Übungsblatt 7 — Statistische Physik und Thermodynamik — WS 03/04

Abgabetermin: 15.12.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die Riemannsche ζ-Funktion ist definiert durch $\zeta(\nu) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{\nu}}$.

a) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x - 1} \;=\; \Gamma(\nu)\,\zeta(\nu) \; .$$

b) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x + 1} \;=\; (1 - 2^{1-\nu})\,\Gamma(\nu)\,\zeta(\nu) \; .$$

Hinweis: Entwickeln Sie den Nenner und addieren Sie auf geeignete Weise $\zeta(\nu)$.

c) Zeigen Sie, daß für $z \ll 1$ gilt

$$g_\nu(z) \;\equiv\; \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} - 1} \;=\; \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\nu} \; ,$$

$$f_\nu(z) \;\equiv\; \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} + 1} \;=\; \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^\nu} \; .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Fermigas aus masselosen Fermionen mit einer relativistischen Energie-Impuls Beziehung $\epsilon(p) = c|\vec{p}|$.

a) Leiten Sie die Zustandsgleichung $PV = \frac{1}{3}E$ her.

Hinweis: Modifizieren Sie die analoge Rechnung aus der Vorlesung indem Sie $\epsilon(p) = c|\vec{p}|$ benutzen.

b) Berechnen Sie Fermi-Impuls und Fermi-Energie.

c) Zeigen Sie, daß bei $T = 0$ gilt

$$E = \frac{1}{4} N \epsilon_F \; , \qquad \mu = \epsilon_F \; .$$

a) Zeigen Sie, daß für einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator der Hamiltonoperator durch

$$H = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2}) \ , \quad \hat{n} \equiv a^\dagger a \ ,$$

gegeben ist und berechnen Sie $a, a^\dagger$ als Funktion von x und p.

Berechnen Sie $[a, a^\dagger], [\hat{n}, a^\dagger], [\hat{n}, a]$. Wie lauten die Energieeigenzustände und Energieeigenwerte?

b) Zeigen Sie, daß die kanonische Zustandssumme für N unabhängige harmonische Ozsillatoren gleicher Frequenz durch

$$Z_K = \left(\frac{1}{2\sinh(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega)}\right)^N$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie $\langle H \rangle$ und c_V für das System.