4)$$

und mit $t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\Theta_{CM})$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2 Q_i^2}{t^2} \left(1 + \left(1 + \frac{t}{s}\right)^2 \right) \quad (11.5)$$

nächster Schritt: t, s durch experimentell zugängliche Größen ausdrücken: $t = -Q^2$. s bekommt man nicht so leicht. Im CM-System hat das Proton den Impuls P , das Quark hat den Impuls $p = \xi P$, $0 \leq \xi \leq 1$ Benutze, dass die Massen vernachlässigt werden können:

$$s = (k + p)^2 = 2pk = 2\xi Pk = \xi s \quad (11.6)$$

$$0 \approx (p + q)^2 = 2\xi Pq - Q^2 \quad \Rightarrow \quad \xi = x, x = \frac{Q^2}{2Pq} \quad (11.7)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Parton f mit dem Impuls ξP zu finden ist: $f_f(\xi)d\xi$. f_f ist unbekannt und kann innerhalb der QCD ausgerechnet werden. Die möglichen Partonen sind Quarks,

Antiquarks und Gluonen. f_f heißt parton distribution function.

$$\sigma(e^-(k)p(P) \rightarrow e^-(k') + \text{hadr. Endzustand}) = \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) \sigma(e^-(k)) q_f(\xi P) \quad (11.8)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2} = \int_0^1 d\xi \sum_f f_f(\xi) Q_f^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 + \left(1 - \frac{Q^2}{\xi s}\right)^2\right) \Theta(\xi s - Q^2) \quad (11.9)$$

Der Anteil, der in das Hadronensystem eingespeist wird beträgt $y := \frac{2Pq}{2Pk} = \frac{q^0}{k^0}$.

$$\Rightarrow ys = 2Pq \quad \curvearrowright \quad x = \frac{Q^2}{2Pq} = \frac{Q^2}{ys} \quad (11.10)$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = xys \quad (11.11)$$

$$\Rightarrow dx dQ^2 = dx \frac{dQ^2}{dy} dy = xs dx dy \quad (11.12)$$

Die Ableitung des Wirkungsquerschnitt nach den dimensionslosen Variablen x und y beträgt damit:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \underbrace{\left(\sum_f x f_f(x) Q_f^2\right)}_{=:F(x)} \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} s \underbrace{[(1 + (1 - y)^2)]}_{=:G(y)} \quad (11.13)$$

Dies faktorisiert, die beiden Anteile sind unabhängig voneinander und die Parton-Verteilungsfunktion ist nur vom Skalenparameter x abhängig. Es handelt sich um eine Schar von Kurven, deren Scharparameter Q ist und deren Werte für festes Q mit laufendem x alle auf einer Linie liegen.

Autor: Jannes Heinze

12 Higgs-Mechanismus

- **Idee:** Betrachte spontan gebrochene lokale Symmetrie (Eichsymmetrie)
- **Ergebnis:**
 - Eichboson wird massiv
 - Goldstoneboson verschwindet, bzw. wird zur longitudinalen Komponente des Eichbosons (wird "gegessen")

12.1 $U(1)$ Eichtheorie mit geladenem Skalarfeld

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall. Eine gebrochene abelsche $U(1)$ -Symmetrie beim geladenen komplexen Skalarfeld.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi D^\mu\phi^* - V(\phi, \phi^*) \quad (12.1)$$

mit

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi \quad (12.2)$$

$$V(\phi, \phi^*) = -\mu^2\phi\phi^* + \frac{\lambda}{2}(\phi\phi^*)^2 \quad (12.3)$$

und der Symmetrietransformation (Eichtransformation)

$$\phi \longrightarrow \phi' = \exp(i\alpha(x))\phi \quad (12.4)$$

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (12.5)$$

sowie der Parameterwahl $\mu^2 > 0, \lambda > 0$. Fasst man ϕ wieder als $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ auf so ergibt sich im Parameterraum ϕ_1, ϕ_2 der bekannte Verlauf des Potentials $V(\phi, \phi^*) = V(\phi_1, \phi_2)$ mit spontan gebrochener Symmetrie des Grundzustandes.

Auflösen nach dem Minimum ergibt die bekannte Kreisgleichung $(\phi\phi^*)_{min} = \frac{\mu^2}{\lambda}$ und dem zugehörigen Radius $(\phi)_{min} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}$.

Wir benutzen jedoch nicht die bekannte Parametrisierung $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) + i\sigma(x))$ sondern die passendere

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x)) \exp(i\beta(x)) \quad (12.6)$$

Dies entspricht einer typischen Kreisparametrisierung in der komplexen Ebene durch Polarkoordinaten. Wie man durch Reihenentwicklung der \exp -Funktion sieht, handelt es sich hierbei um ein anderes $h(x)$ als in der vorangegangenen Parametrisierung. In dieser Parametrisierung ist das Potential völlig unabhängig von $\beta(x)$. Dieses beschreibt also die Fluktuationen am Grundzustand, die tangential zum Verlauf dieses sind und damit keine Potentialdifferenz spüren. Alle

anderen werden durch $h(x)$ beschrieben.

$$\begin{aligned} V(\phi, \phi^*) &= -\frac{\mu^2}{2}(v + h(x))^2 + \frac{\lambda}{8}(v + h(x))^4 \\ &= \dots \\ &= V(v) + \frac{1}{2}\mu^2 h(x)^2 + \frac{\lambda}{2}v h(x)^3 + \frac{\lambda}{8}h(x)^4 \end{aligned}$$

Es ergibt sich das $\beta(x)$ ein Goldstoneboson ist (masselos). $h(x)$ heißt Higgsboson. Die Eichtransformation (12.4) geht über in

$$h(x) \longrightarrow h'(x) = h(x) \quad (12.7)$$

$$\beta(x) \longrightarrow \beta'(x) = \beta(x) + \alpha(x) \quad (12.8)$$

was einer einfachen Rotation entspricht.

Wir betrachten nun den Term mit der kovarianten Ableitung. Dieser führt auf die kinetischen Termen von $h(x)$ und $\beta(x)$ sowie den Wechselwirkungen dieser mit den Eichbosonen A_μ .

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_\mu(v + h) \exp(i\beta) + ieA_\mu(v + h) \exp(i\beta)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_\mu h + ieA_\mu(v + h)] \exp(i\beta) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_{\mu\nu}\beta)(v + h) \exp(i\beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_\mu h + i(eA_\mu + \partial_\mu(v + h))] \exp(i\beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_\mu h + i(eA'_\mu(v + h))] \exp(i\beta) \end{aligned}$$

Hier wurde im letzten Schritt eine Umparametrisierung des Eichfeldes gemäß

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \beta \quad (12.9)$$

durchgeführt. Vergleicht man (12.5) und (12.9) stellt man fest fest, dass diese Umparametrisierung formal analog zu diesem Teil der Eichtransformation mit $\alpha(x) = -\beta(x)$ ist. Es handelt sich jedoch nicht um eine Eichtransformation, da dann auch β gemäß (12.8) transformieren müsste und aufgrund der Eichinvarianz der Lagrangdichte diese Forminvariant bleiben würde. Man nennt diese Umparametrisierung trotzdem "unitäre Eichung".

