Universität Hamburg, Fachbereich Physik

Übungsblatt 6 Statistische Physik und Thermodynamik WS 05/06

Abgabetermin: 16.12.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

a) Geben Sie für ein System aus 3 nicht-wechselwirkende Fermionen im Volumen V die orthonormierten Eigenzustände an und überprüfen Sie explizit die Antisymmetrie der Wellenfunktion und ihre Normierung. Wie lautet dieser Zustand in der Besetzungszahldarstellung?

b) Wie lauten die orthonormierten Eigenzustände für 3 nicht-wechselwirkende Bosonen, wenn sich zwei der Bosonen im gleichen Zustand befinden. Überprüfen Sie explizit die Symmetrie der Wellenfunktion und ihre Normierung. Wie lautet die Besetzungsdarstellung in diesem Fall?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß für ideale Quantengase $\langle H \rangle = \sum_p \epsilon_p \, n(\epsilon_p)$ gilt.

Hinweis: Drücken Sie $\langle H \rangle$ durch eine geeignete Ableitung von $\ln Z_G$ aus.

b) Berechnen Sie $\langle n_q^2 \rangle - \langle n_q \rangle^2$ für ideale Quantengase im großkanonischen Ensemble.

Hinweis: Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial \beta \epsilon_q} \langle n_q \rangle$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Riemannsche ζ-Funktion ist definiert durch $\zeta(\nu) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^\nu}$.

a) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x - 1} \; = \; \Gamma(\nu) \, \zeta(\nu) \; .$$

b) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x + 1} \; = \; (1 - 2^{1-\nu}) \, \Gamma(\nu) \, \zeta(\nu) \; .$$

Hinweis: Entwickeln Sie den Nenner und addieren Sie auf geeignete Weise $\zeta(\nu)$.

c) Zeigen Sie, daß für $z < 1$ gilt

$$\begin{aligned} g_\nu(z) \; &\equiv \; \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} - 1} \; = \; \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\nu} \; , \\ f_\nu(z) \; &\equiv \; \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} + 1} \; = \; \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^\nu} \; . \end{aligned}$$