V6 Einstein Gleichungen

Prinzip der Kovarianz

physikalische Gesetze / Gleichungen müssen durch Tensoren ausgedrückt werden.

Offen: Tensoren bzgl. welcher Transformationen?

Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

Vektoren

invariant unter Galilei-T.
kovariant bzgl. beliebiger Rotation
(Rotation lässt Betrag $|\vec{a}|$ unverändert)

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e_i}$$

Rotation: $a_i \to a_i' = \sum_j R_i{}^j(\alpha,\varphi) a_j$

Drehwinkel

=> Newton-Gleichung im gedrehten KS

$$F_i' - ma_i' = \sum_{j=1}^{3} R_i{}^j (F_j - m a_j) = 0$$

$$\Rightarrow R_i{}^j \neq 0 \Rightarrow F_j = m a_j$$

=> Lösungen der Newton Gleichung sind unverändert!

Maxwell Gl: invariant unter LT
kovariant unter Rot.

Einstein postulierte:

Prinzip der Allgemeinen Kovarianz

- Phys. Gesetze müssen kovariant bzgl. beliebiger Koordinatentransformation sein!
- Für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ müssen sich Gesetze der SRT ergeben

⇒ Gravitationsgesetz muss sich durch Tensoren bzgl. beliebigen KT ausdrücken lassen, also $g_{\mu\nu}$, $R^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau}$, ..

Was ist die Quelle der Raumkrümmung?
= Quelle der Gravitationskraft = Masse, Energie, Impl

⇒ Einstein sucht Gleichung, die folgende Eigenschaften hat:

i) Kovariant bzgl. allgem. KT
ii) Energieerhaltung
iii) Newtonsche Gravitationsgesetz als Grenzfall enthalten.

Einstein Gleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (*)$$

Λ = kosmologische Konstante, wurde später von ihm hinzugefügt

κ = Konstante, wird durch Newtonschen Grenzfall festgelegt

$= \frac{8\pi G_N}{c^4}$

$T_{\mu\nu}$: Energie und Impulstensor

Bemerkung

- 10 partielle DGL 2. Ordnung für $g_{\mu\nu}$
  - $\rightarrow$ Aufgabe: finde $g_{\mu\nu}$ für vorgegebenes $T_{\mu\nu}$ als Lösung von $(*)$

- leerer Raum: $T_{\mu\nu} = 0$

  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} = 0 = R$

  Lösung von $(*)$ für $\Lambda = 0$

Newtonsche Grenzfall $(\Lambda = 0)$

schwaches, zeitunabhängiges Gravitationsfeld

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} + O(\epsilon^2), \quad \epsilon \ll 1$$

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = \partial_0 h_{\mu\nu} = 0, \quad T_{00} = c^2 \rho$$

↑ Massedichte

$$\int \rho = m$$

Λ (*) ...

$$\Delta g_{00} = c^2 K \rho \quad (**), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Lösung von (*)

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2} U \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{c^4}{2} K \rho$$

↑ Konvention

$$\Rightarrow \quad U = -\frac{c^4 K}{8\pi} \frac{m}{r}$$

Vergleich mit Newton: (m_1 am Ort $\vec{r}$, m_2 am Ursprung)

$$m_1 \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -G\, m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} = -m_1 \vec{\nabla} U \quad \text{für } U = -\frac{G_N m_2}{r}$$

↑ $\vec{F}$ konservativ

$$\Rightarrow \frac{c^4 K}{8\pi} = G_N \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{8\pi G_N}{c^4} \quad \checkmark$$