Übungsblatt 1 Statistische Physik und Thermodynamik WS 05/06

Abgabetermin: 4.11.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die Γ-Funktion ist definiert durch

$$\Gamma(n+1) := \int_0^\infty dt\, t^n e^{-t}$$

a) Zeigen Sie $\Gamma(n+1) = n!$.

Hinweis: Führen Sie $\Gamma(n+1)$ durch geeignetes differenzieren auf $\int_0^\infty dt\, e^{-at}$ zurück.

b) Zeigen Sie, daß für große n gilt (Stirlingsche Formel)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \; .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß der Integrand von $\Gamma(n+1)$ ein scharfes Maximum bei $t = n$ hat und passen Sie dann den Integranden bis zur zweiten Ordnung an die Funktion $Ae^{-\frac{(t-n)^2}{2a^2}}$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei ein 1-dim. klassischer harmonischer Oszillator $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

a) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen für $H \leq E$ und für $E \leq H \leq E + \Delta$

b) Bestimmen Sie die mikrokanonische Verteilungsfunktion ρ.

c) Berechnen Sie damit den Mittelwert der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und den Mittelwert der potentiellen Energie $\langle U \rangle$ und zeigen Sie

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2} + \frac{\Delta}{4} \; .$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Phasenraumvolumen

$$\bar{\Omega}(E) := \int d\Gamma\, \Theta(E - H(p,q))$$

für ein ideales Gas im mikrokanonischen Ensemble und zeigen Sie $\ln \bar{\Omega}(E) \approx \ln \Omega(E)\Delta$ für große N. Was ist die physikalische Interpretation dieser Gleichung?
(Θ ist die Stufenfunktion: $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$, $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$).