Aufgrund der Invarianz von $F_{\mu\nu}(A)$ unter Eichtransformationen der A_μ bleibt auch der kinetische Term $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ im Lagrangian unter (12.9) unverändert. Der gesamte Lagrangian wird somit zu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(A')F^{\mu\nu}(A') + \frac{1}{2} [\partial_\mu h + ieA'_\mu(v + h)] [\partial^\mu h - ieA'^{\mu}(v + h)] - V(h) \quad (12.10)$$

In dieser Umparametrisierung der Felder existiert β nicht mehr als alleiniges Feld. Es spielt nun die Rolle der longitudinalen Komponente des Eichbosons. Insbesondere spielt aber sein Transformationsverhalten unter Eichtransformationen noch eine Rolle. An (12.5),(12.8),(12.9) sieht man, das eine Eichtransformation der A'_μ nun durch

$$A'_\mu \longrightarrow A'_\mu \quad (12.11)$$

gegeben ist.

Durch einfaches ausmultiplizieren von (12.10) erhält man

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu'} + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{e^2}{2}h^2 A'_\mu A^{\mu'} + e^2 v h A'_\mu A^{\mu'} + \frac{1}{2}m_A^2 A'_\mu A^{\mu'} - V(h) \quad (12.12)$$

mit der Identifizierung $e^2 v^2 = m_A^2$ als Masse des Eichbosons. Dies ist nach (12.11) manifest eichinvariant.

Die Anzahl der Freiheitsgrade ist immer noch 4, da nun nur noch ein Freiheitsgrad vom Skalarfeld getragen wird, jedoch 3 vom Eichfeld (vorher 2 und 2).

Es ist noch zu bemerken, dass die Masse des Eichbosons nicht durch die Hinzunahme der longitudinalen Komponente entsteht, sondern auch dann, wenn man $\beta(x)$ als getrenntes Feld betrachtet. Man multipliziere hierzu einfach ohne vorher (12.9) durchgeführt zu haben den Lagrangian aus. Der Satz, dass die Eichinvarianz massive Eichbosonen verhindert, gilt, wie wir damit hier gezeigt haben, für spontan gebrochene Symmetrien offenbar nicht.

12.2 $SU(N)$ Eichtheorie mit geladenen Skalarfeldern ϕ_i

Der eben entwickelte Formalismus ist nun einfach auf kompliziertere Fälle übertragbar. Insbesondere ist die Masse, wie aus der letzten Bemerkung hervorgeht, einfach abzulesen, ohne dass man die Untersuchungen explizit ausführen muss. Wir führen dies nun für allgemeinen $SU(N)$ Eichtheorien durch.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + D_\mu \phi_i D^\mu \phi_i^* - V(\phi_i, \phi_i^*) \quad (12.13)$$

mit $a = 1, \dots, N^2 - 1$, $i = 1, \dots, N$ und

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i - ig A_\mu^a T_{ij}^a \phi_j \quad (12.14)$$

$$D_\mu \phi_i^* = \partial_\mu \phi_i^* + ig A_\mu^a T_{ij}^{a*} \phi_j^* \quad (12.15)$$

Dies ausmultipliziert gibt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i^* + g A_\mu^a j^{a\mu} + g^2 A_\mu^a A^{a\mu} (T^a \phi)_i (T^{b*} \phi^*)_i - V(\phi_i, \phi_i^*) \quad (12.16)$$

mit

$$j^{a\mu} = i(\partial_\mu \phi_i^*) T_{ij}^a \phi_i - \phi_i^* T_{ij}^{a*} \partial_\mu \phi_i$$

Um die Massen der Eichbosonen abzulesen muss man nun lediglich ϕ_i bis zur nullten Ordnung, also bis zum konstanten Term, in (12.16) entwickeln. Man setzt $\phi_i = \frac{1}{2}(v_i + \dots)$ wobei $\frac{1}{2}v_i v_i = \frac{\mu^2}{\lambda}$ mit reellem v gilt und liest den Koeffizienten des quadratischen Terms in den A_μ ab.

$$\mathcal{L}_m(A^2) = \frac{1}{2}g^2 (T^a v)_i (T^{b*} v)_i A_\mu^a A^{b\mu} \equiv \frac{1}{2}m_{ab}^2 A_\mu^a A^{b\mu} \quad (12.17)$$

und damit

$$\begin{aligned} m_{ab}^2 &= g^2 (T^a v)_i (T^{b*} v)_i \\ &= g^2 T_{ij}^a v_j T_{ik}^{b*} v_k \\ &= g^2 v_k T_{ki}^{b\dagger} T_{ij}^a v_j \\ &= g^2 v_k T_{ki}^b T_{ij}^a v_j \\ &= g^2 (v T^a T^b v) \end{aligned} \quad (12.18)$$

Hierbei wurde $T^{a\dagger} = T^a$ benutzt.

Für die Berechnung der Masse der Eichbosonen ist nur der symmetrische Teil $m_{(ab)}^2$ relevant, da $A_\mu^a A^{b\mu}$ symmetrisch in a und b ist. Die physikalischen Massen der Eichbosonen ergeben sich nun durch die Eigenwerte der Massenmatrix m_{ab}^2 . Für ungebrochene Generatoren ergibt sich $(T^a v) = 0$ und für gebrochene Generatoren $(T^a v) \neq 0$.

12.3 Beispiel: $SU(2)$ Eichtheorie mit Higgsdublett

Der Lagrangian ist hier durch (12.13),(12.14),(12.15) gegeben mit $i = 1, 2$ und $a = 1, 2, 3$ sowie $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$. Das Potential ist gegeben durch

$$V = -\mu^2 \phi_i \phi_i^* + \frac{\lambda}{2} (\phi_i \phi_i^*)^2$$

mit dem Minimum $(\phi_i \phi_i^*)_{min} = \frac{\mu^2}{\lambda}$. Wir entwickeln um den Punkt $\phi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} v_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, v)$ mit $\frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{\lambda}$. Die Massen der Eichbosonen können nun einfach abgelesen werden:

$$\begin{aligned} m_{(ab)}^2 &= g^2 v_k T_{ki}^{(a)} T_{ij}^{(b)} v_j \\ &= \frac{g^2}{4} v_k \sigma_{ki}^{(a)} \sigma_{ij}^{(b)} v_j \\ &= \frac{g^2}{4} \delta^{ab} \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $\sigma^a \sigma^b = \delta^{ab} + i \varepsilon^{abc} \sigma^c$ benutzt wurde.

Es werden also alle 3 Eichbosonen massiv mit der gleichen Masse. Dies entspricht der Symmetriebrüchung $SU(2) \rightarrow X$, d.h. die Symmetrie wird vollständig gebrochen (und damit alle Generatoren), da $SU(1)$ nicht existiert (normalerweise $SU(N) \rightarrow SU(N-1)$).

Die "unitäre Eichung" (vgl. (12.6),(12.9)) wird hier durch

$$\phi = U(0, \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h)) \tag{12.19}$$

mit der unitären Matrix $U_{ij} = \exp(i\beta^a T_{ij}^a)$ realisiert.

Das Potential (12.3) ist in dieser Parametrisierung wieder unabhängig von β :

$$\begin{aligned} V &= -\mu^2 \frac{1}{2} (v+h)^2 + \frac{\lambda}{8} (v+h)^4 \\ &= V(v) + \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \sqrt{\frac{\lambda}{4}} m_h h^3 + \frac{\lambda}{8} h^4 \end{aligned}$$

Als letztes besprechen wir noch kurz eine analoge $U(2)$ Eichtheorie als Hinführung zur nächsten Vorlesung:

Eine $U(2)$ Eichtheorie mit Higgsdublett wird nach $U(1)$ gebrochen. Es entstehen 3 massive Eichbosonen mit gleicher Masse, 1 masseloses Eichboson, also 3 Goldstonebosonen und ein Higgsboson. Da dies allerdings nicht der Beobachtung in der Natur entspricht (unterschiedliche Massen von W^\pm, Z^0) muss etwas anderes zur Beschreibung herangezogen werden ($SU(2) \times U(1)$).

