V5 Riemannsche Geometrie (1854)

B. Riemann (1826 – 1866)

Theorie von gekrümmten Räumen (Weiterentwicklung von Theorie gekrümmter Flächen, Gauß)

Riemannscher Raum (Mannigfaltigkeit) beliebiger Dimension D

hat Wegelement

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} g_{\mu\nu}(x^\rho)\, dx^\mu dx^\nu$$

mit i) $g_{\mu\nu}$ differenzierbar

ii) $g_{\mu\nu}$ symmetrisch $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

iii) $g_{\mu\nu}$ nicht singulär $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$

Spezialfall: $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ (flacher Euklidischer Raum)

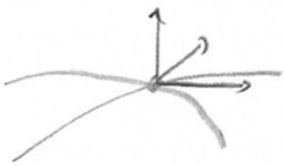
$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (flacher Minkowski-Raum pseudo-Euklidisch)

Aus i) folgt Möglichkeit einer Taylor-Entwicklung

$$g_{\mu\nu}(x^\rho) = g_{\mu\nu}(x_0^\rho) + \sum_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\mu\nu}\right)\bigg|_{x_0^\rho} (x^\rho - x_0^\rho) + \dots$$

An jedem Punkt x_0^ρ kann

$g_{\mu\nu}(x_0^\rho) = \eta_{\mu\nu}$ gewählt werden anschaulich: an jedem Punkt kann ein flacher Tangentialraum errichtet werden



Das entspricht genau dem lokalen IS, in dem kein Gravitations WW spürbar ist

Wann kann man durch geeignete UT

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ $\forall$ Punkte x^ρ wählen?

Antwort:

Genau dann, wenn

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} := \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} + \sum_\lambda \left(\Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \right)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} := \frac{1}{2} \sum_\theta g^{\mu\theta} \left(\frac{\partial g_{\nu\theta}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\theta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\theta} \right)$$

$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ heißt Riemannscher Krümmungstensor

$g^{\mu\theta}$ ist inverse Metrik: $\sum_\theta g^{\mu\theta} g_{\theta\nu} = \delta^\mu_\nu$

Bemerkungen:

- $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \Gamma = 0 \Rightarrow R = 0$ ✓

Man definiert auch

$$R_{\nu\sigma} := \sum_\mu R^\mu{}_{\nu\mu\sigma} \qquad \text{Ricci-Tensor}$$

$$R := \sum_{\nu\sigma} g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} \qquad \text{Ricci Skalar}$$

Was ist ein Tensor?

Tensor := "Objekt / Größe" mit einem homogenen Transformationsverhalten

Beispiel ist Differential + Ableitung

unter einer allgemeinen KT $x^\mu \to x'^\mu(x)$

gilt i) $dx'^\mu = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$

mit $\Lambda^\mu{}_\nu := \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$

ii) $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \sum_\nu \Lambda^{-1\,\nu}{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$

Kovarianter Vektor a_μ transformiert wie
(=Tensor 1. Stufe)

$$a'_\mu = \sum_\nu \Lambda^{-1\,\nu}{}_{\mu}\, a_\nu$$

kontravarianter Vektor a^μ transformiert wie
(Tensor 1. Stufe)

$$a'^\mu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu\, a^\nu$$

Kovarianter Tensor 2. Stufe transformiert wie

$$a'_{\mu\sigma} = \sum_{\nu\lambda} \Lambda^{-1\,\nu}{}_{\mu}\, \Lambda^{-1\,\lambda}{}_{\sigma}\, a_{\nu\lambda} \qquad (*)$$

Beispiel: Metrik $g_{\mu\nu}$: transformiert wie (*)

Kontravarianter Tensor 2. Stufe transformiert

$$a'^{\mu\sigma} = \sum_{\nu\lambda} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \Lambda^{\sigma}{}_{\lambda}\, a^{\nu\lambda}$$

n-te Stufe $a_{\mu_1\ldots\mu_n}$, $a^{\mu_1\ldots\mu_n}$

gemischte Tensoren: $a_\mu{}^\nu$, $a_{\mu\sigma}{}^\nu$, ...

Man zeigt:

i) $g_{\mu\nu}$ ist Tensor 2. Stufe

ii) $R^{\mu}_{\ \nu\rho\sigma}$ ist Tensor 4. Stufe

iii) $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ ist <u>kein</u> Tensor!