Universität Hamburg, Department Physik

1. Klausur Quantenfeldtheorie II WS 07/08

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Definieren Sie das erzeugende Funktional Z für n komplexe Sklarfelder $\phi^i, i = 1, \ldots, n$ mit Hilfe des Pfadintegrals.

b) Berechnen Sie Z explizit für n freie Skalarfelder mit Hilfe einer geeigneten quadratischen Ergänzung.

c) Wie berechnet man den Propagator aus Z?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi D^\mu\bar{\phi} - m^2\phi\bar{\phi} + \lambda(\phi\bar{\phi})^2 - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

mit $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - igA_\mu\phi$.

a) Geben Sie die Feynman Regeln dieser Theorie im Impulsraum an.
(Faktoren müssen nicht berechnet werden.)

b) Ist die Theorie renormierbar? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis: Benutzen Sie die Dimensionalität der Kopplungen für Ihr Argument.

c) Geben Sie die jeweils störungstheoretisch führenden Feynman Diagramme für den Propagator von ϕ und den Propagator von A_μ an. Welche Divergenzen treten auf?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sein ein Operator A mit positiven und reellen diskreten Eigenwerten a_n sowie orthonormierten Eigenfunktionen $f_n(x)$

$$Af_n(x) = a_n f_n(x)\ .$$

Definieren Sie

$$\zeta_A(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^s}\ , \qquad \text{und} \qquad G(x,y,\tau) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n\tau} f_n(x) f_n^*(y)\ .$$

a) Zeigen Sie

$$\det A = \exp\Big[-\frac{d\zeta_A}{ds}\Big|_{s=0}\Big]\ .$$

b) Zeigen Sie

$$A_x G = -\frac{\partial G}{\partial \tau}\ .$$

c) Zeigen Sie

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int dx G(x,x,\tau)\ .$$

Hinweis: $\Gamma(s) := a^s \int_0^\infty dx x^{s-1} e^{-ax}$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

In der QED ist die β-Funktion gegeben durch

$$\beta(e) = M\partial_M\big(-e\delta_1 + e\delta_2 + \tfrac{1}{2}e\delta_3\big)\ ,$$

$$\text{mit} \qquad \begin{aligned} \delta_1 = \delta_2 &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M)^{4-d}} + \text{endliche Terme} \\ \delta_3 &= -\frac{4e^2}{3(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(M)^{4-d}} + \text{endliche Terme} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $\beta(e)$ im Limes $d \to 4$.

Hinweis: $\Gamma(x) = \frac{1}{x}$ + endliche Terme

b) Lösen Sie

$$\frac{d\bar{e}(p)}{dln(p/M)} = \beta(\bar{e})\ .$$