Autor: Jannes Heinze

13 Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem

von Jannes Heinze

13.1 Motivation: Reelles Skalarfeld mit diskreter Symmetrie

Zur Motivation betrachten wir zunächst ein reelles Skalarfeld ϕ mit ϕ^4 -Wechselwirkung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (13.1)$$

Hier wurden aus Konventionsgründen die Parameter so umdefiniert, dass in der Wechselwirkung nur noch der Faktor 4 statt wie vorher 4! auftaucht. Anders als bisher wird nun der Parameter m^2 als negativ gewählt, wobei λ weiterhin positiv bleibt, also $m^2 = -\mu^2$ mit $\mu^2 > 0$ und $\lambda > 0$. Damit kann m nicht mehr als die Masse von ϕ interpretiert werden.

Wir suchen nun das Minimum von $V(\phi)$ und setzt dies null um den Grundzustand zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi + \lambda \phi^3 \\ &= \phi(-\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 \end{aligned}$$

Dies wird gelöst durch $\phi = 0$ und $\phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$ und es ergibt sich $V(0) = 0$ und $V(\pm v = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}) = -\frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} < 0$ und damit liegen die Minima bei $\phi = \pm v$, wie in Abb. (6) dargestellt.

Die Lagrangedichte (13.1) besitzt eine diskrete Symmetrie $\phi \rightarrow -\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Der Grundzustand

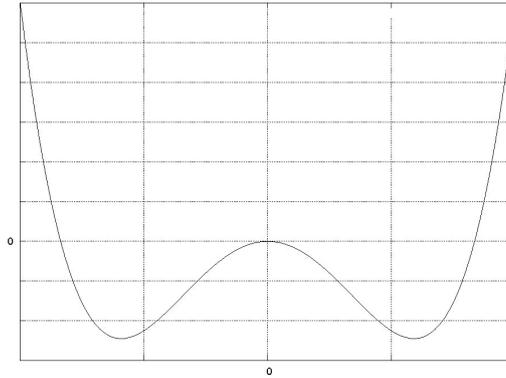


Abbildung 6: Potential $V(\phi)$ zur Lagrangedichte (13.1) mit $m^2 < 0$

besitzt diese Symmetrie allerdings wie man sieht für den hier betrachteten Parameterbereich nicht (klassischer Grundzustand eines Balles, der sich in diesem Potential befindet wäre eine der beiden Senken). Die beiden Grundzustände werden bei der gegebenen Symmetrietransformation ineinander überführt. Diesen Effekt nennt man spontane Symmetriebrechung (z.B. Ferromagnet).

Im Vergleich dazu wäre eine kleine Beimischung $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon\phi^3$ eine explizite Symmetriebrechung in der Lagrangedichte.

Um QFT zu betreiben muss die Lagrangedichte mittels einer Störungsreihe um den Grundzustand entwickelt werden.

Wir wählen den Grundzustand bei $\phi = +v$ und schreiben $\phi(x) = v + h(x)$.

$$\mathcal{L}(\phi = v + h) = \mathcal{L}(h) = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - V(h) \quad (13.2)$$

mit

$$\begin{aligned} V(h) &= -\frac{\mu}{2}(v+h)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+h)^4 \\ &= -\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{1}{2}(2\mu^2)v h + \sqrt{\lambda}\mu h^3 + \frac{\lambda}{4}h^4 \end{aligned} \quad (13.3)$$

An (13.3) sieht man, dass $\sqrt{2}\mu$ nun als positive Masse vom physikalischen Feld $h(x)$ interpretiert werden kann. Damit ergibt sich eine stabile und physikalische Theorie mit $h(x)$ als zu quantisierendem Feld.

13.2 Verallgemeinerung 1: Komplexes Skalarfeld mit $U(1)$ -Symmetrie

Wir betrachten nun ein komplexes Skalarfeld $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - V(\phi, \phi^*) = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{\lambda}{2}(\phi \phi^*)^2 \quad (13.4)$$

\mathcal{L} hat eine kontinuierliche globale $U(1)$ -Symmetrie $\phi \rightarrow \phi' = \exp i\alpha\phi$. Im folgenden betrachten wir nur noch kontinuierliche Symmetrien, wobei sich weitere Komplikationen ergeben.

Wie eben kann man zwei Parameterbereiche unterscheiden:

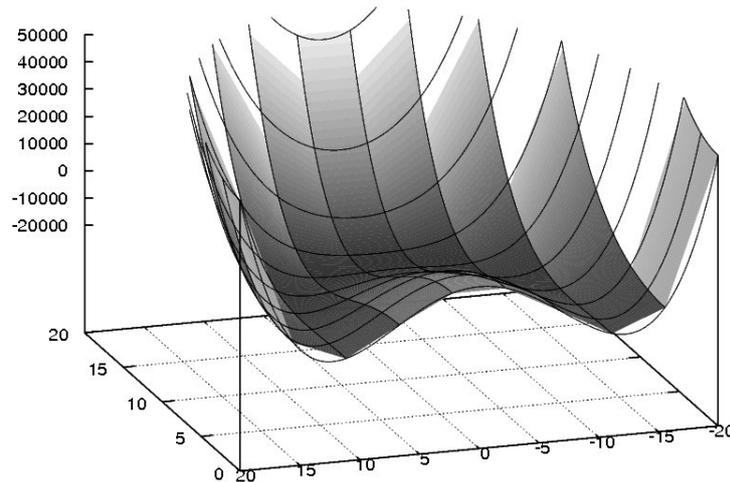


Abbildung 7: Potential $V(\phi)$ zu Lagrangedichte (13.4) mit $m^2 < 0$

1. $m^2 \geq 0$

Das Minimum befindet sich hier bei $\phi_1 = 0 = \phi_2$. Der Grundzustand besitzt die gleiche Symmetrie wie die Lagrangedichte. Die Symmetrie ist nicht gebrochen und es existiert nur eine Phase.

2. $m^2 < 0$ bzw. $m^2 = -\mu^2$ mit $\mu^2 > 0$

Die Extrema befinden sich hier mittels

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi^* + \lambda(\phi\phi^*)\phi^* \\ &= \phi^*(-\mu^2 + \lambda\phi\phi^*) = 0\end{aligned}$$

bei $\phi = 0 = \phi^*$ und $\phi\phi^* = \frac{\mu^2}{\lambda}$, wobei letzteres eine komplexe Kreisgleichung ist, die den Ort des Minimums beschreibt (siehe Abb. 7). Es existieren also kontinuierlich viele Grundzustände, die durch die $U(1)$ -Rotation ineinander überführt werden. Die Symmetrie ist somit spontan gebrochen.

Uns interessiert der zweite Fall und daher entwickeln wir die Lagrangedichte wiederum um ihren Grundzustand, d.h. wir schreiben $\phi = \frac{1}{2}(v + h(x) + i\sigma(x))$ mit $\frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{\lambda}$ und setzen in (13.4) ein:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma\partial^\mu \sigma + V(h, \sigma) \quad (13.5)$$

mit folgendem $V(h, \sigma)$, dass zu zweiten Ordnung in h und σ entwickelt wird, um die jeweiligen Massenterme zu identifizieren.

$$\begin{aligned}V(h, \sigma) &= -\mu^2\left(\frac{1}{2}(v+h)^2 + \sigma^2\right) + \frac{\lambda}{8}((v+h)^2 + \sigma^2)^2 \\ &= V(v) + h(-\mu^2 v + 4\frac{\lambda}{8}v^3) + \sigma(-\frac{1}{2}\mu^2 + 2\frac{\lambda}{8}v^2) + \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + \text{kubisch} \\ &= V(v) + \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + \text{kubisch}\end{aligned} \quad (13.6)$$

wobei $\frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{\lambda}$ benutzt wurde. Man sieht also, dass $\sigma(x)$ masselos ist und $h(x)$ eine Masse μ hat, da auch das Vorzeichen von μ^2 im Potential stimmt. Ein masseloses Boson wie $\sigma(x)$ nennt man ein Goldstoneboson.

