V4 Äquivalenzprinzip

4.1. Trägheitskräfte

Für beschleunigte Bezugsysteme S' gilt

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{s}(t)$$

Falls $\ddot{\vec{s}} = \begin{cases} 0 & \rightarrow \vec{s}(t) = \vec{v}_0 t \rightarrow \text{geradlinig gleichförmig} \\ \vec{b} = \text{konst} & \Rightarrow \vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{b}\,t^2 \\ & \Rightarrow \text{konstante Beschleunigung} \\ \text{beliebige } t\text{-Abhängigkeit} & \Rightarrow \text{beliebige Beschleunigung} \end{cases}$

Vergleiche den Newtongleichungen:

$$S: \quad \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$S': \quad \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}\,' + m\ddot{\vec{s}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} - m\ddot{\vec{s}} = m\ddot{\vec{r}}\,'$$

$\Rightarrow$ in S' "erscheint" zusätzliche Kraft $m\ddot{\vec{s}}$

Diese Kräfte nennt man Trägheitskräfte / Scheinkräfte

4.2 schwere & träge Masse

2 Newtonsche Gesetze:

$$\vec{F} = m^t \vec{a} \quad , \quad m^t = \text{träge Masse}$$

$$\vec{F} = - G_N \, m_1^s m_2^s \, \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad , \quad m^s = \text{schwere Masse}$$

a priori: $m^t \neq m^s$ möglich

Beobachtung: $m^t = m^s$ (Fallgesetze, Pendel, Torsionswaage)
mit immer besserer Präzision
hat keine Erklärung in Newtonschen Theorien

Einsteins Überlegung:

Person im freien Fall spürt eigenes Gewicht nicht
kann in geschlossenem Labor nicht entscheiden
(messen) ob $\left\{ \begin{array}{l} \text{freier Fall im Gravitationsfeld} \\ \text{geradlinig gleichförmige Bewegung} \end{array} \right.$

alle Körper bewegen sich gleich
$\Rightarrow$ Gravitationskraft = Trägheitskraft (*)

nicht ganz: räumliche Gravitationskraft messbar

$\Rightarrow$ (*) gilt in einem kleinen Raumbereich wo $\vec{F} = \text{const}$!

4.3 Äquivalenzprinzip

An jedem Raum-Zeit Punkt in einem beliebigen Grav.-Feld ist es möglich ein "lokales IS" zu finden, so dass in einer hinreichend kleinen Umgebung um diesen Punkt die SRT <u>ohne</u> Gravitationswechselwirkung gilt

4.4. Gravitationskraft

Freier Fall im Gravitationsfeld

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Transformation in ein beliebiges anderes K.S. $\quad x^\mu \to x^\mu(x'^\nu)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{d\tau}\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\,\frac{dx'^\nu}{d\tau} = \sum_\nu \sum_\lambda \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda}\,\frac{dx'^\nu}{d\tau}\,\frac{dx'^\lambda}{d\tau} + \sum_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\,\frac{d^2 x'^\nu}{d\tau^2} \qquad (*)$$

Für nicht-singuläre K.T. ist Matrix $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$ invertierbar, d.h. es gilt

$$\sum_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\,\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{\sum_\mu \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\Big(\sum_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}}_{=\sum_\nu \delta_\nu^\rho}\underbrace{\frac{d^2 x'^\nu}{d\tau^2} + \sum_{\nu\lambda} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda}\,\frac{dx'^\nu}{d\tau}\,\frac{dx'^\lambda}{d\tau}\Big)}_{=(*)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x'^{\rho}}{d\tau^2} + \sum_{\nu,\lambda} \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} = 0} \qquad (**)$$

mit $\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} := \sum_{\mu} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}}$ Christoffel Symbol

<u>Bemerkungen</u>

- (**) beschreibt freien Fall in beliebig KS, also auch im Gravitationsfeld!
- 2 Term beschreibt Gravitationskraft als Trägheitskraft
- geometrische Bedeutung von (**): Gleichung einer Geodäte (= kürzester Weg in einem gekrümmten Raum)

  $\Rightarrow$ Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld entspricht Bewegung in einem gekrümmten Raum!

4.5 Metrik im beliebig KS.

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$ Minkowski-Raum

Transformation in beliebig KS.

$$x^\mu \to x^\mu(x'^\nu)$$

$$\Rightarrow dx^\mu = \sum_\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} dx'^\lambda$$

$$\curvearrowright ds^2 = \sum_{\mu\nu\lambda\rho} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} dx'^\lambda dx'^\rho$$

$$= \sum_{\lambda\rho} g_{\lambda\rho}(x')\, dx'^\lambda dx'^\rho$$

mit $g_{\lambda\rho} := \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho}$

$g_{\lambda\rho}$ heißt Metrik / metrischer Tensor