13.3 Verallgemeinerung 2: N komplexe Skalarfelder mit globaler $U(N)$ -Symmetrie

Wir betrachten nun N komplexe Skalarfelder ϕ^i in der fundamentalen Darstellung der $U(N)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^{i*} - V(\phi^i, \phi^{i*}) = \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^{i*} - (m^2 (\sum_i \phi^i \phi^{i*}) + \frac{\lambda}{2} (\sum_i \phi^i \phi^{i*})^2) \quad (13.7)$$

die eine globale $U(N)$ -Symmetrie hat:

$$\begin{aligned}\phi^i &\rightarrow \phi'^i = U_j^i \phi^j, & \phi^{i*} &\rightarrow \phi'^{i*} = U_j^{i*} \phi^{j*}\end{aligned} \quad (13.8)$$

$$\sum_i \phi^i \phi^{i*} = \phi^i \phi^{i*}, \quad \text{falls } UU^\dagger = 1$$

Wir unterscheiden wieder die zwei Fälle:

1. $m^2 > 0$

Es ergibt sich ein Minimum bei $\phi^i = 0 = \phi^{i*}$, das $U(N)$ -invariant ist

2. $m^2 < 0$

Der Ort des Minimums ergibt sich durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi^i} &= \phi^{i*}(-\mu^2 \lambda \phi^j \phi^{j*}) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi^{i*}} &= \phi^i(-\mu^2 + \lambda \phi^j \phi^{j*}) = 0\end{aligned}$$

zu

$$\phi^j \phi^{j*} = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (13.9)$$

Wir führen nun wie oben neue Felder ein:

$$\phi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x) + i\sigma(x)), \phi^2, \dots, \phi^N \text{ mit } \frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Dies löst (13.9) für $h(x) = \sigma(x) = \phi^2 = \dots = \phi^N = 0$.

Wie oben kann man dies nun in (13.7) einsetzen und eine Taylorentwicklung bis zum 2. Grad machen um alle Massen der $2N$ Felder abzulesen. Es ergibt sich:

- $h(x)$ massiv
- $\sigma(x)$ masselos
- ϕ^2, \dots, ϕ^N masselos

also insgesamt $2N - 1$ Goldstonebosonen. Man kann allgemein voraussagen wie viele Goldstonebosonen mindestens zu erwarten sind. Diese Aussage trifft das

13.4 Goldstone-Theorem

Theorem: Für jeden spontan gebrochenen Symmetriegenerator einer globalen kontinuierlichen Symmetrie existiert ein (masseloses) Goldstoneboson.

Beweis: Betrachte N reelle Felder ϕ^i mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - V(\phi^i) \quad (13.10)$$

Dabei hat der kinetische Term $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i$ eine globale $O(N)$ -Invarianz. Dies ist damit die maximale Symmetrie des Systems. Im Allgemeinen hat das Potential $V(\phi^i)$ jedoch eine niedrigere Symmetrie G , die durch eine Untergruppe von $O(N)$ hervorgerufen ist. Dies stellt dann die gesamte Symmetrie der Lagrangedichte dar. Hierbei sind alle Untergruppen von $O(N)$ möglich. Wir nehmen nun an, dass V und damit \mathcal{L} eine globale Symmetrie G hat, also unter Symmetrietransformationen

$$\phi^i \rightarrow \phi^i + \delta\phi^i \text{ mit } \delta\phi^i = i \sum_{a=1}^{\dim(G)} \alpha^a T_j^{ai} \phi^j \quad (13.11)$$

in sich selbst überführt wird:

$$V(\phi^i) = V(\phi^i + \delta\phi^i) = V(\phi^i) + \frac{\partial V}{\partial\phi^i} \delta\phi^i$$

Es muss also gelten:

$$\frac{\partial V}{\partial\phi^i} \delta\phi^i = 0 \text{ woraus } \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^j \partial\phi^i} \delta\phi^i + \frac{\partial V}{\partial\phi^i} \frac{\partial}{\partial\phi^j} \delta\phi^i = 0$$

durch differenzieren nach ϕ^j folgt.

Im Minimum von V gilt $\frac{\partial V}{\partial\phi^i} = 0$ und damit muss dort

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i \partial\phi^j} \right)_{min} (\delta\phi^i)_{min} = 0 \quad (13.12)$$

gelten.

Definiere nun Sprachgebrauch aus dem Theorem:

- Ungebrochener Symmetriegenenerator: $(\delta\phi^i)_{min} = 0$
- Gebrochener Symmetriegenenerator: $(\delta\phi^i)_{min} \neq 0$ (siehe Abb. 7)

Es folgt also eine Bedingung an die Massenmatrix $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i \partial\phi^j} \right)_{min}$ in Richtung eines gebrochenen Symmetriegenenerators. Die Massenmatrix ist symmetrisch und daher immer diagonalisierbar durch eine geeignete Umdefinition der ϕ^i , so dass $\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i \partial\phi^j} = m_i^2 \delta_{ij}$.

Einsetzen in (13.12) liefert (keine Summe über i):

$$\sum_j m_j^2 \delta_{ij} (\delta\phi^i)_{min} = m_i^2 (\delta\phi^i)_{min} = 0$$

Woraus folgt

1. $(\delta\phi^i)_{min} = 0 \Rightarrow m_i^2 \neq 0$
2. $(\delta\phi^i)_{min} \neq 0 \Rightarrow m_i^2 = 0$

womit der Beweis zuende ist.

Der Beweis kann alleine für reelle Felder geführt werden, da sich N komplexe Felder als $2N$ reelle Felder darstellen lassen. Das Goldstonetheorem sagt lediglich etwas über die mindeste Anzahl von masselosen Feldern aus. Es könnte z.B. jedes der Felder in Richtung eines ungebrochenen Generators als masselos gewählt werden, was die Symmetrie nicht verletzen würde.

Am vorigen Beispiel der $U(N)$ -Symmetrie zählen wir die gebrochenen Symmetriegeneneratoren. Die Anzahl der vorhandenen Symmetriegeneneratoren ist N^2 , die Symmetrie des Grundzustandes ist $U(N-1)$, da es sich um eine N -Sphäre handelt. Es ergibt sich

$$N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1$$

in Übereinstimmung mit dem vorigen Ergebnis.

Autor: Sebastian Jacobs

14 Glashow-Salam-Weinberg-Theorie

Der große Mangel der bisher betrachteten eichtheorie ist, dass sie nur Eichbosonen gleicher Masse beschreibt. Dieser Fall tritt in der Natur jedoch nicht auf, daher haben Glashow, Salam und Weinberg nach einer Eichtheorie gesucht, die verschiedene Massen der Eichbosonen vorhersagt. Die Eichgruppe dieser elektro-schwachen Theorie ist

$$SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em},$$

die nach der Eichgruppe der QED $U(1)$ bricht. Das Spektrum der GSW-Theorie spaltet sich folgendermaßen auf:

	Feldvariable	Teil der Eichgruppe
4 Eichbosonen	$A_\mu^a, a = 1, 2, 3$	$SU(2)$
	B_μ	$U(1)_Y$
1 Higgsdoublet (Fermionen)	$\phi_i, i = 1, 2$	

Die Lagrangedichte für diese Theorie lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + D_\mu\phi_i^* D^\mu\phi_i - V(\phi^*, \phi),$$

dabei sind die kovarianten Ableitungen über

$$\begin{aligned} D_\mu\phi_i &= \partial_\mu\phi_i - igA_\mu^a T_{ij}^a \phi_j - iYg'B_\mu\phi_i, \\ D_\mu\phi_i^* &= \partial_\mu\phi_i^* + igA_\mu^a T_{ij}^{*a} \phi_j^* + iYg'B_\mu\phi_i^*. \end{aligned}$$

Dabei ist der Parameter Y die *Hyperladung*, der für das Higgs-Boson den Wert $Y = \frac{1}{2}$ hat. Die Erzeuger der Lie-Algebra sind für die gewählte Eichgruppe: $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$. Die Eichtransformationen für das Higgsdoublet lauten:

$$\begin{aligned} \delta\phi_i &= -i\sum_a \alpha^a T_{ij}^a \phi_j & SU(2), \\ \delta\phi_i^* &= -i\beta(x)Y\phi_i & U(1) \text{ Hyperladung.} \end{aligned}$$

Diese implementieren zwei unabhängige Eichkopplungen. Die Massenterme der Eichbosonen ergeben sich damit zu:

$$D_\mu\phi_i^* D^\mu\phi_i|_{\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,v)^T} = \frac{1}{8}(0,v)(gA_\mu^a\sigma^a + g'B_\mu)(gA^{b\mu}\sigma^b + g'B^\mu)\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Um diesen Ausdruck etwas handlicher zu schreiben verwenden wir folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} (0,v)\sigma^a\sigma^b\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} &= v^2\delta^{ab}, \\ (0,v)\sigma^a\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} &= -v^2\delta^{3a}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_i^* D^\mu \phi_i &= \frac{v^2}{8} \left(g^2 A_\mu^a A^{a\mu} - 2gg' A_\mu^a B^\mu + g'^2 B_\mu B^\mu \right), \\ &= \frac{v^2}{8} \left(g^2 A_\mu^a A^{a\mu} + A_\mu^b A^{b\mu} \right) + (gA_\mu^3 - g'AB_\mu) (gA^{3\mu} - g'B^\mu). \end{aligned}$$

Damit man an diesem Ausdruck die physikalischen Eichbosonen ablesen kann, machen wir nun noch folgende Substitutionen:

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2) \\ \begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \Theta_w & -\sin \Theta_w \\ \sin \Theta_w & \cos \Theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit $\cos \Theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$, $\sin \Theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$. Damit vereinfacht sich die Massenmatrix dann zu:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_i D^\mu \phi_i|_{\text{Min}} &= \frac{v^2}{8} \left(2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + (g^2 + g'^2) Z_\mu^0 Z^{0\mu} \right), \\ &= m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} m_{Z^0}^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}, \end{aligned}$$

mit den Eichbosonenmassen: $m_W = \frac{gv}{2}$, $m_{Z^0} = \sqrt{g^2+g'^2} \frac{v}{2} = \frac{m_W}{\cos \Theta_w}$, $m_A = 0$. Die GSW-Theorie hat also

$$\begin{array}{ll} 3 \text{ massive Eichbosonen} & W_\mu^\pm, Z_\mu^0, \\ 1 \text{ masseloses Eichboson} & A_\mu \text{ Photon der } U(1)_{\text{em}}. \end{array}$$

Die Massenmatrix

$$m_{ab}^2 = \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} g^2 & & & \\ & g^2 & & \\ & & g^2 & -gg' \\ & & -gg' & g'^2 \end{pmatrix},$$

die wir erhalten haben ist in den Komponenten A_μ , Z_μ^0 nicht diagonal. Dies kann man aber erreichen, indem man diese mittels $m_{\text{diag}}^2 = O_w^{-1} m^2 O_w$ diagonalisiert. Dabei ist

$$O_w = \begin{pmatrix} \cos \Theta_w & -\sin \Theta_w \\ \sin \Theta_w & \cos \Theta_w \end{pmatrix}.$$

Θ_w heißt ursprünglich „*weak-angle*“, und später in der Literatur Weinberg-Winkel. Im folgenden werden wir A_μ mit dem elektromagnetischen Vektorpotential assoziieren.

Wir wollen nun auch den fermionischen Anteil des Spektrums berücksichtigen. Der zusätzliche Term in der Lagrangedichte lautet:

$$\sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu D_\mu \psi_i,$$

mit dem SU(2)-Doublet ψ_i , das ebenfalls Hyperladung trägt. Die kovariante Ableitung, die in diesem Term auftaucht ist:

$$D_\mu \psi_i = \partial_\mu \psi_i - i \frac{g}{2} A_\mu^a \sigma_{ij}^a \psi_j - igY B_\mu \psi_i,$$

und die Eichtransformation zum Spinor-Feld ist:

$$\delta\psi_i = i\alpha^a T_{ij}^a \psi_j + iY\beta\psi_i.$$

Die kovariante Ableitung wollen wir zunächst in den Eigenzuständen des Massenoperators W^\pm , Z^0 ausdrücken:

$$\begin{aligned} D_\mu\psi_i &= \partial_\mu\psi_i - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\sigma^+ + W_\mu^-\sigma^-)_{ij}\psi_j - i\frac{g}{2}(\cos\Theta_w Z_\mu^0 + \sin\Theta_w A_\mu)\sigma_{ij}^3\psi_j \\ &\quad - ig'Y(-\sin\Theta_w Z_\mu^0 + \cos\Theta_w A_\mu)\psi_j, \\ &= \partial_\mu\psi_i - \frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\sigma^+ + W_\mu^-\sigma^-)_{ij}\psi_j - i\left(\frac{g}{2}\cos\Theta_w\sigma^3 - g'\sin\Theta_w\right)_{ij}Z_\mu^0\psi_j \\ &\quad - i\left(\frac{g}{2}\sin\Theta_w\sigma^3 + g'Y\cos\Theta_w\right)_{ij}A_\mu\psi_j. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Linearkombination $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$ eingeführt. Wir definieren nun die Ladungen der entsprechenden Eichbosonen und fermionischen Felder

$$\begin{aligned} e &:= \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g\sin\Theta_w = g'\cos\Theta_w, \\ Q &:= \frac{1}{2}\sigma^3 + Y\mathbf{1}_{2\times 2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich für die kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} D_\mu\psi_i &= \partial_\mu\psi_i - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\sigma^+ + W_\mu^-\sigma^-)\psi - i\frac{g}{\cos\Theta_w}Z_\mu^0\left(\frac{1}{2}\sigma^3 - \sin^2\Theta_w Q\right)\psi \\ &\quad - ieA_\mu Q\psi \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, dass die GSW-Theorie eine chirale Symmetrie hat. Dazu aber zunächst: **Definition 1. Chirale Eichtheorien** sind Eichtheorien, bei denen ψ_L und ψ_R in verschiedenen Darstellungen der Eichgruppe G transformieren.

Aus der Quantenfeldtheorie I kennen wir bereits

$$\begin{aligned} \psi_{\text{Dirac}} &= \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger) = (\bar{\psi}_R, \bar{\psi}_L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^\mu &= (\mathbf{1}, \vec{\sigma}), \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\mathbf{1}, -\vec{\sigma}). \end{aligned}$$

Der kinetische Term der Lagrangedichte lautet ausgedrückt in den chiralen Komponenten

$$\bar{\psi}_D i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_D = \bar{\psi}_L i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_R,$$

und der Massenterm

$$m\bar{\psi}_D \psi_D = m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L).$$

Unter einer chiralen U(1)-Eichtransformation transformieren sich die chiralen Komponenten des Dirac-Spinors nach

$$\begin{aligned}\psi_L &\rightarrow \psi'_L = e^{iY_L\alpha(x)}\psi_L, \\ \psi_R &\rightarrow \psi'_R = e^{iY_R\alpha(x)}\psi_R.\end{aligned}$$

Man erkennt dabei, dass der kinetische Term invariant ist unter dieser Eichtransformation, der Massenterm hingegen ist nicht symmetrisch für allgemeine Hyperladungen Y_R, A_L . Falls $Y_L = Y_R$, ist auch der Massenterm invariant unter der chiralen Eichtransformation. Man folgert daraus, dass chirale Eichtheorien keine Massenterme erlauben.

Fermionen in der GSW-Theorie Für das fermionische Spektrum in der GSW-Theorie erhält man

Spektrum	SU(2)	Y	Q
$E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	2	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	2	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
e_R	1	-1	-1
u_R	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Dabei sind u, e, ν_e, d, e_R, u_R und d_R Weyl-Spinoren. Die Lagrangedichte ausgedrückt in diesen Komponenten lautet:

$$\mathcal{L} = \bar{E}_L i\gamma^\mu D_\mu E_L + \bar{e}_R i\not{D} e_R + \bar{Q}_L i\not{D} Q_L + \bar{u}_R i\not{D} u_R + \bar{d}_R i\not{D} d_R.$$

Hierbei lauten die kovarianten Ableitungen der Felder:

$$\begin{aligned}D_\mu Q_{Li} &= \partial_\mu Q_{Li} - igA_\mu^a T_{ij}^a Q_{Lj} - i\frac{g'}{6} B_\mu Q_{Li}, \\ D_\mu E_{Li} &= \partial_\mu E_{Li} - igA_\mu^a T_{ij}^a E_{Lj} + i\frac{g'}{2} B_\mu E_{Li} \\ D_\mu e_R &= \partial_\mu e_R + ig' B_\mu e_R \\ D_\mu u_R &= \partial_\mu u_R - i\frac{2}{3} g' B_\mu u_R \\ D_\mu d_R &= \partial_\mu d_R + ig'\frac{1}{3} B_\mu d_R.\end{aligned}$$

Die rechtshändigen Neutrinos kommen so nicht in der GSW-Theorie vor. Wenn man jedoch ihre Existenz postuliert, dann müssten die rechtshändigen Neutrinos folgende Ladungen tragen:

Spektrum	SU(2)	Y	Q
ν_R	1	0	0

Die kovariante Ableitung dieses Feldes müsste dann

$$D_\mu \nu_R = \partial_\mu \nu_R$$

Die Lagrangedichte würde dann

$$\underbrace{\bar{E}_L i \not{\partial} E_{L i} + \bar{e}_R i \not{\partial} e_R + \bar{\nu}_R i \not{\partial} \nu_R + \dots}_{\sum \bar{f} i \not{\partial} f} + g (W_\mu^+ J_W^{+\mu} + W_\mu^- J_W^{-\mu} + Z_\mu^0 J_Z^\mu) \\ + e A_\mu J_{\text{em}}^\mu - m_W^L W_\mu^+ W^{-\mu} - \frac{1}{2} m_Z^L Z_\mu^0 Z^{0\mu}$$

lauten. Dabei sind die folgenden geladenen Ströme eingeführt worden:

$$J_W^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \sigma^\mu e_L + \bar{u}_L \sigma^\mu d_L), \\ J_W^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \sigma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \sigma^\mu u_L), \\ J_{\text{em}}^\mu = \bar{e}_D \gamma^\mu (-1) e_D + \bar{u}_D \gamma^\mu \frac{2}{3} u_D - \frac{1}{3} \bar{d}_D \gamma^\mu d_D,$$

$$J_Z^\mu = \frac{1}{\cos \Theta_w} \left[\frac{1}{2} \bar{\nu}_L \sigma^\mu \nu_L + \bar{e}_L \sigma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin \Theta_w \right) e_L + \bar{e}_R \sigma^\mu \sin \Theta_w e_R + \bar{u}_L \sigma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin \Theta_w \right) u_L \right. \\ \left. + \bar{u}_R \sigma^\mu \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \Theta_w \right) u_R + \bar{d}_L \sigma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \Theta_w \right) d_L + \bar{d}_R \sigma^\mu \left(\frac{1}{3} \sin^2 \Theta_w \right) d_R \right].$$

Dabei haben wir den Dirac-Spinor $e_D = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix}$ eingeführt.

Um die Ladung der W^\pm zu bestimmen betrachten wir die Ableitung in die 3-richtung:

$$\delta_{\alpha_3} W_\mu^\pm = \delta_{\alpha_3} (A_\mu^1 \mp A_\mu^2) \\ = f^{123} A_\mu^2 \alpha^3 \mp i f^{213} \alpha^3 \\ = \pm i f^{123} \alpha^3 (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2).$$

Somit hat also W^+ die Ladung $+$ und W^- die Ladung $-$.

Der Massenterm der Lagrangedichte bereitet allerdings Probleme ($m \bar{\psi}_D \psi_D = m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$), da dieser nicht eichinvariant ist. Jedoch sind Yukawa-Kopplungen erlaubt ($-\lambda \text{BFF}$, λ ist dimensionslose Kopplungskonstante):

$$\mathcal{L}_{\text{GSW}} = -\lambda_e \phi_i \bar{E}_{L i} e_R - \lambda_q \phi_i \bar{Q}_{L i} d_R - \lambda_u \varepsilon^{ij} \phi_j^\dagger \bar{Q}_{L i} u_R + h.c.$$

Um einzusehen, dass diese Wechselwirkung tatsächlich eichinvariant sind, betrachten wir folgende Ausdrücke:

- $\bar{\psi}_i \psi_i$
Denn: $\bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} U^\dagger U \psi = \bar{\psi} \psi$
- $\varepsilon^{ij} \psi_i \psi_j$
Denn: $\varepsilon^{ij} \psi_i \psi_j \rightarrow \varepsilon^{ij} U_{ik} U_{jm} \psi_k \psi_m = \det U \varepsilon^{km} \psi_k \psi_m = \varepsilon^{km} \psi_k \psi_m$.

Wenn wir in den Massenterm den Grundzustandserwartungswert des Higgsfeldes einsetzen und neue Massen definieren, erhalten wir:

$$\mathcal{L} = -m_e \bar{e}_L e_R - m_d \bar{d}_L d_R - m_u \bar{u}_L u_R - m_\nu \bar{\nu}_L \nu_R + h.c.,$$

mit den neu definierten Massen

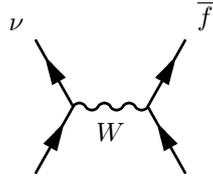


Abbildung 8: Elektron-Neutrino-Streuung

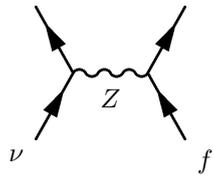


Abbildung 9: Neutrino-Neutrino-Streuung

$$\begin{aligned} m_e &= \frac{\lambda_e v}{\sqrt{2}}, & m_d &= \frac{\lambda_d v}{\sqrt{2}}, \\ m_\nu &=? & m_u &= \frac{\lambda_u v}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Man könnte auch einen weiteren Term in die Wechselwirkung einführen, die dem Neutrino eine Masse geben würde:

$$\mathcal{L}_\nu = -\lambda_\nu \varepsilon^{ij} \bar{E}_L i \phi_j^\dagger \nu_R + h.c.$$

Dies ist jedoch nur dann eichinvariant, wenn das Teilchen keine Ladung unter der Eichgruppe besitzt, also nur für Neutrinos. Dieser Term würde dem ν_e eine Masse geben, die dem Elektron vergleichbar wäre, im Widerspruch zum Experiment. Die beobachtete kleine Neutrinomasse passt zur Theorie, wenn die ν_R verboten sind.

Vorhersagen der GSW-Theorie Das GSW-Modell sagt folgende Wechselwirkungen vorher:

Die Bewegungsgleichungen lauten hier:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta W_\mu^\pm} &= g J^{\pm \mu} - m_W^2 W^{\pm \mu} = 0, \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Z_\mu^0} &= g J_Z^\mu - m_Z^2 Z^{0 \mu} = 0, \end{aligned}$$

unter Vernachlässigung der kinetischen Terme. Man kann also die Felder W^\pm und Z^0 eliminieren.

$$\begin{aligned} W^{\pm \mu} &= \frac{g}{m_W^2} J^\pm, \\ Z^{0 \mu} &= \frac{g}{m_Z^2} J_Z^\mu \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Lagrangedichte, erhalten wir dann:

$$\mathcal{L}_{\text{GSW}} = \frac{g^2}{m_W^2} J_\mu^+ J^{-\mu} + \frac{g^2}{m_Z^2} J_{Z\mu} J_Z^\mu$$

Dies nennt man auch eine Strom-Strom-Wechselwirkung. Diese ist quartisch in den Fermionen. Ein Beispiel für eine solche Wechselwirkung ist der β -Zerfall $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$. Es wurde schon

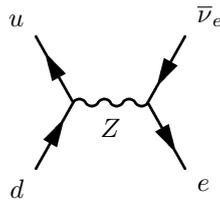


Abbildung 10: β -Zerfall in der GSW-Theorie

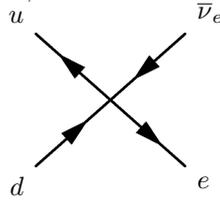


Abbildung 11: β -Zerfall als 4-Fermionen-Wechselwirkung ohne Austauschzeichen; nicht renormierbar!

früher versucht eine 4-Fermionen-Wechselwirkung zu beschreiben. Diese Wechselwirkung ist jedoch nicht renormierbar. Die GSW-Theorie kann diese Wechselwirkung korrekt, renormierbar beschreiben, und kann das wechselwirkende Teilchen vorhersagen. Erst bei höheren Energien kann man den Vertex genauer auflösen und erkennt, dass die Wechselwirkung nicht punktförmig ist, sondern dass sich ein W bildet.

Autor: Michael Greife

15 Anomalien in Quantenfeldtheorien

(AUTOR: MICHAEL GREIFE)

[PS 19.4 & 20.2]

S. Adler (1969). "Axial Vector Vertex in Spinor Electrodynamics". Physical Review 177: 2426-2438.

J. S. Bell and R. Jackiw (1969). "A PCAC Puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model". Il Nuovo Cimento A 60: 47-61.

Die Symmetrie der klassischen Wirkung besitzt einen erhaltenen Noether-Strom $\partial_\mu j^\mu = 0$. Wenn diese Symmetrie durch Quantenkorrekturen gebrochen wird, spricht man von einer *anomalen* Symmetrie.

$$\partial_\mu j^\mu = \hbar \mathcal{A} \quad \text{oder} \quad \langle \partial_\mu j^\mu \rangle = \mathcal{A}$$

Dies ist eine symbolische Schreibweise, in der \mathcal{A} die Anomalie bezeichnet.

Es gibt zwei Arten von Anomalien:

- 1) Die Symmetrie ist global (bzw. j^μ koppelt nicht an ein Eichfeld).
Dieser Fall ist harmlos. \Rightarrow zusätzliche physikalische Prozesse (z.B. $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$)
- 2) Die Symmetrie ist lokal (bzw. j^μ koppelt an ein Eichfeld).
In diesem Fall ist die Ward-Identität nicht mehr gültig.
 - \Rightarrow Renormierbarkeit geht verloren
 - \Rightarrow Theorie inkonsistent
 - \Rightarrow zusätzliche Einschränkung an QFT

Das Auftreten von Anomalien in chiralen QFT Chirale Eichtheorien sind solche, in denen ψ_L und ψ_R in unterschiedlichen Darstellungen der Eichgruppe G transformieren.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \bar{\psi}_L i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_L - \bar{\psi}_R i \sigma^\mu D_\mu \psi_R + \mathcal{L}_Y \quad (15.1)$$

mit den kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} D_\mu \psi_L &= \partial_\mu \psi_L - ig A_{L\mu}^a T_{r_L}^a \psi_L, & \delta \psi_L &= i \alpha_L^a T_{r_L}^a \psi_L, \\ D_\mu \psi_R &= \partial_\mu \psi_R - ig A_{R\mu}^a T_{r_R}^a \psi_R, & \delta \psi_R &= i \alpha_R^a T_{r_R}^a \psi_R. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Wir betrachten hier den Fall $A_{L\mu} = A_{R\mu}$, wobei der Fall $A_{L\mu} \neq A_{R\mu}$ prinzipiell auch möglich ist. Die Lagrangedichte lautet dann

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L - \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - A_\mu^a j_L^{a\mu} - A_\mu^a j_R^{a\mu} \quad (15.3)$$

mit $j_L^{a\mu} = g \bar{\psi}_L T_{r_L}^a \psi_L$ und $j_R^{a\mu} = g \bar{\psi}_R T_{r_R}^a \psi_R$. Im klassischen Fall ist der links- bzw. rechtshändige Noetherstrom erhalten: $D_\mu j_L^{a\mu} = 0 = D_\mu j_R^{a\mu}$.

Wir untersuchen nun den Term mit ψ_R aus der Lagrangedichte. Dabei gilt $\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \sigma^0 = \psi_R^\dagger$, da $\sigma^0 = \mathbf{1}$. Desweiteren benutzen wir, dass $\sigma^2 \psi_R^*$ unter Lorentztransformationen wie ein linkshändiger Weyl-Spinor ψ'_L transformiert. Wir definieren daher $\psi'_L := \sigma^2 \psi_R^*$ oder umgeschrieben $\psi_R = \sigma^{2*} \psi'_L$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi_R} &= \psi_R^\dagger i \sigma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu^a T_{rR}^a) \psi_R \\
&= \psi_L'^T i \sigma^{2T} \sigma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu^a T_{rR}^a) \sigma^{2*} \psi_L'^* \\
&= -i (\partial_\mu \psi_L'^T) \sigma^{2T} \sigma^\mu \sigma^{2*} \psi_L'^* - i^2 g \psi_L'^T \sigma^{2T} \sigma^\mu \sigma^{2*} A_\mu^a T_{rR}^a \psi_L'^* \\
&= i \psi_L'^\dagger \underbrace{(\sigma^{2T} \sigma^\mu \sigma^{2*})^T}_{=(\mathbf{1}, -\sigma^a)=\bar{\sigma}^\mu} \partial_\mu \psi_L' + i^2 g \psi_L'^\dagger \underbrace{(\sigma^{2T} \sigma^\mu \sigma^{2*})^T}_{=(\mathbf{1}, -\sigma^a)=\bar{\sigma}^\mu} A_\mu^a \underbrace{T_{rR}^a}_{=T_r^{a*}} \psi_L' \\
&= i \left(\psi_L'^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L' + ig \psi_L'^\dagger \bar{\sigma}^\mu A_\mu^a T_r^{a*} \psi_L' \right) \\
&= i \bar{\psi}'_L \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi'_L \quad \text{mit } D_\mu \psi'_L = \partial_\mu \psi'_L + ig A_\mu^a T_r^{a*} \psi'_L
\end{aligned} \tag{15.4}$$

Von der zweiten in die dritte Zeile wurde der erste Term partiell integriert. Im Schritt zur vierten Zeile wurde der gesamte Ausdruck transponiert ($\mathcal{L}^T = \mathcal{L}$). In der vierten Zeile wurden zudem folgende Beziehungen benutzt:

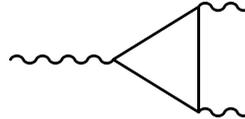
$$\sigma^2 \sigma^a \sigma^2 = -\sigma^{aT}, \quad \sigma^2 \mathbf{1} \sigma^2 = \mathbf{1}, \quad T^{a\dagger} = T^a.$$

Die kovariante Ableitung lässt sich unter Benutzung von $T_r^{a*} = -T_{\bar{r}}^a$ folgendermaßen schreiben:

$$D_\mu \psi'_L = \partial_\mu \psi'_L - ig A_\mu^a T_{\bar{r}}^a \psi'_L. \tag{15.5}$$

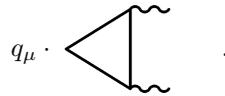
Rechtshändige Fermionen können also als linkshändige Fermionen, die in der komplex-konjugierten Darstellung transformieren, geschrieben werden.

In Eichtheorien, in denen die Eichbosonen an chirale Fermionströme koppeln, tritt die Anomalie in den Dreiecksdiagrammen auf, die zur 1-Loop-Korrektur des 3-Eichbosonen-Vertex beitragen:



(15.6)

Die Anomalie wird berechnet durch



Das Ergebnis lautet (ohne Rechnung):

$$D_\mu j^{a\mu} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \mathcal{A}^{abc}. \tag{15.7}$$

Dabei ist der Anomaliekoeffizient \mathcal{A}^{abc} gegeben durch

$$\mathcal{A}^{abc} = \text{Tr}_r (T_r^a \{T_r^b, T_r^c\}). \tag{15.8}$$

Das Adler-Bardeen-Theorem

Falls $\mathcal{A}^{abc} = 0$, dann gilt $D_\mu j^{a\mu} = 0$ an allen Ordnungen der Störungstheorie.

Anomaliefreiheit vektorartiger Theorien Es gilt die Beziehung $\mathcal{A}(\bar{r}) = -\mathcal{A}(r)$. Beweis:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\bar{r}) &= \text{Tr}_{\bar{r}} (T_{\bar{r}}^a \{T_{\bar{r}}^b, T_{\bar{r}}^c\}) \\
 &= -\text{Tr}_r (T_r^{a*} \{T_r^{b*}, T_r^{c*}\}) \\
 &= - (T_r^{a*} T_r^{b*} T_r^{c*} + T_r^{a*} T_r^{c*} T_r^{b*}) \\
 &= - (T_r^{a\dagger} T_r^{b\dagger} T_r^{c\dagger} + T_r^{a\dagger} T_r^{c\dagger} T_r^{b\dagger}) \\
 &= - (T_r^a T_r^c T_r^b + T_r^a T_r^b T_r^c) \\
 &= -\text{Tr}_r (T_r^a \{T_r^b, T_r^c\}) = -\mathcal{A}(r)
 \end{aligned} \tag{15.9}$$

Vektorartige Theorien sind daher immer anomaliefrei ($\mathcal{A} = 0$)!

Bei einer vektorartigen Theorie befinden sich die Fermionen in der Darstellung $r \oplus \bar{r}$. Eine Theorie mit n_f Fermionen ψ_r und $n_{\bar{f}}$ Fermionen $\psi_{\bar{r}}$ ist anomaliefrei, wenn $n_f = n_{\bar{f}}$.

Die Aufhebung der Anomalien im Standardmodell Die Eichgruppe des Standardmodells ist $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$.

Das Teilchenspektrum lautet:

	$SU(3)$	$SU(2)$	Y
E_L	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$-\frac{1}{2}$
e_R	$\underline{1}$	$\underline{1}$	-1
Q_L	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\frac{1}{6}$
u_R	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\frac{2}{3}$
d_R	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$-\frac{1}{3}$

- $SU(3)$:



$$\tag{15.10}$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_L : 2 \cdot \underline{3} \\ u_R : 1 \cdot \underline{3} \\ d_R : 1 \cdot \underline{3} \end{array} \right\} \text{vektorartig} \Rightarrow \mathcal{A} = 0$$

- $SU(2)$:



$$\tag{15.11}$$

Der Anomaliekoeffizient aus (15.8) wird für dieses Diagramm:

$$\mathcal{A}^{abc} = \text{Tr} \left(\sigma^a \underbrace{\{\sigma^b, \sigma^c\}}_{2\delta^{bc} \cdot \mathbb{1}} \right) = 2\delta^{bc} \underbrace{\text{Tr} \sigma^a}_{=0} = 0$$

Dies liegt daran, dass die fundamentale Darstellung der $SU(2)$ reell ist.

• $U(1)_Y$:



$$\sim \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Fermionen}}} Y_f^3 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 1^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 0 \quad (15.12)$$

Dieses Diagramm nennt man die kubische Anomalie.

Gemischte Anomalien können bei Produkten von Eichgruppen auftreten:

$$G = G_1 \times G_2 \times G_3$$


Im Standardmodell treten unter anderem die folgenden gemischten Anomaliediagramme auf, die zum Teil nicht trivial verschwinden:



$$\sim \sum_{\substack{\text{Linkshändige} \\ \text{Fermionen}}} Y_{f_L} \underbrace{\text{Tr}(T^a T^b)}_{\propto \delta^{ab}} \sim \delta^{ab} \sum_{f_L} Y_{f_L}$$

$$= -\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 0 \quad (15.13)$$

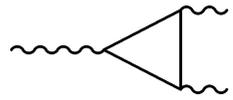


$$\sim \sum_{\text{Quarks}} Y_q \underbrace{\text{Tr}(T_3^a T_3^b)}_{\propto \delta^{ab}} \sim \delta^{ab} \sum_q Y_q$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0 \quad (15.14)$$



$$\sim \underbrace{\text{Tr} \sigma^a}_{=0} \text{Tr} T_3^b T_3^c = 0 \quad (15.15)$$



$$\sim \underbrace{\text{Tr} \sigma^a}_{=0} Y^2 = 0 \quad (15.16)$$

Bei Hinzunahme der Gravitation tritt noch ein weiteres anomales Diagramm auf, das nicht trivial verschwindet, die so genannte Gravitationsanomalie:



$$\sim \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Fermionen}}} Y_f = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + 6 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad (15.17)$$

Das Standardmodell ist also eine anomaliefreie chirale Eichtheorie. Die Aufhebung der Anomalien legt jedoch die Struktur des Teilchenspektrums fest. So wird z.B. gefordert, dass Leptonen und Quarks in Multipletts der Struktur $(E_L, e_R, Q_L, u_R, d_R)$ - so genannten Generationen - vorliegen.

Zudem sind alle Hyperladungen durch die Anomaliegleichungen festgelegt, wenn die Elektronenladung auf -1 gesetzt wird.

Das Hinzufügen eines sterilen rechtshändigen Neutrinos ν_R zum Teilchenspektrum verändert das Bild nicht, da es ein Singlett mit Hyperladung $Y = 0$ ist.